Лемма Даламбера

$f \in \mathbb{C}[z]$, $\deg f > 0$

$f(z_0) \neq 0 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists h \in \mathbb{C}$ т.ч. $|h| < \varepsilon$ и

$$|f(z_0 + h)| < |f(z_0)|.$$

Доказательство.

$$f(z) = b_0 + b_k (z - z_0)^k + \ldots + b_n (z - z_0)^n$$

$b_k \neq 0 \quad b_n \neq 0$

w_0 – корень $b_0 + b_k z^k \Longrightarrow b_k = -b_0 / w_0^k$

$h = t \cdot w_0 \quad t \in \mathbb{R}.$

$$f(z_0 + h) = b_0 + b_k w_0^k t^k + \ldots + b_n w_0^n t^n$$

$$= b_0 \cdot (1 - t^k) + \underbrace{b_{k+1} w_0^{k+1} t^{k+1} + \ldots + b_n w_0^n t^n}$$

$$= b_0 (1 - t^k) + \left(b_{k+1} w_0^{k+1} + \ldots + b_n w_0^n t^{n-k-1}\right) t^{k+1}$$

Положим $C = |b_{k+1}| |w_0|^{k+1} + \ldots + |b_n| |w_0|^n$

При $t < |b_0| / C$, $0 < t < 1$.

$$|f(z_0 + h)| \le |b_0| (1 - t^k) + C t^{k+1} =$$

$$= |b_0| + (Ct - b_0) \cdot t^k < b_0 = |f(z_0)|. \quad \square$$

Доказательство основной теоремы

Пусть $|f(z)| > 0 \quad \forall z$

$M = \inf |f(z)| \quad \exists z_n$ т.ч.

$|f(z_n)| \to M$.

(a) $|z_n|$ не ограничены $\Longrightarrow$

$\forall R \ \exists z_n \quad |z_n| > R$

противоречит лемме о возр. модуля.

(b) $|z_n|$ ограничена $\quad z_n = x_n + i y_n$

$\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\quad z_n \to z_0, \ x_n \to x_0, \ y_n \to y_0$

$\Longrightarrow \quad f(z_m) \to f(z_0), \quad = M.$

противоречит выбору M

и лемме Даламбера.

__Следствие.__ Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ = многочлены степени 1.

__Следствие__ Число корней $f \in \mathbb{C}[z]$ с учетом кратностей $= \deg f$.

__Следствие__ Неприводимые многочлены $\in \mathbb{R}[z]$ = многочлены степени 1 и степени 2 с дискр < 0.

__Доказательство__

__Лемма__ $f(z) \in \mathbb{R}[z] \subset \mathbb{C}[z]$

- $w \in \mathbb{C}$ $\quad \overline{f(w)} = f(\overline{w})$
- $w \in \mathbb{C}$ корень $\Rightarrow \overline{w}$ корень.

Поле частных

R — целостное кольцо.

Поле частных $\mathrm{Frac}(R)$

— поле такое, что

(1) $\mathrm{Frac}(R) \supset R$ как подкольцо

(2) $\forall f \in \mathrm{Frac}(R)$

$f = a/b \quad a, b \in R$

$b \neq 0$.

Теорема (1) $\mathrm{Frac}(R)$ существует

(2) Если $\mathrm{Frac}(R)'$ — другое поле частных, то

$\exists\, \varphi : \mathrm{Frac}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(R)'$

т.ч. $\varphi|_R =$ тождеств.

Элементы $\mathrm{Frac}(R)$ — дроби.

Доказательство.

Единственность $\varphi(f) = \varphi\left(\frac{a}{b}\right) =$

$$= \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}.$$

Корректность. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

$$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$$

$$\varphi\left(\frac{a'}{b'}\right) = \frac{\varphi(a')}{\varphi(b')}$$

$$ab' = a'b \qquad \varphi(a)\varphi(b') = \varphi(a')\varphi(b)$$

Существование $\{(a,b)\} = P$

$(a,b) \sim (a',b')$ если $ab' = a'b$

отношение эквивалентности

$$\mathrm{Frac}(R) = P/\sim$$

__Пример__ $R = \mathbb{Z}$ $k[[t]]$.

$\mathrm{Frac}(R) = \mathbb{Q}$.

Пусть R — факториальное кольцо

$f/g \in \mathrm{Frac}(R)$ — несократимая дробь, если $\text{НОД}(f, g) = 1$.

__Утв__ (1) $\forall$ дробь f/g имеет несократимую запись

(2) $\forall$ другая несократимая запись отличается умножением на обратимый эл-т числителя и знаменателя

(3) $\forall$ дробь получается из своей несокр. записи умножением числителя и знаменателя на эл-т $\neq 0$.