# Поле рациональных функций

## Правильная дробь $k(t)$

## Простейшие дроби

## Примеры (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

**Теорема** $\forall\ f/g \in k(t)$

$$f/g = q + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{f_{ik}}{p_i^k}$$

простейшие дроби.

Это разложение единственно с точностью до порядка.

**Доказательство.**

**Существование** Можно считать что $f/g$ — правильная дробь.

**Лемма** $f/g \in \Bbbk(t)$ — правильная дробь.

$g = g_1 \cdot g_2$ разложение в сумму вз. простых.
$\deg g_i > 0$

$\Rightarrow \dfrac{f}{g} = \dfrac{f_1}{g_1} + \dfrac{f_2}{g_2}$ разложение единственно.

**Доказательство** $g_1 \cdot u + g_2 \cdot v = 1$

$$\frac{f}{g} = \frac{f \cdot v}{g_1} + \frac{f \cdot u}{g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + f^*$$

$\square$

**Следствие** $\forall\ f/g \in \Bbbk(t)$ — правильная дробь

$g = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ — разложение на неприводимые $\Rightarrow$

$$\frac{f}{g} = \sum \frac{f_k}{p_k^{m_k}}$$ ← правильные дроби.

**Лемма** $f/p^m$ — правильная дробь $p \in \mathbb{k}(t)$

$p$ — неприводим.

$$\Rightarrow f/p^m = \frac{f_m}{p^m} + \dots + \frac{f_1}{p}$$

где $f_k/p^k$ — простейшие. Разложение единственно

Доказательство. Существование

Индукция по $m$

$$f = q \cdot p + f_m$$

Единственность

$$\frac{f}{g} = \frac{f_m'}{g^m} + \dots + \frac{f_1'}{g}.$$

Вычитаем

Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.

Теорема $R$ — факториальное (целостное) кольцо. $\Rightarrow$ $R[t]$ факториально.

Следствия

Доказательство $K = Frac(R)$

Лемма $\forall f \in K[t]$

$f = \frac{\alpha}{\beta} f^*$ $f^* \in R[t]$, $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$.

Определение $f \in R[t]$ примитивный, если НОД(коэфф) $= 1$.

Замечание $\forall f \in R[t]$ $f = a \cdot f^*$ $f^*$ примитивен.

Лемма Гаусса $f, g$ – примитивные $\Rightarrow f \cdot g$ примитивный

**Следствие** $f, g \in \overline{R[t]}$. $g$ – примитивный

Если $g \mid f$ в $K[t] \Rightarrow$ $g \mid f$ в $R[t]$

**Доказательство** $f = g \cdot h$

$h \in K[t]$ $h = \frac{\alpha}{\beta} \cdot h^*$ $\square$

**Следствие** $f \in R[t]$ примитивный

$f$ – неприводима в $R[t]$ $\Leftrightarrow$ $f$ неприводим в $K[t]$ $\deg(f) > 0$

Следствие Неразложимые элементы в $R[t]$

(1) $\deg f = 0$ $f \in R$ неразложим

(2) $\deg f > 0$ $f$ примитивный и неприводим в $\mathbb{K}[t]$

Лемма $p \in R[t]$ неразложим

$p \mid f \cdot g \Rightarrow p \mid f$ или $p \mid g$.

Доказательство (1) $\deg p = 0$

(2) $\deg p > 0$ .