Кольцо многочленов от нескольких переменных.

Определение R — комм. ассоц. кольцо с 1.

S — кольцо многочленов от n переменных над R, если:

(0) S — коммутативное, ассоциат. кольцо

(1) $S \supset R$ как подкольцо $S \neq R$

(2) $\exists\ t_1, \ldots, t_n$ возможные элементы т.ч.

$\forall f \in S$ единственным образом представляется в виде

$$f = \sum a_{k_1 \ldots k_n} t^{k_1} \cdots t^{k_n}.$$

конечная сумма. $a_{k_1 \ldots k_n} \in R$

Обозначение. Элементы многочлены одночлены

Предложение Кольцо многочленов от n переменных над R существует и единственно.

Единственность **Существование**

$$R[t_1 \dots t_n] = R[t_1]\dots[t_n]$$

Пункт (3). Индукция по n.

$$f \in R[t_1]\dots[t_n]$$

$$= \sum g_k t_n^k \qquad g_i = \sum b_{k_1\dots} t^{\dots}$$

$$= \sum_i \left(\sum b_{k_1\dots k_{n-1}} t_1^{k_1}\dots t_{n-1}^{k_{n-1}}\right) \cdot t_n^k$$

Однозначность разложения

$$f = \sum a_{k_1\dots k_n} t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n} = \cdot$$

перегруппируем. - Сравним коэф.

Единственность

$$S_1 = R[t_1, \dots, t_{n-1}]$$

подходящую.

$$S \supset S_1$$

$$S = S_1[t_1]$$

$$S' = S_1'[t_1]$$

$$\exists \varphi_1 : S_1 \longrightarrow S_1'$$ По индукции.

$$\varphi_1|_R = \text{тожд.}$$

Следствие.

$R[t_1 \ldots t_n]$ не имеет делителей 0 $\Longleftrightarrow$ R не имеет делителей 0.

Следствие

$R[t_1 \ldots t_n] = R[t_1] \ldots [t_n]$

Следствие $\forall \sigma \in S_n$

$R[t_1 \ldots t_n] \simeq R[t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(n)}]$

Степень по переменной (определение)

Следствие. В R нет делит. 0 $\Longrightarrow$ $\deg_{x_k}(f \cdot g) = \deg_{x_k}(f) + \deg_{x_k}(g)$

Однородные многочлены

Разложение в сумму однородных

Предложение. В R нет делителей $0 \Rightarrow$

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

(соглашение $\deg(0) = -\infty$).

Лексикографический порядок.

Определение.

Лемма. Для одночленов ($\neq 0$).

(1) $u \succ v \quad v \succ w \Rightarrow u \succ w$

(2) $u \succ v \Rightarrow u \cdot w \succ v \cdot w$

(3) $u \succ v \quad u' \succ v' \Rightarrow u \cdot u' \succ v \cdot v'$

Доказательство

(1) $u = t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n} \quad v = t_1^{l_1} \ldots t_n^{l_n}$

$w = t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}$

$k_1 = l_1 = m_1 \quad \ldots \quad k_i \geq l_i \geq m_i$

в одном месте неравенство строгое

$c(f)$ — старший член

$o(f) = f - c(f)$.

Лемма (о старшем члене)

В R нет делителей 0

$\Rightarrow c(f\cdot g) = c(f)\cdot c(g)$.

Доказательство.

$\tilde f \in o(f)$ $\quad \tilde g \in o(g)$

$c(f) \succ \tilde f \qquad c(g) \succ \tilde g$

$$c(f)\cdot c(g) \succ \begin{array}{l} \tilde f \cdot \tilde g \\ \tilde f \cdot c(g) \\ c(f)\cdot \tilde g \end{array}.$$

$\square$