

Программа экзамена
Алгебра-III, группа 241, осень 2022г.
Прохоров Ю. Г.

- (1) Свободные абелевы группы. Базисы и ранг. Универсальное свойство свободных абелевых групп. Подгруппа свободной абелевой группы свободна и конечно порождена.
- (2) Целочисленные матрицы и элементарные преобразования над ними. Приведение целочисленной матрицы к диагональному виду.
- (3) Лемма о согласованных базисах. Разложение конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических (существование).
- (4) Периодическая часть $\text{Tor}(A)$ абелевой группы. Выделение $\text{Tor}(A)$ прямым слагаемым в конечно порожденной абелевой группе. Подгруппа p -кручения $\text{Tor}_{(p)}(A)$ абелевой группы. Выделение $\text{Tor}_{(p)}(A)$ прямым слагаемым.
- (5) Единственность разложения конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических. Показатель группы. Элемент порядка $\exp(A)$ в конечной абелевой группе.
- (6) Дискретные подгруппы в \mathbb{R}^n . Их свойства.
- (7) Действия групп на множествах. Орбита и стабилизатор. Связь орбиты и стабилизатора. Число элементов орбиты. Центр p -группы. Группы порядка p^2 .
- (8) Первая теорема Силова.
- (9) Вторая теорема Силова.
- (10) Третья теорема Силова.
- (11) Коммутант группы. Его свойства. Коммутант групп порядка pq .
- (12) Разрешимые группы. Композиционный ряд.
- (13) Разрешимость группы верхнетреугольных матриц.
- (14) Коммутант знакопеременной группы A_n . Неразрешимость A_n .
- (15) Коммутант специальной линейной группы $SL_n(\mathbf{k})$. Неразрешимость $SL_n(\mathbf{k})$.
- (16) Полупрямые произведения. Разложение группы порядка pq в полупрямое произведение.
- (17) Композиционный ряд. Простые группы.
- (18) Классы сопряженных элементов в группе S_n . Простота группы A_n .
- (19) Простота группы $PSL_2(\mathbf{k})$.
- (20) Простота группы $SO_3(\mathbb{R})$.
- (21) Кольца. Идеалы. Конструкция факторкольца. Теорема о гомоморфизме колец.

- (22) Модули над кольцами. Фактормодули. Гомоморфизмы. Теорема о гомоморфизме модулей.
- (23) Простые и максимальные идеалы (в коммутативных кольцах). Существование максимального идеала. Кольца главных идеалов. Наибольший общий делитель. Факториальность кольца главных идеалов.
- (24) Китайская теорема об остатках. Следствия.
- (25) Простые поля. Алгебраические расширения полей. Минимальный многочлен. Теорема о башне полей.
- (26) Целые расширения колец. Целозамкнутые кольца. Целозамкнутость факториальных колец.
- (27) Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.
- (28) Поле разложения многочлена.
- (29) Конструкция алгебраического замыкания поля.
- (30) Строение конечных полей.
- (31) Группа обратимых элементов кольца вычетов $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$.
- (32) Алгебра кватернионов. Теорема Фробениуса.
- (33) Представление кватернионов матрицами 2×2 . Гомоморфизмы $SU_2 \rightarrow SO_3$ и $SU_2 \times SU_2 \rightarrow SO_4$.
- (34) Конечные кольца с делением (теорема Веддербарна).
- (35) Сепарабельные расширения полей. Совершенные поля. Теорема о примитивном элементе.
- (36) Продолжение автоморфизмов расширений. Нормальные расширения полей. Группа автоморфизмов расширений.
- (37) Расширения Галуа. Группа Галуа. Основная теорема теории Галуа.
- (38) Квадратично замкнутые поля. Геометрические задачи на построение циркулем и линейкой.
- (39) Выражение корней многочленов в радикалах.
- (40) Трансцендентные расширения полей. Базисы трансцендентности.