Задачи

14.1. Пусть $\mathbb{K}/\mathbb{k}$ – алгебраическое расширение полей. Докажите, что все чисто несепарабельные элементы в $\mathbb{K}$ над $\mathbb{k}$ образуют подполе. Образуют ли подполе все несепарабельные элементы?

14.2. Пусть $\mathbb{K}/\mathbb{k}$ – расширение полей характеристики $p > 0$ и пусть $\theta \in \mathbb{K}$ алгебраический над элемент. Докажите, что элемент θ^{p^e} сепарабелен над $\mathbb{k}$ для некоторого e.

14.3. Пусть $\mathbb{k}$ – поле характеристики $p > 0$ и пусть $f \in \mathbb{k}[t]$ – неприводимый многочлен. Докажите, что все корни f имеют одну и ту же кратность p^e для некоторого e.

14.4. Докажите, что если $a \in \mathbb{k}$, $a \notin \mathbb{k}^p$, то многочлен $t^{p^e} - a$ неприводим в $\mathbb{k}[t]$ $(\operatorname{char}\mathbb{k} = p > 0)$.

14.5. Если $\mathbb{K}/\mathbb{k}$ – конечное чисто несепарабельное расширение поля $\mathbb{k}$, то степень $\mathbb{K}/\mathbb{k}$ является степенью числа p, $p = \operatorname{char}\mathbb{k}$. Докажите.

14.6. Докажите, что если любое алгебраическое расширение поля $\mathbb{k}$ является сепарабельным, то $\mathbb{k}$ совершенно.

14.7. Пусть $\mathbb{k}$ – поле характеристики $p > 0$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- θ сепарабелен над $\mathbb{k}$;
- $\mathbb{k}(\theta) = \mathbb{k}(\theta^p)$;
- $\mathbb{k}(\theta)$ – сепарабельное расширение поля $\mathbb{k}$.

14.8. Пусть $\mathbb{k}(x_1, x_2)$ – поле рациональных функций над полем $\mathbb{k}$ характеристики $p > 0$. Докажите, что расширение $\mathbb{k}(x_1, x_2)/\mathbb{k}(x_1^p, x_2^p)$ не порождается одним элементом. *Указание.* Расширение $\mathbb{k}(x_1, x_2)/\mathbb{k}(x_1^p, x_2^p)$ имеет степень p^2. С другой стороны, если $\mathbb{k}(x_1, x_2) = \mathbb{k}(z)$, то $\mathbb{k}(x_1^p, x_2^p) = \mathbb{k}(z^p)$.

14.9. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{k}(\theta)/\mathbb{k}$ – конечное расширение полей, порожденное одним элементом. Докажите, что существует только конечное число промежуточных полей $\mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{k}$. *Указание.* Рассмотрите отображение $\mathbb{L} \longmapsto \mu^{\mathbb{L}}(t)$, отображающее промежуточное поле $\mathbb{L}$ в минимальный многочлен θ над $\mathbb{L}$, и докажите, что оно инъективно.