

ВОПРОСЫ к экзамену по алгебре

группа 141 (МФиФМ), осенний семестр 2023 г.

лектор – Ю. Г. Прохоров

- (1) Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Системы однородных уравнений. Связь однородных и неоднородных систем линейных уравнений.
- (2) Матрицы. Сложение и умножение матриц. Ассоциативность умножения. Матричная запись систем линейных уравнений. Понятие кольца. Кольцо матриц.
- (3) Произведение подстановок. Обратная и единичные подстановки. Понятие группы. Симметрическая группа. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций.
- (4) Число подстановок. Независимые подстановки (коммутирование). Циклы. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
- (5) Четность. Корректность определения четности. Четность произведения подстановок. Четность обратной подстановки. Число четных и нечетных подстановок. Знакопеременная группа.
- (6) Определители. Определитель транспонированной матрицы. Вычисление определителя при помощи элементарных преобразований.
- (7) Полилинейность и кососимметричность определителя. Эквивалентное определение определителя (как полилинейной кососимметрической формы).
- (8) Определитель с углом нулей. Разложение (и фальшивое разложение) определителя по строке.
- (9) Определитель Вандермонда. Теорема и формулы Крамера.
- (10) Определитель произведения матриц.
- (11) Обратная матрица. Единицы и обратные элементы в ассоциативном кольце (единственность). Критерий существования обратной матрицы. Формула для обратной матрицы.
- (12) Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Делители нуля в кольце. Делители нуля в кольце матриц. Полная и специальная линейные группы.
- (13) Векторные пространства. Линейная зависимость. Лемма о линейной зависимости. Критерий невырожденности матрицы.
- (14) Базис. Координаты. Размерность векторного пространства и подпространства. Ранг матрицы. Ранг суммы матриц.
- (15) Ранг произведения матриц. Теорема о ранге матрицы.
- (16) Критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера–Капелли). Решения однородной системы линейных уравнений. Связь решений неоднородной и соответствующей однородной систем линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
- (17) Линейные отображения и изоморфизмы векторных пространств. Изоморфизм векторных пространств одной размерности.
- (18) Гомоморфизмы групп и колец. Ядро и образ гомоморфизма. Изоморфизмы.
- (19) Поля. Определение, свойства, примеры. Понятие алгебры над полем. Конечномерная ассоциативная алгебра без делителей нуля является алгеброй с делением.

- (20) Поле комплексных чисел. Аксиоматическое определение, существование, единственность. Алгебраическая запись. Вещественная и мнимая части. Комплексное сопряжение.
- (21) Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра. Решения уравнения $z^n = w$. Группа μ_n корней из 1. Первообразные корни.
- (22) Кольца вычетов. Делители нуля и обратимые элементы. Поля \mathbb{F}_p . Конечное ассоциативное кольцо без делителей нуля является телом. Изоморфизм $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и μ_n . Теорема Вильсона.
- (23) Характеристика поля. Умножения целых чисел на элементы аддитивной абелевой группы. Свойства полей характеристики $p > 0$. Отображение Фробениуса.
- (24) Кольцо многочленов (определение, существование, единственность). Степень многочлена. Делители нуля в кольце многочленов.
- (25) Подстановка элемента в многочлен. Восстановление многочлена по его значениям. Интерполяционная формула Лагранжа. Функциональное равенство многочленов. Пример для конечных полей. Корни многочленов. Теорема Безу.
- (26) Кратность корня. Деление многочленов над полем с остатком. Делимость в кольцах. Неприводимые многочлены. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.
- (27) Факториальные и евклидовы кольца. Факториальность кольца многочленов над полем. Дифференцирования. Дифференцирования кольца многочленов над полем.
- (28) Понижение кратности при дифференцировании. Формула Тейлора.
- (29) Лемма о возрастании модуля многочлена.
- (30) Лемма Даламбера.
- (31) Основная теорема алгебры (доказательство). Неприводимые многочлены над \mathbb{C} и \mathbb{R} .
- (32) Поле частных целостного кольца (определение, существование и единственность).
- (33) Поле рациональных функций. Простейшие дроби. Разложение дроби в сумму простейших. Простейшие дроби над \mathbb{C} и \mathbb{R} .
- (34) Многочлены над факториальным кольцом. Лемма Гаусса.
- (35) Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.
- (36) Многочлены от нескольких переменных. Лексикографический порядок. Лемма о старшем члене.
- (37) Симметрические многочлены. Основная теорема и симметрических многочленах.
- (38) Формулы Виета. Дискриминант.
- (39) Результант (определение и свойства). Выражение дискриминанта через результатант.
- (40) Выражение результатанта через определитель.
- (41) Циклические группы. Подгруппа циклической группы. Циклические подгруппы. Порядок элемента. Порядок элемента. Изоморфизм циклических групп одного порядка.
- (42) Смежные классы. Теорема Лагранжа. Малая теорема Ферма. Нормальные подгруппы.
- (43) Факторгруппа. Теорема о гомоморфизме групп.
- (44) Идеалы. Факторкольца. Теорема о гомоморфизме колец.