14 декабря 2023 г.

Пополняемый список задач

Подстановки.

(1) Решите уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(2) Может ли подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ быть представлена в виде произведения шести транспозиций?

(3) Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 10 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Вычислите σ^{1000}.

(4) Найдите четность цикла $[i_1, i_2, \dots, i_r]$ длины r.

(5) Пусть подстановка σ разложена в произведение независимых циклов $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_m, \quad \sigma_k = [i_1, i_2, \dots, i_{l_k}]$. Выразите четность σ через длины $l_1, l_2, \dots, l_m$ циклов $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$. Указание: Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

Умножение матриц.

(1) Пусть A – квадратная верхнетреугольная матрица такая, что $\operatorname{tr}(A^m) = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что $A^m = 0$ для некоторого m.

(2) Пусть A – матрица ранга 1. Докажите, что элемент, стоящий на пересечении ненулевой строки и ненулевого столбца, отличен от нуля.

(3) Пусть A – квадратная матрица такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Докажите, что матрица $E - A$ невырождена.

(4) Пусть A – квадратная матрица такая, что $A^3 + A + E = 0$. Докажите, что матрица $E - A$ невырождена.

(5) Вычислите произведение $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) Найдите формулу для $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ и докажите ее по индукции.

(7) Найдите формулу для $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ и докажите ее по индукции.

(8) Пусть A, B – квадратные матрицы.
  (a) Когда $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?
  (b) Раскройте скобки $(A + B)^3$.

(9) След квадратной матрицы $A = (a_{i,j})$ – это сумма ее диагональных элементов:

$$\operatorname{tr}(A) := a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n}.$$

Покажите, что $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$, и что $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

(10) Покажите, что соотношение $AB - BA = E$ невозможно для квадратных матриц A и B.

(11) Пусть D – диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

и пусть $A = (a_{i,j})$ – любая матрица $n \times n$.

(a) Вычислите произведения DA и AD.

(b) Вычислите произведение двух диагональных матриц.

(c) Когда диагональная матрица обратима?

(12) Докажите, что если квадратная матрица A коммутирует с любой диагональной матрицей (т.е. $AX = XA$ для любой диагональной матрицы X), то A – тоже диагональная.

(13) Докажите, что произведение двух верхнетреугольных матриц является верхнетреугольной.

(14) Квадратная матрица A называется *скалярной*, если $A = \lambda E$ для некоторого λ. Докажите, что если A коммутирует с любой квадратной матрицей (т.е. $AX = XA$), то A – скалярная.

(15) Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Докажите, что если $\forall\ B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ имеем $\mathrm{tr}(A\cdot B) = 0$, то $A = 0$.

(16) Докажите, что каждая обратимая матрица 2×2 является произведением не более чем четырех элементарных матриц.

(17) Докажите, что если произведение AB квадратных матриц обратимо, то обратимы и сомножители A, B.

(18) Матрица A называется симметрической, если $A = A^{\mathrm{T}}$. Докажите, что для любой матрицы A матрица AA^{T} является симметрической и что если A-квадратная матрица, то $A + A^{\mathrm{T}}$ – симметрическая.

(a) Докажите, что $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ и что $A^{\mathrm{TT}} = A$.

(b) Докажите, что если A обратимо, то $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$

(19) Пусть A и B – симметрические квадратные матрицы. Докажите, что произведение AB – также симметрическая матрица тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

(20) Пусть A – квадратная верхнетреугольная матрица такая, что $\mathrm{tr}\, A^m = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что $A^m = 0$ для некоторого m.

(21) Пусть A – матрица ранга 1. Докажите, что элемент, стоящий на пересечении ненулевой строки и ненулевого столбца, отличен от нуля.

Определители.

(1) Вычислите определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \quad\ \ \cdot^{\cdot^{\cdot}} 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1\cdots\cdots 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & b\cdots\cdots b & b \\ 1 & a & b\cdots\cdots b & b \\ c & 1 & a\cdots\cdots b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ c & c & c\cdots\cdots a & 2 \\ c & c & c\cdots\cdots 1 & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & a\cdots\cdots a & a \\ a & 0 & a\cdots\cdots a & a \\ a & a & 0\cdots\cdots a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a & a & a\cdots\cdots 0 & a \\ a & a & a\cdots\cdots a & 0 \end{vmatrix}$$

(2) Вычислите определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3\cdots\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & ab & 0\cdots\cdots\cdots 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab\cdots\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b\cdots\cdots\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots a+b & ab \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots\cdots 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(3) Вычислите определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\cdots\cdots\cdots n-1 & n \\ 1 & 0 & 3\cdots\cdots\cdots n-1 & n \\ -1 & -2 & 0\cdots\cdots\cdots n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3\cdots\cdots\cdots 0 & n \\ -1 & -2 & -3\cdots\cdots -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

(4) Вычислите определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3\cdots\cdots\cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3\cdots\cdots\cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b\cdots\cdots a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots a_{n-1}+b & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots\cdots a_{n-1} & a_n+b \end{vmatrix}$$

(5) Вычислите определитель порядка n

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_2b_1 & a_3b_1\cdots\cdots a_{n-1}b_1 & a_nb_1 \\ a_1b_2 & c_2 & a_3b_2\cdots\cdots a_{n-1}b_2 & a_nb_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & c_3\cdots\cdots a_{n-1}b_3 & a_nb_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_1b_{n-1} & a_2b_{n-1} & a_3b_{n-1}\cdots\cdots c_{n-1} & a_nb_{n-1} \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n\cdots\cdots a_{n-1}b_n & c_n \end{vmatrix}$$

(6) Пусть A, B – квадратные матрицы. Чему равен определитель матрицы $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & * \end{pmatrix}$?

(7) Пусть для некоторого натурального $n > 1$ все элементы определителя вне главной диагонали делятся на n, а на главной диагонали – взаимно просты с n. Докажите, что определитель отличен от нуля.

(8) Пусть M – квадратная $(2n \times 2n)$-матрица вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

где A, B, C, D – квадратные $(n \times n)$-матрицы такие, что A обратима и $AC = CA$. Докажите, что $|M| = |AD - CB|$.

(9) Пусть для некоторого натурального $n > 1$ все элементы определителя вне главной диагонали делятся на n, а на главной диагонали – взаимно просты с n. Докажите, что определитель отличен от нуля.

(10) Вычислите определитель порядка n

$$\Delta_n(x_1,\dots,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_1+x_2 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_2+x_3 & x_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 & x_3+x_4 & x_4 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Обратная матрица.

(1) Квадратная матрица A называется *нильпотентной*, если $A^r = 0$ для некоторого $r > 0$. Докажите, что если A нильпотентна, то $E + A$ обратима.

(2) Пусть A, B – квадратные матрицы одинакового размера такие, что $AB = BA$. Докажите, что блочная матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ невырождена.

(3) Пусть A, B – квадратные матрицы одинакового размера такие, что $AB = BA$. Докажите, что блочная матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ невырождена.

(4) След квадратной матрицы $A = (a_{i,j})$ – это сумма ее диагональных элементов:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}.$$

(a) Покажите, что $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$, и что $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(b) Покажите, что если B обратима, то $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(BAB^{-1})$.

(5) Пусть A – квадратная матрица такая, что $A^3 + A + E = 0$. Докажите, что матрица $E - A$ невырождена.

(6) Пусть A – квадратная целочисленная матрица. Когда матрица A^{-1} также целочислена?

(7) Пусть A, B – квадратные $(n \times n)$-матрицы такие, что матрица $E - AB$ невырождена. Докажите, что матрица $E - BA$ также невырождена.

(8) Пусть A – квадратная матрица. Пусть существует квадратная матрица A' такая, что $AA' = E$. Докажите, что A обратима и $A^{-1} = A'$.

Линейная зависимость, ранги матриц.

(1) Пусть $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ – квадратная матрица ранга r и пусть $\hat{A} = (A_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ – матрица, составленная из ее алгебраических дополнений. Чему может быть равен ранг $\hat{A}$?

(2) Пусть A – квадратная матрица ранга 1. Докажите, что матрицы A и A^2 линейно зависимы (как элементы векторного пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$).

(3) Пусть A – квадратная матрица порядка 2. Докажите, что матрицы E, A и A^2 линейно зависимы (как элементы векторного пространства $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$).

(4) Пусть A – квадратная матрица порядка 2 такая, что $A^n = 0$ для некоторого n. Докажите, что $A^2 = 0$.

(5) Пусть A – квадратная матрица порядка 2 такая, что $\mathrm{tr}(A^n) = 0$ для $n = 1, 2$. Докажите, что $A^2 = 0$.

Группы.

(1) Пусть G – группа и H – ее *конечное* непустое подмножество. Если $a \cdot b \in H$ для любых $a, b \in H$, то H – подгруппа. Докажите. Верно ли это для бесконечных групп?

(2) Пусть G – группа с операцией $a \cdot b$. На элементах G определим новое умножение по правилу $a \star b = b \cdot a$. Докажите, что G с этой новой операцией является группой. Она обозначается G^{op}. Изоморфны ли группы G и G^{op}?
(3) Пусть в группе G каждый неединичный элемент имеет порядок 2. Докажите, что G абелева.
(4) Докажите, что любая группа порядка > 2 имеет нетривиальный автоморфизм.
(5) Найдите способ вычислять порядки элементов в симметрической группе S_n. Указание: Разложите подстановку в произведение независимых циклов.
(6) Является ли циклической группа $\mathbb{Q}^+$? Группа $\mathbb{Q}^*$?
(7) Докажите, что группы $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{Q}^*$ не могут быть порождены конечным числом элементов.
(8) Является ли конечно порожденной подгруппа всех корней из единицы $\boldsymbol{\mu}_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mu}_n \subset \mathbb{C}^*$?
(9) Докажите, что $\mathbb{C}^*/\boldsymbol{\mu}_n \simeq \mathbb{C}^*$.
(10) Докажите, что имеет место изоморфизм между группой всех корней из единицы $\boldsymbol{\mu}_\infty ::= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mu}_n \subset \mathbb{C}^*$ и фактроргруппой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(11) Докажите, что имеет место изоморфизм между группой всех комплексных чисел по модулю равных единице $\{z \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$ и фактроргруппой $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
(12) Докажите, что подмножество всех внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}(G)$ группы G является подгруппой в группе всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Докажите, что $\mathrm{Int}(G) \simeq G/Z(G)$. Докажите, что $\mathrm{Int}(G)$ является нормальной подгруппой в$\mathrm{Aut}(G)$.
(13) Докажите, что центр $Z(\mathrm{S}_n)$ симметрической группы S_n тривиален.
(14) Докажите, что центр $Z(\mathrm{GL}_n(\Bbbk))$ полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ состоит из скалярных матриц.
(15) Докажите, что центр $Z(\mathrm{SL}_n(\Bbbk))$ специальной линейной группы $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ состоит из скалярных матриц с определителем 1.

Поля.

(1) Докажите, что множество комплексных чисел вида $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ является подполем в $\mathbb{C}$.
(2) Докажите, что множество комплексных чисел вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ является подполем в $\mathbb{C}$.
(3) Докажите, что множество комплексных чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ не является подполем в $\mathbb{C}$.
(4) Пусть $\mathbb{K} \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ – подкольцо в кольце матриц над $\mathbb{R}$. Предположим, что $\mathbb{K}$ является полем. Докажите, что $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$.
(5) Докажите, что мультипликативная и аддитивная группы поля не могут быть изоморфны.
(6) Пусть в группе A каждый неединичный элемент имеет порядок 2. Мы уже знаем, что A абелева. Рассмотрим A в аддитивной записи.
  (a) Докажите, что на A ввести структуру векторного пространства над полем $\mathbb{F}_2$.
  (b) Предположим, что A конечна. Используя предыдущий пункт, доказать, что группа A изоморфна прямой сумме групп $\mathbb{F}_2$.
(7) Пусть $\Bbbk$ – бесконечное поле. Докажите, что группы $\Bbbk^+$ и $\Bbbk^*$ не являются циклическими.

(8) Пусть $\Bbbk$ – поле. Докажите, что кольцо формальных рядов Лорана $\Bbbk((t))$ над $\Bbbk$ также является полем.

(9) Пусть $\Bbbk$ – поле. Докажите, что кольцо формальных рядов Лорана $\Bbbk((t))$ над $\Bbbk$ является полем частных для $\Bbbk[[t]]$.

(10) Представим сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$ в виде несократимой дроби $\frac{n}{m}$. Докажите, что если p – простое, то n делится на p.

Комплексные числа.

(1) Запишите $1+\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$ в тригонометрической форме.

(2) Пусть ω – первообразный корень степени n из 1. При каких $n \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ имеет место соотношение $\omega^{k_1}+\omega^{k_2}+\omega^{k_3}+\omega^{k_4}+1=0$ для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$.

(3) Докажите, что круговые многочлены имеют целые коэффициенты.

(4) Пусть ε – корень из 1. Предположим, что линейная комбинация $\sum m_k\varepsilon^k$, $k \geq 0$, $m_k \in \mathbb{Z}$ является рациональным числом. Докажите, что тогда оно – целое.

(5) Пусть $z+1/z=2\cos(\varphi)$. Докажите, что $z^n+1/z^n=2\cos(n\varphi)$.

(6) Вычислите $(1+\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$.

(7) Вычислите $(1+\varepsilon)^n$, где $\varepsilon=\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)$.

(8) Выразите $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$ через $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$ для $n \leq 7$.

(9) Выразите $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$ через $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$ для любого n.

Многочлены и рациональные функции.

(1) Пусть R – произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с 1.
   (a) Опишите делители 0 в $R[t]$. *Ответ*: $f \in R[t]$ делитель 0 тогда и только тогда, когда существует $a \in R \quad af=0$.
   (b) Опишите обратимые элементы. *Ответ*: $f=\sum a_it^i \in R[t]$ обратим тогда и только тогда, когда a_0 обратим и существует k такое, что $a_i^k=0$ при $i>0$.

(2) Докажите, что количество неприводимых многочленов над полем бесконечно.

(3) Разложите в сумму простейших дробей следующие рациональные функции над $\mathbb{C}$:
   (a) $\frac{1}{t^4+1}$,
   (b) $\frac{1}{t^n-1}$,
   (c) $\frac{1}{t^n+1}$.

(4) Разложите в сумму простейших дробей следующие рациональные функции над $\mathbb{R}$:
   (a) $\frac{1}{t^4+1}$,
   (b) $\frac{1}{t^n-1}$,
   (c) $\frac{1}{t^n+1}$.

Кольца.

(1) Пусть R – кольцо с единицей. Из определения кольца выведите, что $a\cdot 0=0\cdot a=0$ для любого $a \in R$.

(2) Пусть R – конечное ассоциативное кольцо без делителей нуля. Докажите, что в R есть единица.

(3) В каком случае левая единица кольца единственна?

(4) Пусть M – произвольное множество. Докажите, что множество всех его подмножеств 2^M с операциями симметической разности $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ и пересечения $A \cap B$ является кольцом. Докажите, что оно изоморфно кольцу функций $M \to \mathbb{F}_2$ на M со значениями в поле из двух элементов.

(5) Ассоциативное кольцо с единицей называется булевым, если для любого $a \in R$ выполненено $a^2 = a$. Пусть R – булево кольцо. Докажите, следующие свойства.
   (a) $a = 2a = 0$ для любого элемента $a \in R$.
   (b) Кольцо R коммутативно.
   (c) Если в R нет делителей нуля, то R – поле и тогда $R \simeq \mathbb{F}_2$.
   (d) Если элемент $a \in R$ не является делителем нуля, то $a = 0$ или $a = 1$.
   (e) Кольцо R является алгеброй над полем $\mathbb{F}_2$.
   (f) Если R конечно, то в нем 2^k элементов для некоторого k.
(6) Чему изоморфно факторкольцо $\mathbb{Z}[i]/(2 + 3i)$?
(7) Может ли ядро гомоморфизма $GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}_m)$ содержать элементы конечного порядка? Исследовать.
(8) Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо с 1 такое, что для любого элемента $a \in R$ выполнено $a^2 = a$. Докажите, что $2a = 0$ для любого $a \in R$.
(9) Пусть R – произвольное коммутативное ассоциативное кольцо без делителей нуля. Докажите, что и кольцо формальных степенных рядов $R[[t]]$ не имеет делителей нуля.
(10) Пусть R – произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с 1. Докажите, что формальный степенной ряд $f = \sum a_i t^i \in R[[t]]$ обратим тогда и только тогда, когда обратим элемент $a_0 \in R$.
(11) Пусть $\Bbbk$ – поле. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $\Bbbk[[t]]$ является факториальным. Как выглядят в нем простые элементы?
(12) Докажите, что кольцо чисел Эйлера $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ не является факториальным.
(13) Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ элемент 6 разлагается на простые множители двумя, существенно различными способами.
(14) Докажите, что кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ евклидово.
(15) Докажите, что кольцо $\{\frac{a+b\sqrt{-3}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ евклидово. Указание: Положите $\nu(z) = |z|^2$.
(16) Докажите, что групповая алгебра конечной группы обязательно имеет делители нуля.
(17) Докажите, что двумерная ассоциативная алгебра с единицей обязательно коммутативна, а если в ней нет делителей нуля, то она – поле.
(18) Приведите пример подалгебры в кольце многочленов над полем $\Bbbk[t]$, не изоморфной кольцу многочленов.

Симметрические многочлены.

(1) Следующие многочлены выразите через элементарные симметрические:
   (a) $t_1^2 t_2 + t_1^2 t_3 + t_2^2 t_1 + t_2^2 t_3 + t_3^2 t_1 + t_3^2 t_2$,
   (b) $t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + t_4^3$,
   (c) $t_1^4 + t_2^4 + t_3^4$,
   (d) $(t_1 t_2 + t_3 t_4)(t_1 t_3 + t_2 t_4)(t_1 t_4 + t_2 t_3)$.
(2) Пусть f – симметрическая рациональная функция. Запишем ее в виде несократимой дроби $f = g/h$. Докажите, что тогда числитель g и знаменатель h являются симметрическими многочленами.

(3) Пусть $s_m := \sum_{i=1}^n t_i^m \in \Bbbk[t_1, \dots, t_n]$ – симметрические степенные суммы. Докажите тождества Ньютона

$$m\sigma_m = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1}\sigma_{m-i}s_i.$$

(4) Пользуясь результатом предыдущей задачи докажите, что элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ могут быть выражены как многочлены от $s_1, \dots, s_n$.

(5) Найдите сумму кубов комплексных корней следующих многочленов:
  (a) $t^4 + t^2 + t + 1$,
  (b) $t^5 + 1$,

(6) Найдите сумму четвертых степеней комплексных корней следующих многочленов:
  (a) $t^4 + t + 1$,
  (b) $t^5 - 1$,

(7) Вычислите дискриминант многочленов:
  (a) $t^3 + pt^2 + q$,
  (b) $t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$,
  (c) $t^4 + pt + q$,
  (d) $t^n - 1$,
  (e) $t^n + 1$.

(8) Пусть f – многочлен с действительными коэффициэнтами. Какой смысл имеет знак его дискриминанта?

(9) Пусть $f(t) \in \Bbbk[t]$ – многчлен степени n и пусть D_f – его дискриминант. Как связан D_f с дискриминантом D_g многочлена $g(t)$, где
  (a) $g(t) = f(t + \lambda)$, $\Lambda \in \Bbbk$;
  (b) $g(t) = f(\lambda t)$, $\Lambda \in \Bbbk$;
  (c) $g(t) = t^n f(1/t)$.