

Лекция 6

22 марта 2023.

Zoom

$$Q_1, Q_2 \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

"X" $\dim X = n$

Базисные свойства.

Семейство прямых, проходящих.

$$P \in X$$

Прямых.

проходят
через них.

Через $P \in X$ (точка)

$$\boxed{n-3} - \text{семейство}$$

$$(n \geq 3)$$

При $n=2$ через точку $P \in X$
не проходят прямых.

Компактность прямых многообразия.

Для V_P - обертывающая
всех прямых, проходящих через P .

$$\text{Тогда } V_P = X \cap T_{P,X} \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

$\nearrow$ n $\nearrow$ n

Действительно, $V_p \subset X \cap \overline{T_{p,x}}$

$$X \cap \overline{T_{p,x}} \supset V_p.$$

p' ℓ проходят через

p, p'

ℓ касается X, Q_1, Q_2

$$\ell \cap Q_i \Rightarrow \underbrace{2P + P'}_{2 \text{ точки}}$$

$$\ell \subset Q_i$$

$$\ell \subset X$$



$n=2$ $X \supset$ коническое
многообразие.

Прямая $\ell \subset X \simeq \mathbb{P}^1$

ср-на g по $\rho_{\text{огр.}}$

$$(K_X + \ell) \cdot \ell = 2g - 2 = -2$$

$$K_X = (K_{\mathbb{P}^2} + Q_1 + Q_2)|_X$$

для
присоединения т.е. $X = Q_1 \cap Q_2$
(полное пересечение.)

$$K_X = (-5H + 2H + 2H)|_X$$

$$K_X = -H|_X$$

$$K_X \cdot l = -H \cdot l = -1$$

$$\Rightarrow l^2 = -1$$

Прямая $\subset X$
как возмущение $Gr(2, 5)$

адг. множ., если не
идеально $\Rightarrow \exists$ семейство

$$l_t \sim l \quad l^2 = l_t \cdot l \geq 0$$

-1 " $\xrightarrow{\text{разные}} \text{Противоречие} \quad \square$

Презентация 2 $P \in X \subset \mathbb{P}^{n+2}$

$$\psi: \mathbb{P}^{n+2} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$$

$\dim X' = n$

$$\psi: X \dashrightarrow X'$$

$$\psi: X \dashrightarrow X' \quad \text{бirationальное отображение}$$

X' - поверхность

$$\text{Sing}(X') = \psi(V_P)$$

В частности, $n \geq 3$ X' огиба

$$n=2 \quad X' \text{ огиба} \Leftrightarrow P \in \text{прямая}$$

$(\text{т.е. } V_P \neq \emptyset)$

X' не конус.

Докажем что

X'



"плоской" кривой

X

V_p

аффинность

В координатах

$p = (0, \dots, 0)$

$$\begin{cases} l_1(x_1, \dots, x_{n+2}) + q_1(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0 \\ l_2(x_1, \dots, x_{n+2}) + q_2(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0 \end{cases}$$

$$\psi: (x_1, \dots, x_{n+2}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n+2})$$

$$A^{n+2} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+2}$$

$\cup$

X

$\cup$
 X'

$$\underline{V_p} = X \cap T_{p,X} = \{l_1 = l_2 = 0, q_1 = q_2 = 0\}_{T_{p,X}}$$

$$l_1 \cdot g_2 - l_2 \cdot g_1 = 0$$

уравнение X'

Упр проверить X' о.о.б.о

вдоль $\psi(V_p) = \{l_1 = l_2 = g_1 = g_2 = 0\}$

Следствие V_p — пересечение
2х квадратичных
полюсов

$Q_1 \cap T_{p,x}$
 $Q_2 \cap T_{p,x}$

о.о.б.о

Не полюс Упр.

Следствие При $n \geq 1$

$$X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

разноименное множество

Дополнительно к

Предполагая

2 линейных
уравнения
 l_1, l_2

$$V_P = X \cap T_{P,X}$$

имеет размерность $n-2$

Из теоремы Лернера о глн
сечениях

$$\text{Pic}(X) \simeq \text{Pic}(\mathbb{P}^{n+2})$$

← отрицательные
дивизоры

Иначе $V_P \supset \text{дивизор } D$

$$D \sim kH$$

(или сечение.)

пересечение с $T_{P,X}$
2 тн. сечения

$$\overline{T}_{P,X} = \overline{T}_{P,Q_1} \cap \overline{T}_{P,Q_2}$$

$\mathbb{P}^n \quad \mathbb{P}^{n+1} \quad \mathbb{P}^{n+1}$

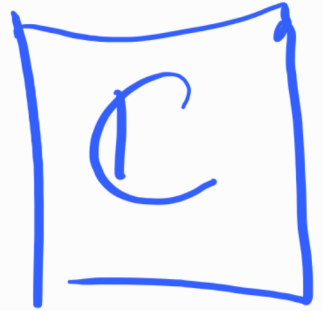
факт $X' \subset \mathbb{P}^{n+1}$ —

кубическая поверхность

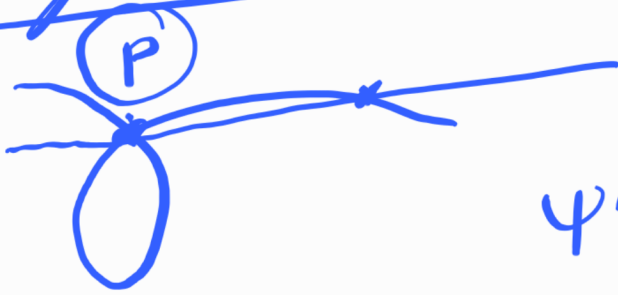
1) $\text{Sing}(X') \neq \emptyset$

2) X' не конус

$\Rightarrow X$ разномыслио.



Доказательство



$$\psi: X' \rightarrow \mathbb{P}^n$$

проектирование
— изогнуто

В формулах (аффинных)

$$q(x_1, \dots, x_{n+1}) + f_3(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n+1})$$

$\mathbb{P}^n$

$$(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) \quad |P^{n+1}$$

$$\lambda g(x_1, \dots, x_n) + f_3(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$q(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \quad \lambda$$

$$k = \overline{k}$$

$$k \neq \overline{k}$$



$$n=2$$

X разложимо $\Leftrightarrow$

(Условелих)

$$(1) \exists X(k) \neq 0$$

(2) $\exists$ множество ненулевых
элементов, опре. на k .

$$n=3$$

X разложимо $\Leftrightarrow$

$$(1) \exists X(k) = 0$$

(2) $\exists$ нулевой $/ k$.

$$K_X = (K_{\mathbb{P}^{n+2}} + Q_1 + Q_2) |_X$$

$$= -(n+3)H + 2H + 2H.$$

$$-K_X = (n-1)H.$$

при $n=1$ $K_X = 0$ ^{эллип.} кривая

при $n=2$ $-K_X$ объемн.

многообразие фано

Теорема Коширы об обр. в кривую

V неособое кр. n -е / $\mathbb{C}$

A обильный дивизор на V

$$\Rightarrow H^i(V, \mathcal{O}_V(K_V + A)) = 0$$

при $i > 0$

Теорема X - многообразие фано $\Rightarrow$

$$H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$$

при $i > 0$

$$\boxed{A = -K_V}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 1$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \underline{H^1(X, \mathcal{O}_X^*)} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

$$0'' \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \underline{\text{Pic}(X)}$$

Боргов X - многообразие
факто, то

$$\text{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$$

полностью порождены

Утверждение X - многообр.
факто, то $\pi_1^{\text{alg}}(X) = \{1\}$

т.е. у X нет нетривиальных
конечных накрытий.

На самом деле $\pi_1(X) = \{1\}$ | связный
пространство

Пусть $\varphi: X' \xrightarrow{n:1} X$
 непрерывн.
 накрыт.

$$① \quad -K_{X'} = \varphi^*(-K_X)$$

X' — ^{одним} многообразием фано

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1, \chi(\mathcal{O}_{X'}) = 1$$

$$② \quad \chi(\mathcal{O}_{X'}) = n \chi(\mathcal{O}_X)$$

$$\Rightarrow n = 1.$$

Автоморфизм X — м-е
фано

$\text{Aut}(X)$ — линейная
 алгебраическая
 группа.

Доказательство

— и K_X
очень обилии.

$$\phi_{|-hK_X|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

$|-hK_X|$ инвариант $\text{Aut}(X)$

$$\Rightarrow \text{Aut}(X) \hookrightarrow \mathbb{P}^N = |-hK_X|^\vee$$

$\phi_{|-hK_X|}$ эрмитов

$$\Rightarrow \text{Aut}(X) \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^N)$$

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^N) \cong \text{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$$

алгебраические
условия.

алг. алг. гр.

$$X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^{n+2}, n \geq 2.$$

$$\begin{cases} x_0^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0 \\ \lambda_0 x_0^2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\delta_0 \dots \delta_{n+2} = 1 \quad \lambda_{i'} \neq \lambda_{j'}$$

$$\delta_{i'} : \begin{aligned} x_{i'} &\rightarrow -x_{i'} \\ x_{j'} &\rightarrow x_{j'} \quad j' \neq i' \end{aligned}$$

$$\Gamma = \langle \delta_0 \dots \delta_{n+2} \rangle$$

$$\simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+2}$$

$$\Gamma \subset \text{Aut}(X)$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{G} = \langle Q_1, Q_2 \rangle$$

$$\text{Aut}(X) \simeq \mathbb{P}^{n+2},$$

$$\simeq \mathcal{G} \simeq \mathbb{P}^1$$

$$1 \rightarrow \Gamma \rightarrow \text{Aut}(X) \rightarrow \underset{\substack{= \\ \text{PGL}_2(\mathbb{C})}}{\text{Aut}(\mathcal{P})}$$

$$\mathcal{P} \ni \lambda_0, \dots, \lambda_{n+2}$$

$$\text{Aut}(X)/\Gamma \begin{matrix} \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{P}) \\ \searrow \\ S_{n+3} \end{matrix}$$

Следствие $\text{Aut}(X) \neq \{1\}$
когда-то.

Инвариантное определение

$$\tau_i : x_i \rightarrow -x_i$$

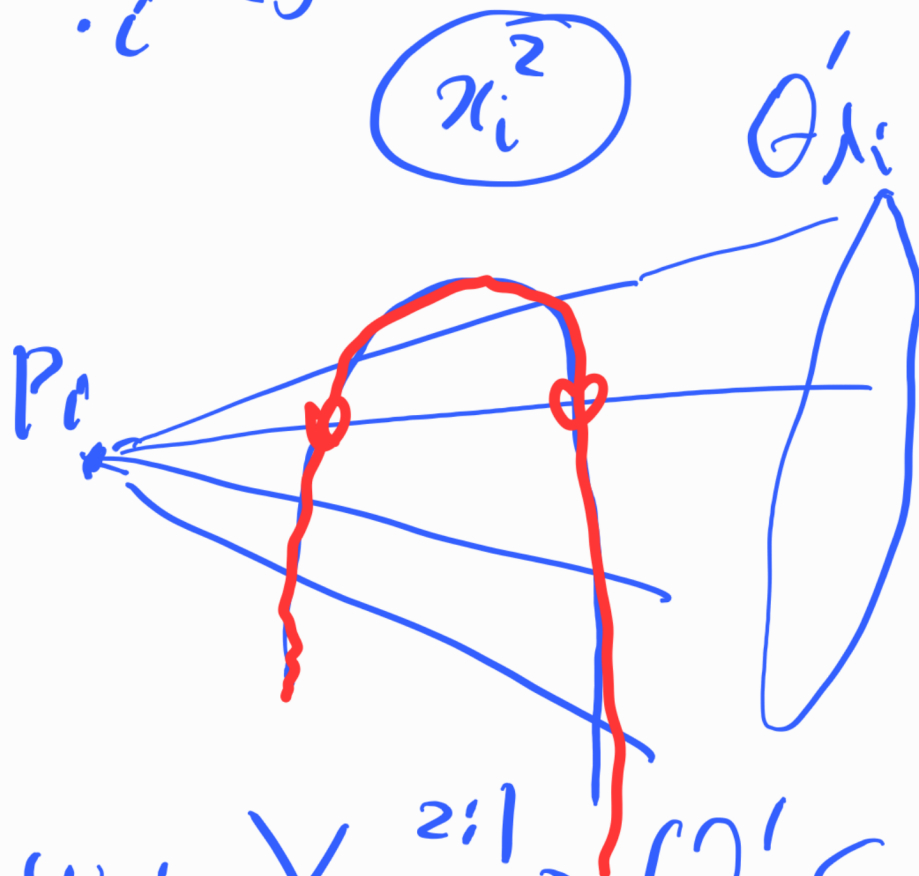
$\mathcal{P} \ni \mathcal{Q}_{\lambda_i}$ — базисные инварианты (полюсы)

$(0, \dots, 1, \dots, 0)$ — их значения
 P_i

$$\lambda_j \cdot \sum x_i^2 = 0$$

$$\sum \lambda_i x_i^2 = 0$$

$$\sum_i (\lambda_j - \lambda_i) x_i^2 = 0 \quad \checkmark$$



$$\psi_i: X \xrightarrow{2:1} Q'_i \subset \mathbb{P}^{n+1}$$

не выходя из н.в.

τ_i

инволюция (основная
Галуа
накрывающая ψ_i)

$$c = 0$$

P_0 - начало

$x_1, \dots, x_{n+3}$ - афф. коорд.

$$(x_{1i}, \dots, x_{n+3i})$$

$$X = Q \cap Q_1 \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

$n=2r$ четно

X не содержит
 k -мерных линейных
 подмногообразий при $k > \frac{n}{2}$.

$$Q \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

невырожд.

$$\sum_{\wedge} (r+1, n+3) \left\{ \begin{array}{l} \text{многообразие всех} \\ k\text{-плоскостей} \\ \text{в } Q \end{array} \right.$$

$$G_r(r+1, n+3)$$

$$\text{codim } \sum (r+1, n+3) = \frac{(r+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum (r+1, n+3) = 2^{r+1} \cdot \sigma_{r+1, r, \dots, 1}$$

$$\sum \text{ -многообразие } r\text{-плоскостей}$$

$\text{в } X$

$$\Sigma = \sum_{Q_1}(r+1, n+3) \cap \sum_{Q_2}'(r+1, n+3)$$

$$\text{codim } \Sigma = (r+1)(r+2)$$

$$\begin{aligned} \dim \Sigma &= (r+1)(n+3-r+1) - (r+1)(r+2) \\ &= (r+1)(r+2) - (r+1)(r+2) = 0 \end{aligned}$$

Вывод Σ 0-мерно.
(ожидаемая размерность)
 Σ полное множество
(ожидаемое)

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \sum_{Q_1}(r+1, n+3) \cdot \sum_{Q_2}'(r+1, n+3) = \\ &= 2^{r+1} \underbrace{C_{r+1, r, \dots, 1}}_{=1} \cdot 2^{r+1} \underbrace{C_{r+1, r, \dots, 1}}_{=1} = \\ &= 2^{n+2} \cdot \underline{1} = 2^{n+2} \end{aligned}$$

В застнати, $n=2$

$$X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^4$$

"содержит" 16 прямых.

Строго доказано: $\Sigma \neq \emptyset$.

Действие $\Gamma \curvearrowright \Sigma$
 2^{n+2} " 2^{n+2} "

Теорема. Действие
просто транзитивно, т.е.
 Σ -гл. орбитальное ап-во
на Γ .

Лемма $\forall \Gamma \subset \Sigma$

r -плоскость
стабилизатор Γ в Γ
тривиален.

Следствие $|\Sigma| \geq 2^{n+2}$

Доказательство $\gamma \in \Gamma$ γ_i

$$\gamma \cdot \Gamma = \Gamma, \quad \gamma = \gamma_0 \cdots \gamma_k$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 & \ddots & \\ & & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ \\ \\ V_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} V_1 & \gamma & -E \\ V_2 & \gamma & E \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \dim V_1 = k+1 \\ \dim V_2 = 2r+2-k \end{cases}$$

$$\Gamma = \text{IP}(W) \quad \begin{cases} 2r+3-k-1 \\ \dim W = r+1 \end{cases}$$

$$W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2)$$

$$X: \sum x_i^2 = \sum \lambda_i x_i^2 = 0$$

$X \cap IP(V_1)$ - неособое
пересечение
2х k -плоскостей
 $IP(W \cap V_1)$ размерности $k-2$

$$\dim W \cap V_1 \leq \frac{k-2}{2}$$

$$\dim W \cap V_2 \leq \frac{2r-k-1}{2}$$

$$\Rightarrow \dim W \leq \frac{2r-3}{2} < r-1$$

//
 $r+1$

Противоречие



$$\boxed{n=2} \quad X = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{P}^4$$

2-е порожде и-е класс
 = поверхность гал Печуго.

Обычные гранты о
поверхностях гал Печуго

$-K_X$ обилие.

$$d = (-K_X)^2 > 0 \quad \underline{\underline{\text{степень}}}$$

формула Хейзера гал
любых поверхностей

$$\underline{K_X^2 + \chi_{\text{top}}(X) = \frac{12 \chi(\mathcal{O}_X)}{2 \chi(\mathcal{O}_X)}}$$

Аналог $\dim = 1.$ " $2 \chi(\mathcal{O}_X)$

$$\chi_{\text{top}}(X) = 2 - 2g$$

$$g = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

$$\underline{\underline{Y_{\text{нас}}}} \quad \underline{\underline{\chi.(Q_X)}} = 1$$

$$\chi_{\text{top}}(X) = \sum \underbrace{(-1)^i \text{rk } H^i(X, \mathbb{Z})}_{b_i(X)}$$

гб. Пучки

$$\text{rk } H^1(X, \mathbb{Z}) = \text{rk } H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$$

$$\pi_1^{\text{alg}}(X) = \{0\}$$

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \pi_1 / [\pi_1, \pi_1]$$

$$\begin{aligned} \chi_{\text{top}}(X) &= 2 + \text{rk } H^2(X, \mathbb{Z}) \\ &= 2 + \underbrace{\text{rk } \text{Pic}(X, \mathbb{Z})}_{p(X)} \end{aligned}$$

$$d(X) + p(X) = 10$$

Следствие. $1 \leq d(X) \leq 9$.

Теорема $d(X) \geq 3$

$-K_X$ очень обилеч.

$$d(X)=4 \nearrow$$

X глв. Пейзо ст. 4

$$\Rightarrow \phi_{|-K_X|}: X \hookrightarrow \mathbb{P}^4$$

по т. Римана - Роха.

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{D \cdot (D - K_X)}{2} + \chi(\mathcal{O}_X)$$

$$D = -K_X$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) = 0$$

по т. Кодайры об обр. нуля

$$\dim H^0(X, -K_X) = d(X) + 1$$

$$\boxed{\dim | -K_X | = d(X)}$$

(гип. Петго

$$d(X) = 4 \quad \dim | -K_X | = 4$$

$$\phi_{|-K_X|}: X \hookrightarrow \mathbb{P}^4$$

$$\text{степень образа } (-K_X)^2 = 4$$

Упр Образ — полное
пересечение 2х квадрик.

Теорема Поверхность
гип. Петго степени 4
содержит ровно 16 прямых.

$$\geq 16$$