Лекция 5

15 марта 2023 г.

Пересечения двух квадрик

$$X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

$$\dim X = n.$$

рассматриваем гладкие (как правило)

Пересечения двух квадрик

$$X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}(V)$$

полн. пересечение.

$\mathcal{P}$ – пучок, порождённый Q_1 и Q_2.

$$X = \mathrm{Bs}\,\mathcal{P} = Q' \cap Q''$$

$$\forall\, Q', Q'' \in \mathcal{P},\ Q' \neq Q''$$

$\mathcal{P}$ – прямая в $\mathbb{P}(S^2 V) = \Delta_0$

Лемма Пусть X неособо

$\Longrightarrow$ 1) Любая квадрика $Q \in \mathfrak{J}$ неособа в точках X,
2) Общая квадрика $Q \in \mathfrak{J}$ неособа всюду.

Доказательство. 1) $P \in X$, $Q \neq Q_2$

$$T_{P,X} = T_{P,Q} \cap T_{P,Q_1} \subset T_{P,\mathbb{P}^{n+2}}$$

$$\dim T_{P,X} = \dim X = n$$

2) Теорема Бертини. $\Longrightarrow$ общий элемент $Q \in \mathfrak{J}$ неособ вне $Bs(\mathfrak{J}) = X$.

Пусть X неособо.

Следствие $\forall Q \in P$

$\dim \operatorname{Sing}(Q) \leq 0.$

Следствие Если $p \in X$ – особая точка, то $\exists Q \in P$ особая в P.

Доказательство В точке P в аффинных координатах $x_1, \dots, x_{n+2}$ уравнения

$$q_1(x_1, \dots, x_{n+2}) + l_1(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0$$
$$q_2(x_1 \dots x_{n+2}) + l_2(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0$$

l_1, l_2 линейно зависимы $\Rightarrow$

$\exists\ \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 = 0.$ $\square$

Характеристический многочлен.

Q_1 не вырожден

$$\chi(t) = \det(Q_2 - t Q_1)$$

Свойства:

- При замене базиса умножается
- При замене $Q_2 \longmapsto \lambda Q_2 + \mu Q_1$

$$\chi(t) = \det(\lambda Q_2 - (t-\mu) Q_1)$$

$$= \lambda^{n+3} \det\left(Q_2 - \left(\frac{t-\mu}{\lambda}\right) Q_1\right)$$

$$Q_1 \to \lambda Q_1 + \mu Q_2$$

$$\chi(t) = \det((1-\mu t) Q_2 - \lambda t Q_1)$$

$$= \ldots \det\left(Q_2 - \frac{\lambda t}{1-\mu t} Q_1\right)$$

Т.е. над корнями делается дробно-линейное преобразов.

Можно определить

$$\chi(u,v) = \det(u Q_1 - v Q_2).$$

Предложение Эквивалентно

(1) X неособо.

(2) $\chi(t)$ не имеет кр. корней

(3) $\exists$ ровно $n+3$ вырожд. квадрик $\in\mathbb{P}$

(4) $\exists$ система координат в $\mathbb{P}^{n+2}$ т.ч. X задается

$$\begin{cases} \sum x_i^2 = 0 \\ \sum \lambda_i x_i^2 = 0 \end{cases} \text{ где } \lambda_i \neq \lambda_j$$

Доказательство. (4) $\Rightarrow$ (1), (2), (3) очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (4) Пусть Q_1 невырожденна.

$Q_1 \longmapsto$ невырожденная симметрическая билинейная форма $(\cdot,\cdot)$

$Q_2 \longmapsto$ симметрическая билинейная форма $\langle \cdot,\cdot \rangle$

Отступление. Пусть дана невырожд. симм. билинейная форма $(\cdot\,;\cdot)$ и симметрич. билинейная формы $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$.

Оператор A $\quad \chi_A$ — хар. мн. этого оператора.

$$(Av, w) = (v, Aw) = \langle v, w \rangle$$

$(\cdot\,,\cdot)$ невырожденa $\Longrightarrow A$ корректно определен.

Это самосопряженный оператор.

<u>Лемма</u> v_i, v_j — собственные A с собств. числами значениями

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Longrightarrow (v_i, v_j) = 0.$$

<u>Доказательство.</u>

$$\lambda_i (v_i, v_j) = (Av_i, v_j) = (v_i, Av_j) = \lambda_j (v_i, v_j)$$

К.корни $\chi(t)$ различны

$\Longrightarrow$ существует ортонормированный базис для A, состоящий из собственных векторов.

Таким образом (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)

(1) $\Rightarrow$ (2) X неособо.

Предположим, что $\chi(t)$ имеет кратный корень. $t=\infty$

Можно считать, что он соответствует Q_2. Т.к. X неособо, то

$\operatorname{corank} Q_2 = 1$

$[v_2]$ — вершина Q_2 $\quad Q_2 \cdot v = 0$

Т.к. X неособо, то др. квадрики из P не проходят через $[v]$

$(v, v) \neq 0 \Longrightarrow$

$v^{\perp} \not\ni v$

$, \; V = \langle v \rangle \oplus v^{\perp}$

Можно считать, что v — часть ортонормированного базиса $\Longrightarrow$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(u,v) = \det \begin{pmatrix} v & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & Q'+vE \end{pmatrix}$$

Т.к. ранг $Q_2 = 1 \Rightarrow Q'$ невырожденное $\Rightarrow \infty$ не кратный корень $\chi(t)$.

<u>Следствие</u> X неособо $\Longleftrightarrow P$ трансверсально пересекает Δ (в неособых точках)

<u>Следствие</u> X, X' неособы.

X, X' проективно эквивалентны $\Longleftrightarrow \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+3}\}, \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_{n+3}\}$ проективно эквивалентны.

(пункт (4)).

<u>Следствие</u> X необобо $\Longrightarrow$ $n+3$ точки в $\mathbb{P}^{n+2}$ — вершины конусов (особых элементов $\mathcal{P}$) находятся в общем положении.

<u>Стандартный вид</u>

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+3} \end{pmatrix}$$

Соответствующий базис единств. с точностью до замен знаков и перестановок.

Замечание $n=1$.

Двойное отношение

$$\delta = (\lambda_1, \lambda_2; \lambda_3, \lambda_4) = \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3} : \frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}$$

сохраняется при проективных преобразованиях

$$\delta = \frac{\det(\lambda_1, \lambda_3)}{\det(\lambda_2, \lambda_3)} : \frac{\det(\lambda_1, \lambda_4)}{\det(\lambda_2, \lambda_4)}$$

Величина

$$j = 2^8 \, \frac{\delta^2-\delta+1}{\delta^2(\delta -}$$

сохраняется при перестановках.

Следствие X, X' (неособые) проект. эквивалентны $\Longleftrightarrow$

$$j = j'.$$

Полные пересечения

Теорема Лефшеца о гип. сечениях

$X \subset Y$ неособая гиперповерхность, обильный дивизор

$$i^*: \mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

(1) $\dim(X) \geq 3 \Rightarrow i^*$ iso

(2) $\dim(X) = 2 \Rightarrow i^*$ вложение

коядро не имеет кручений

Следствие 1) H – положит. образующая $\mathrm{Pic}(X)$, если $\dim(X) \geq 3$.

2) H – примитивный элемент

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}^p$$

Лемма $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Ф-ла присоединения

$$K_X = (d_1 + \cdots + d_k - N - 1)H. \quad \square$$

Полные пересечения

Предложение $X \subset \mathbb{P}^N$ — полное неособое пересечение г.т.

1) $\dim X > 1$

2) если $\dim X = 2 \Rightarrow K_X \neq 0$.

$\Longrightarrow$ вложение $X \subset \mathbb{P}^N$ задается полной линейной системой $|H|$, где

a) H — положительно образующая $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ если $\dim X \geq 3$

b) положительный примитивный элемент $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}^\rho$, пропорц. K_X

Доказательство. По следующей лемме & формуле присоед.

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(H)).$$

Лемма $X \subset \mathbb{P}^N$ – полное пересечение $\Longrightarrow$

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0 \quad \forall k$$

$$0 < i < n = \dim(X).$$

Доказательство. Индукция.

$$X = Y \cap Z \qquad \deg Z = d$$

Z – гиперповерхность,

Y – полное пересечение.

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-X) \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \to 0$$

$$\mathcal{O}_Y(-X) = \mathcal{O}_Y(-d)$$

$$0 \to \mathcal{O}_Y(k-d) \to \mathcal{O}_Y(k) \to \mathcal{O}_X(k) \to 0$$

$$H^i \qquad H^i \qquad H^i$$

$$H^{n-1} \qquad H^{n-1} \qquad H^{n-1} \qquad H^n$$

Предложение $X \subset \mathbb{P}^N$

Полное пересечение $(d_1, \dots, d_k)$

$$\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{P}}(X)$$

За исключением случаев

- $\dim X = 1$
- $\dim X = 2$ & $K_X = 0$.

Доказательство.

Лемма $\phi_{|D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ - рац. отображение, заданное полной лин. системой $|D|$, $G \subset \mathrm{Aut}(X)$, $G \cdot [D] = [D]$, $G \curvearrowright Cl(X)$

$\Longrightarrow \phi$ G-эквивариантно.

Доказательство. Следует из конструкции $\phi_{|D|}$. $\square$

__Следствие__. $X \subset \mathbb{P}^{n+2}$ — полное пересечение 2х квадрик, $n > 1$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{P}}(X).$$

Пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^3$

$X = X_4 \subset \mathbb{P}$ пересечение 2х квадрик.

$Q \supset X$ – неособая квадрика

$Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (вложение Сегре).

X имеет тип $(2, 2)$ на Q.

K_Q имеет тип $(-2, -2) \Rightarrow$

$\mathbb{P}^1_{x,y} \times \mathbb{P}^1_{u,v}$

$\boxed{K_X = 0.}$

$X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1_{u,v}.$

$$q_0(x,y) \cdot u^2 + 2 q_1(x,y) \cdot uv + q_2(x,y) \cdot v^2$$

Ветвление $q_1^2 - q_0 q_2 = 0$

4 точки на $\mathbb{P}^1_{x,y}.$

Всё, сказанное на любой квадрике в пучке, являются 2-секущими.

Общий факт.

Если X — эллиптическая кривая, D — дивизор степени 4 на X, то он очень обилен и задаёт вложение $\phi_{|D|}: X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$. $\deg X = 4$.

Образ — пересечение 2 квадрик.

$$0 \to I_X(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \to \mathcal{O}_X(2) \to 0$$

$X \subset Q_1 \cap Q_2$.

Утверждение. $C \subset \mathbb{P}^3$ — неособое пересечение двух квадрик. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 — особые квадрики в пучке.

(1) Если $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_4)$, то через P проходит ровно 2 2-секущих к C.

(2) Если $P \in Q_i \setminus C$, то через P проходит ровно одна 2 секущая к C.

Доказательство. Если $\ell \subset \mathbb{P}^3$ 2-секущая к C, то $\exists!$ квадрика Q из пучка, содержащая ℓ. Действительно,

$P \in \ell \setminus C \Rightarrow \exists!\ Q \in \mathcal{J}$

$Q \ni P$ т.к. $C = \mathrm{Bs}\,\mathcal{J}$.

Тогда $Q \supset \ell$. Иначе

$\ell \cap C = \{P_1, P_2\}$ или $\{2P_1\}$

$\ell \cap Q = \{P_1, P_2, P\}$ или $\{2P_1, P\}$.

Далее, любая прямая в Q является 2-секущей к C.

Если Q неособа, то через $P \in Q$ проходят 2 прямые,

Если Q особа, то через $P \in Q$ проходит 1 прямая, $\square$

Пусть $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^3$
неособ.

Рассмотрим кривую. Зафиксируем $p \in X$

$$Y \subset \mathcal{P} \times Gr(2,4)$$

$= \{(Q,\ell) \mid Q \supset \ell \ni p\}$. 2-секущие, проходящие через p

Тогда
$$Y \longrightarrow X$$
$$(Q,\ell) \longmapsto \ell \cap X - p$$

изоморфизм. (бир. отобр. X проект. неособа.)

$$Y \longrightarrow \mathcal{P} = \mathbb{P}^1$$ —

двулистное накрытие. разветвленное в особых элементах пучка

Замечание $Y \longrightarrow Gr(2,4)$

отображает Y на $\sigma_{2,0} = \sigma(p) = \mathbb{P}^2$

это вложение, в виде кубической кривой

Утверждение X — эллиптическая кривая, D — дивизор на X степени $d>0$ $\Rightarrow$ $\exists P\in X$ такая, что $d\cdot P\sim D$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon X \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X)$$
$$P \longrightarrow [dP-D].$$

Оно непостоянно: $dP-D\sim dQ-D \Rightarrow$

$$dP\sim dQ \Rightarrow d(P-Q)\sim 0$$

$\exists T$ (элемент d-кручения, $dT\sim 0$) т.ч.

$P=Q+T$. Элементов d-кручения в $\mathrm{Pic}^0(X)$ конечное число (сколько?) $\Rightarrow \exists P, Q$ т.ч. $\varphi(P)\neq\varphi(Q)$.

$\Rightarrow \varphi$ сюръективно (используем алгебраичность φ) $\Rightarrow \exists P$ т.ч. $\varphi(P)=0$ т.е. $dP\sim D$. $\square$

Следствие Таких элементов d^2 штук.

Следствие $X=Q_1\cap Q_2\subset\mathbb{P}^3 \Rightarrow$ X имеет ровно 16 точек гиперсоприкосновения.

Групповой закон на эллиптической кривой $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^3$

$O \in X$ точка гиперсоприкосновения

$\Pi_0 \cap X = 4O$. $T_{O,X}$ — касат. прямая

O — нейтральный элемент

$\Pi \supset T_{O,X}$ $\quad \Pi \cap X = \{2O, P_1, P_2\}$

$$P_2 = -P_1.$$

$P_1, P_2 \in X$ $\quad \Pi$ — плоскость, проходящая через P_1, P_2, O.

$\Pi \cap X = \{O, P_1, P_2, P_3\}$

$O + P_1 + P_2 + P_3 \sim 4O$, $\quad P_1 + P_2 + P_3 \sim 3O$

$P_1 + P_2 + P_3 = 3O$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(X) \\ P & \longrightarrow & P - O \end{array}}$$

Как найти O

$X — \mathrm{Pic}^0(X)$

Когомологии

$$X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

Теорема Лефшеца о гип. сечениях

$A \subset M$ эффективный обильный дивизор

M неособое м-е $\dim \cancel{M} = a$.

$$H^i(M, \mathbb{Z}) \to H^i(A, \mathbb{Z})$$

изом. если $i < a$

инъ., коядро без круч. если $i = a$

$$H_i(A, \mathbb{Z}) \to H_i(M, \mathbb{Z})$$

изо. если $i < a$

сюр. если $i = a$

В нашем случае:

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = H^i(\mathbb{P}^{n+2}, \mathbb{Z}) \text{ при } < n$$

$$H_i(X, \mathbb{Z}) = H_i(\mathbb{P}^{n+2}, \mathbb{Z}) \text{ при } i < n$$

$$\text{\rotatebox{90}{$\cong$}}$$

$$H^{2n-i}(X, \mathbb{Z})$$

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & i \text{ нечетно}, \neq n \\ \mathbb{Z} & i \text{ четно}, \neq n. \end{cases}$$

$$\chi_{top}(X) = c_n(T_X)$$

$$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^{n+2}}\big|_X \to \underset{\overset{\parallel}{\mathcal{O}_X(2)\oplus\mathcal{O}_X(2)}}{N_{X/\mathbb{P}^{n+2}}} \to 0$$

H - класс гиперплоского сечения

$$c_t(T_{\mathbb{P}^{n+2}})\big|_X = c_t(T_X)\cdot c_t(N_{X/\mathbb{P}^{n+2}})$$

$$(1+Ht)^{n+3} = \left(\sum c_k t^k\right)(1+2Ht)^2$$

$$c_t(N_{X/\mathbb{P}^{n+2}}) = (1+2Ht)(1+2Ht)$$

$$\sum c_k t^k = (1+Ht)^{n+3}\cdot(1+2Ht)^{-2}$$

$$= \left(\sum_k H^k t^k \binom{n+3}{k}\right)\left(\sum_j 2^j H^j t^j (-1)^j \cdot (j+1)\right)$$

$$H^n = 4$$

$$c_n = \sum_{k+j=n} 4\cdot\binom{n+3}{k} 2^j (-1)^j (j+1) =$$

$= 2n+4$ n чётно, 0 - n нечётно.

чётно $\Rightarrow$ $b_n(X) = \chi_{top}(X) - n$

$$\boxed{b_n(X) = n+4}$$

n нечётно $b_n(X) = -\cancel{\chi_{top}(X)} + n + 1$

$$\boxed{b_n(X) = n+1}$$

Случай $n=1$ $b_1(X) = 2$

$h^{0,1}(X) = 1$

Эллиптическая кривая

Случай $n=2$, $b_2(X) = 6$

<u>Наблюдение</u> $-K_X = (n+3-2-2)H = (n-1)H$

При $n=1$ $K_X = 0$

$n>1$ $-K_X$ обилен Фано

Пусть $n>1$ $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$

+ Кодаиро об обр. в нуль

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^* \to 1$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$$

Значит при $n=2$ $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}^6$

Случай $n=3$ $b_3(X) = 4$, $h^{1,3}(X) = 2$

Случай $n=4$, $b_4(X) = 8$

.

: