Классическая алгебраическая геометрия.

Лекции

Весна 2023

Лекция 1

Многообразия, представимые в виде пересечения квадрик.

$X \subset \mathbb{P}^n$ $\quad I(X) \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ однородный идеал.

$X \not\subset \mathbb{P}^{n-1}$ $\quad$ Порожден. компонентами степени 2. т.е.

$q_1 \cdots q_k \in I(X)$ порождают идеал.

Пример 1 $\quad$ **Вложение Веронезе** $\quad$ d-кратное

$$N = \binom{d+n}{n} - 1$$

$$\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N_d$$

$$(x_0, \ldots, x_n) \longmapsto (x_0^d, \ldots, x_n^d)$$

все одночлены ст. d

Это вложение (проверяется в аффинных картах.).

Образ $X = \varnothing(X)$.

$I(X)$ – все соотношения между $\sum d_j = d$

$(x_0^d, \ldots, x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n}, \ldots, x_n^d)$

$y_{d_0, \ldots, d_n}$ соотв. координаты в $\mathbb{P}^N$

Соотношения

$$y_{d_0 \cdots d_n} \cdot y_{d_0' \cdots d_n'} - y_{e_0 \cdots e_n} \cdot y_{e_0' \cdots e_n'} = 0$$

$$(d_0 \cdots d_n) + (d_0' \cdots d_n') = (e_0, \ldots, e_n) + (e_0' \cdots e_n').$$

<u>Реализация</u> $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$

$\dim V = n+1$

$\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(S^d V)$

$X =$ тензоры вида v^d

$v = \sum \lambda_i e_i$ $\qquad v^d = (\sum \lambda_i e_i)^d$

Примеры. $n=1$ $r=2$ коника $\subset \mathbb{P}^2$

$n=1$ $r=3$ скрученная кубика $\subset \mathbb{P}^3$

$n=2$ $r=2$ поверхность Веронезе $\subset \mathbb{P}^5$

$\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(S^2 V)$ $\dim V = 3$

$\mathbb{P}($ кв. формы от 3 перем. книга 1. $)$

Задача Когда образ отображения Веронезе является полным пересечением?

Задача $\forall$ кривая степени 3 в $\mathbb{P}^3$, не лежащая в плоскости — скрученная кубика.

Вложение Сегре

$$\phi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{n+m+n}$$

$$(x_0 \dots x_n)(y_0 \dots y_m) \to (x_0 y_0, x_0 y_1, \dots x_n y_m)$$

$$z_{ij}$$

$$\phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = X$$

Образ задается квадратичными уравнениями.

$$\left\{ z_{ij} \cdot z_{kl} - z_{il} \cdot z_{kj} = 0 \right.$$

$$x_i y_j \; x_k y_l$$

Пример $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$

Образ квадрики.

Любая неособая квадрика в $\mathbb{P}^3$ получается таким образом.

Теорема $\forall$ проективное многообразие существует вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ так, что X есть пересечение квадрик.

Доказательство.

$X \subset \mathbb{P}^n$ $f_1, \dots, f_m$ порожд. $I(X)$.

Рассмотрим d-кратное вложение

$$\Phi_d : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N.$$

Образ задается

a) квадратичными уравнениями для $\Phi_d(\mathbb{P}^n)$.

b) линейными уравнениями

$\longrightarrow f_i \cdot x_j^{d-d_i}$ $\quad d_i = \deg f_i$

[Эти уравнения порождают компоненту степени d $I_{\mathbb{P}^n}(X)$ как вект. пространство.]

Грассманианы.

$V \quad \dim V = n$

$$\{ W \subset V \mid \dim W = r \} = Gr(r, n)$$

$$W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$$

$\updownarrow$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{матрицы } r \times n \\ \text{ранга } r \end{matrix} \right\} \Big/ GL_r(\mathbb{k})$$

$\updownarrow$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{разложимые} \\ r\text{-векторы} \in \Lambda^r V \\ w_1 \wedge \dots \wedge w_r \end{matrix} \right\} \Big/ \mathbb{k}^*$$

Вложение Плюккера

$$Gr(r,n) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r V).$$

$$W \longrightarrow w_1 \wedge \cdots \wedge w_r.$$

Примеры 0) $r=1$

1) $\qquad Gr(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}$

$r = n-1 \qquad Gr(e, n-1) = (\mathbb{P}^{n-1})^{\vee} = \mathbb{P}^{n-1}$

$x \in \Lambda^{r-1} V \qquad T = \sum \lambda_i e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n$

$$\Lambda^{r-1} V \simeq V^{\vee} \ \exists w_1 \ldots w_{n-1}$$

$w_i \wedge x = 0 \qquad$ Положим $e_i = w_i$.

$i = 1, \ldots, n-1$

$$e_i \wedge x = \lambda_i e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n$$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 \qquad i = 1 \ldots n-1$$

$$x = \lambda_n e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}.$$

Пример $r=2$.

Предложение $x \in \Lambda^2 V$ разложим $\Longleftrightarrow$ $x \wedge x = 0$

Доказательство. $\Longleftarrow$

индукция по $n = \dim V$

$n=2$ очевидно.

$x = x' + e_n \wedge v$

x', v комбинации e_i e_j $1 \le i,j \le n-1$

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{x \wedge x}} = x' \wedge x' + \underbrace{2 e_n \wedge x' \wedge v}$$

лин. нез.

$$\begin{cases} x' \wedge x' = 0 & x' = v_1 \wedge v_2 \\ e_n \wedge \underline{x' \wedge v} = 0 \end{cases} \Rightarrow x' \wedge v = 0$$

не зависят от e_n

$v_1 \wedge v_2 \wedge v = 0$

Можно считать, что $v_1 \wedge v_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$x = v_1 \wedge v_2 + e_n \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2} v_1 \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + e_n \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_2} v_1 + e_n\right) \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2). \quad \square$$

Следствие $Gr(2, n)$ является пересечением квадрик

$$\left(\sum_{i<j} x_{ij} e_i \wedge e_j\right) \wedge \left(\sum_{k<l} x_{kl} e_k \wedge e_l\right)$$

$$\sum x_{ij} x_{kl} \cdot \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i & j & k & l \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

Пример $n = 4, \ r = 2$

$$x_{12} x_{34} - x_{13} x_{24} + x_{14} x_{23} = 0.$$

В общем случае

Оператор свертки. $s \le r$

$f \in \Lambda^s V^\vee$, $x \in \Lambda^r V$

$f \lrcorner x \in \Lambda^{r-s} V$

$f \in V^\vee \qquad x \in V^r$

$r=1 \quad x \in V \qquad f \lrcorner x = f(x)$

$x = x_1 \wedge x_2$

$f \lrcorner x = (f \lrcorner x_1) \wedge x_2 + (-1)^{r_1} x_1 \wedge (f \lrcorner x_2)$

$f = f_1 \wedge \dots \wedge f_s$

$f \lrcorner x = f_1 \lrcorner (f_2 \lrcorner \dots \lrcorner (f_s \lrcorner x) \dots)$

Условие разложимости.

$x \in \Lambda^r V$ разложим $\Longleftrightarrow$

$\forall f \in \Lambda^{r-1} V^\vee$

$$\boxed{(f \lrcorner x) \wedge x = 0}$$

~~Аффинные карты в~~ грассманиане.

$G = Gr(r, V)$.

Подмногообразие Шуберта

$$\sigma_{\underbrace{1,0,\dots,0}_{r}} = \{ W \mid W \cap V_{n-r} \neq 0 \}$$

$\dim V_{n-r} = n-r$.

$$W = \langle w_1, w_2, \dots, w_r \rangle$$

Пусть V_{n-r} натянут на последние векторы базиса $\Rightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} — w_1 — \\ — w_2 — \\ \vdots \\ — w_r — \\ \hline 0 \quad 0 \;\; \mid E \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

минор $r \times r$, стоящий в левом верхнем углу $= 0$

Дополнение $U = G \setminus G_1$

= матрицы с ненулевым минором в левом верхнем углу $\Rightarrow$ с точностью до умножения на эл-т $GL_r(\mathbb{k})$ слева $W \in U$ представляется матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)$$

A $r \times (n-r)$ матрица

$\Rightarrow$ $\boxed{G \supset U \simeq \mathbb{A}^{r(n-r)}}$ как открытое в топ. Зарисского подмножество.

следствие а разумного

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim G = r(n-r)}$

G - однородное пространство относительно $GL_n(\mathbb{k})$ $\Rightarrow$ G неособо

$\boxed{G \text{ покрывается аффинными картами } U = G \setminus \sigma_1}$

<u>Утверждение</u> σ_1 — неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в G.

<u>Доказательство</u> Пересечение σ_1' с $U = G \setminus \sigma_1$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & & & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & x_{r1} & & x_{rn} \end{pmatrix}$$

т.ч. $r \times r$ минор $= 0$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & x_{11} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \\ & & 0 & x_{r1} \end{pmatrix}$$

Линейное уравнение неприводимо.

Утверждение σ_1 является гиперплоским сечением при отображении Плюккера

Доказательство.

W задается элементом $x \in \Lambda^r V$

V_{n-r} задается элементом $y \in \Lambda^{n-r} V$

$$W \cap V_{n-r} \neq \emptyset \iff x \wedge y = 0$$

Это линейное условие. $\square$

Замечание σ_1 специально (особо)

Доказательство. Все σ_1 равноправны: параметризуются $G(n-r, n)$ (однозначно задается выбором V_{n-r})

Гиперплоских сечений $\mathbb{P}(\Lambda^r V)^\vee$ (больше).