Лекция 2

$Gr(r,n) = G$

$G_1 \subset G \qquad G \setminus G_1 = U \simeq \mathbb{A}^{r(n-r)}$

$$G_1 \cdot \mathbb{Z} \to Cl(G) \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Cl(U)} \to 0$$

1) G_1 неприводимо

2) $mG_1 \neq 0 \qquad \forall m \neq 0$

иначе $\exists \ \varphi \in k(G)$

$div(\varphi) = mG_1$

<u>Вывод</u> $\quad Cl(G) = \mathbb{Z} \cdot G_1$

$$\underset{\overset{\wr\wr}{Pic(G)}}{}$$

$Cl(G) \simeq Pic(G)$.

<u>Замечание</u>

G рационально, $\quad \pi_1(G) = \{0\}$.

Вычислим канонический дивизор. ω — мером. дифф. форма ст. степени.

$$K_G = \operatorname{div}(\omega).$$

$A \in U$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{r,1} & x_{r,2} & \cdots & x_{r,n-r} \end{array}\right)$$

x_{ij} — координаты в U

$$\omega = dx_{11} \wedge \cdots \wedge dx_{r,n-r}$$

$$\operatorname{div} \omega \big|_U = 0 \implies$$

$$K_X = \operatorname{div}(\omega) = m \cdot \sigma_1.$$

Перейдём в другую аффинную карту.
(элементарное преобразование строк)
Сделаем $(r+1)$-й столбец.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ вычтем 1ую строку из всех последующих
(считаем, что $x_{11} \neq 0$).

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} x'_{11} & 0 & \dots & 0 & 1 & x'_{1,2} & \dots & & x'_{1\,n-r} \\ x'_{21} & 1 & & 0 & 0 & x'_{22} & & & x'_{2\,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x'_{r1} & 0 & & 1 & 0 & x'_{r2} & & & x'_{r,n-r} \end{array}\right)$$

$$x'_{11} = \frac{1}{x_{11}}, \quad x'_{1,2} = x_{1,2}/x_{11}, \ \dots$$

$$\dots \ x'_{1,n-r} = x_{1,n-r}/x_{11}.$$

$$x'_{21} = -\frac{x_{21}}{x_{11}} \quad \dots \quad x'_{r,1} = -\frac{x_{r,1}}{x_{11}}$$

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i1}}{x_{11}}$$

$$\omega' = dx'_{11} \wedge \cdots \wedge dx'_{r,n-r}$$

$$= \pm\, d\frac{1}{x_{11}} \wedge d\frac{x_{12}}{x_{11}} \wedge \cdots \wedge d\frac{x_{1,n-r}}{x_{11}}$$

$$\wedge\, d\frac{x_{21}}{x_{11}} \wedge \cdots \wedge d\frac{x_{r,1}}{x_{11}} \wedge$$

$$\wedge\, d\left(x_{22} - \frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \wedge \cdots \wedge \cdots$$

$$= \pm\, x_{11}^{-N} \cdot dx_{11} \wedge \cdots \wedge dx_{r,n-r}$$

$$N = 2 + (n-r-1) + r - 1 = n$$

$$\omega' = \pm\, x_{11}^{-n}\, \omega$$

$$\omega = \pm\, x'^{-n}_{11}\, \omega'$$

<u>Вывод</u>

$$\boxed{K_G = -n\sigma_1}$$

Многообразия Шуберта

Возьмем флаг

$$V_0 = 0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V$$

$$\dim V_i = i$$

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_r$$

$$\sigma_{a_1,\dots,a_r} = \{ W \mid \dim W \cap V_{n-r+i-a_i} \geqslant i \}$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{a_1,\dots,a_n} = \{ W \mid \dim W \cap V_{n-r+i-a_i} = i \}$$

открытое подмножество.

$$V^{(i)} = V_{n-r+i-a_i}$$

Размерность

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n$$

$$\dim W \cap V_{n-r+i-a_i} = i$$

$$V^{(i)} = V_{n-r+i-a_i}$$

$$V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset \dots \subset V^{(r)}$$

$w_1 \in V^{(1)}$ $\qquad n-r+1-a_1 \quad -1$

$w_2 \in V^{(2)}/V^{(1)} \cap W$ $\qquad n-r+2-a_2-1 \quad -1$

$\vdots$

$w_k \in V^{(k)}/V^{(k-1)} \cap W$ $\qquad n-r+k-a_k-k+1 \quad -1$

$\vdots$

$w_r \in V^{(r)}/V^{(r-1)} \cap W$ $\qquad n-r+r-a_r-r+1 \quad -1$

$$(n-r)\cdot r - \sum a_i$$

Вывод: $\boxed{\operatorname{codim} G_{a_1 \dots a_r} = \sum a_i}$

Пример $G(2,4)$

Прямые в $\mathbb{P}^3$

$\sigma_{1,0}$ $\quad V^{(1)} = V_2$

$V^{(2)} = V_4$

$\{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid \ell \cap \ell_0 \neq \emptyset\}$

$\sigma_{1,1}$ $\quad V^{(1)} = V_2' \quad V^{(2)} = V_3$

$\{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid \ell \subset \mathbb{P}^2\}$

$\sigma_{2,0}$ $\quad V^{(1)} = V_1 \quad V^{(2)} = V_4$

$\{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid \ell \ni p\}$

$\sigma_{2,1}$ $\quad V^{(1)} = V_1 \quad V^{(2)} = V_3$

$\{\ell \subset \mathbb{P}^3 \mid p \in \ell \subset \mathbb{P}^2\}$.

$\sigma_{2,2}$ $\quad V^{(1)} = V_1 \quad V^{(2)} = V_2$

$$\sigma_{1,1} \setminus \sigma_{2,1} = \mathbb{A}^2$$
$$\sigma_{2,0} \setminus \sigma_{2,1} = \mathbb{A}^2$$
$$\sigma_{2,1} \setminus \sigma_{22} = \mathbb{A}^1.$$

<u>Пример</u> $G(2,5)$

$$\sigma_{1,0} = \{ \ell \subset \mathbb{P}^4 \mid \ell \cap \mathbb{P}^2 \neq \emptyset \}$$
$$\sigma_{2,0} = \{ \ell \subset \mathbb{P}^4 \mid \ell \cap \mathbb{P}^1 \neq \emptyset \}$$
$$\sigma_{1,1} = \{ \ell \subset \mathbb{P}^4 \mid \ell \subset \mathbb{P}^3 \}$$
$$\sigma_{2,1} = \{ \ell \subset \mathbb{P}^4 \mid \ell \subset \mathbb{P}^3, \ell \cap \mathbb{P}^1 \neq \emptyset \}$$
$$\sigma_{3,0} = \{ \ell \subset \mathbb{P}^4 \mid \ell \ni p \}$$
$$\sigma_{2,2} = \{ \ell \subset \mathbb{P}^4 \mid \ell \subset \mathbb{P}^2 \}$$
$$\sigma_{3,1} = \{ \ell \subset \mathbb{P}^4 \mid p \in \ell \subset \mathbb{P}^3 \}$$
$$\sigma_{3,2} = \{ \ell \subset \mathbb{P}^4 \mid p \in \ell \subset \mathbb{P}^2 \}$$

Утверждение

$$\sigma^{0}_{a_1,\dots,a_n} \simeq \mathbb{C}^{(n-r)\cdot r - \sum a_i}$$

Следствие

$$\operatorname{codim} \sigma_{a_1 \dots a_n} = \sum a_i$$

Следствие.

$$H^*(G,\mathbb{Z}) = \bigoplus_{a_1 \dots a_n} \mathbb{Z}\,\sigma_{a_1 \dots a_n}$$

Примеры

$$\sigma^{\circ}_{1,1} \simeq \mathbb{C}^{2(n-3)}$$

$\sigma^{\circ}_{1,1}$ $\quad \dim W = 2$

$\dim W \cap V_{n-2} = 1$

$\dim W \cap V_{n-1} = 2$

т.е. $W \subset V_{n-1}$ $\quad Gr(2, n-1)$

$W \not\subset V_{n-2} \subset V_{n-1}$

$\Updownarrow \qquad V_{n-3} \subset V_{n-2}$

$W \cap V_{n-3} = \emptyset \qquad \sigma_1$ в $G(2, n-1)$

$\sigma^{\circ}_{2,0} \simeq \mathbb{C}^{2(n-3)} \qquad \dim W = 2$

$\dim W \cap V_{n-3} = 1$

$\dim W \cap V_{n} = 2$

$W = \langle w_1, w_2 \rangle$ V_{n-3} порождается последними векторами

$w_2 \in V_{n-3} \not\ni w_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Исчисление Шуберта

$$\sigma_{a_1, \ldots, a_r}, \quad \sigma_{b_1, \ldots, b_r}$$

$$\sum a_i + \sum b_j = (n-r)\cdot r$$

$$\sigma_{a_1, \ldots, a_r} \cdot \sigma_{b_1, \ldots, b_r} = \ ?$$

$$V^{(i)} = V_{n-r+i-a_i}$$

$$V'^{(j)} = V'_{n-r+j-b_j}$$

$$W \in \sigma_{a_1, \ldots, a_r} \cap \sigma_{b_1, \ldots, b_r} \qquad j = r-i+1$$

$$W \cap V_{n-r+i-a_i} \geqslant i$$

$$W \cap V'_{n-r+(r-i+1)-b_{r-i+1}} \geqslant r-i+1$$

$$W \cap V_{n-r+i-a_i} \cap V'_{n-r+(r-i+1)-b_{r-i+1}} \neq 0$$

$$\Rightarrow n - r + \cancel{i} - a_i + \cancel{n} - \cancel{r} + \cancel{r} - \cancel{i} + 1 - b_{r-i+1} > \cancel{n}$$

$$\Rightarrow n - r + 1 > a_i + b_{r-i+1}$$

$$n - r \geqslant a_i + b_{r-i+1}$$

$$(n-r)\cdot r \geqslant \sum a_i + \sum b_i = $$

$$= (n-r)\cdot r$$

$\Rightarrow$ Всюду равенство. т.е

$$\boxed{a_i + b_{r-i+1} = n - r}$$

Вывод.

$$\sigma_{a_1 \ldots a_r} \cdot \sigma_{b_1 \ldots b_r} = \begin{cases} 1 & a_i + b_{r-i+1} = n-r \ \ \forall i \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\boxed{Gr(2,4)}$$

$$\sigma_{1,0}\cdot\sigma_{1,0} = \alpha\,\sigma_{1,1} + \beta\,\sigma_{2,0}$$

$$\sigma_{1,0}\cdot\sigma_{1,0}\cdot\sigma_{1,1} = \alpha\,\sigma_{1,1}^2 + \beta\,\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{1,1}$$

$$\begin{array}{c} \| \\ 1 \end{array} \qquad = \alpha$$

$$\sigma_{1,1} = \{\ell\subset\mathbb{P}^3 \mid \ell\subset \mathbb{P}^2\}$$

$$\sigma_{2,0} = \{\ell\subset\mathbb{P}^3 \mid \ell\ni p\}$$

$$\sigma_{1,0} = \{\ell\subset\mathbb{P}^3 \mid \ell\cap\ell_0\neq\emptyset\}$$

$$\sigma_{1,1}\cdot\sigma_{1,0}\cdot\sigma_{1,0} = 1$$

$$\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{1,0}\cdot\sigma_{1,0} = 1$$

$$\Longrightarrow \sigma_{1,0}\cdot\sigma_{1,0} = \sigma_{1,1}+\sigma_{2,0}$$

$$\sigma_{1,0}^4 = (\sigma_{1,1}+\sigma_{2,0})^2 = 2.$$

$\square$

Пример $G(2,5)$

$$\sigma_{1,0}^2 = \alpha\, \sigma_{2,0} + \beta\, \sigma_{1,1}.$$

$$\sigma_{1,0}^2 \cdot \sigma_{3,1} = 1 \qquad \sigma_{1,0}^2 \cdot \sigma_{2,2} = 1$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,0}^2 = \sigma_{2,0} + \sigma_{1,1}.$$

$$\sigma_{1,0} \cdot \sigma_{2,0} = \alpha\, \sigma_{3,0} + \beta\, \sigma_{2,1}$$

$$\sigma_{1,0} \cdot \sigma_{3,0} = 1, \quad \sigma_{1,0}^2 \cdot \sigma_{2,1} = 1$$

Лемма. $X \subset \mathbb{P}^n$ - неособая гиперповерхность степени $d \geq 2$ $\Rightarrow$ X не содержит линейных подпространств размерности $> \frac{1}{2} \dim X$.

Доказательство. Пусть содержит

$x_0, \dots, x_n$ - однородные координаты в $\mathbb{P}^n$

$x_0 = x_1 = \dots = x_m = 0$ - уравнения подпространства

$\mathbb{P}^{n-m-1} \subset X \Rightarrow$

уравнение X имеет вид

$$\phi = x_0 \cdot \phi_0 + \dots + x_m \cdot \phi_m = 0$$

$$\phi \in I = (x_0, \dots, x_m)$$

Градиент. в точках $\in \mathbb{P}^{n-m-1}$

$$\begin{cases} \Phi_0 = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m = 0 \end{cases}$$

Система имеет решение, если $m+1 \leq n-m-1$

$2m+1 \leq n-1 = \dim X$

Т.е. тогда гиперповерхность будет особой.

Следствие. Невырожденная квадрика $Q \subset \mathbb{P}^n$ не содержит линейных подпространств размерности $> \frac{\dim Q}{2}$