

Спецкурс

Классическая алгебраическая геометрия

Весна 2023 г.

Задачи

- (1) В каких случаях образ отображения Веронезе $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ является полным пересечением?
- (2) В каких случаях образ отображения Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ является полным пересечением?
- (3) Докажите, что любая кривая степени 3 в \mathbb{P}^3 , не лежащая в плоскости, является образом отображения Веронезе $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$.
- (4) Докажите, что квадрики, задающие грассманиан $\text{Gr}(2, n) \subset \mathbb{P}^{n(n-1)/2}$, – пфаффианы миноров некоторой кососимметрической матрицы. Какой?
- (5) Пусть $C = C_4 \subset \mathbb{P}^4$ – рациональная нормальная кривая степени 4 (образ отображения Веронезе $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$). Пусть $F \subset \mathbb{P}^4$ – объединение всех касательных к C , а $V \subset \mathbb{P}^4$ – замыкание объединения всех 2-секущих. Задайте F и V уравнениями.
- (6) Пусть $S = S_4 \subset \mathbb{P}^5$ – поверхность Веронезе и пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ – замыкание объединения всех ее 2-секущих. Докажите, что V – гиперповерхность. Выпишите ее уравнение.
- (7) Докажите, что общее полное пересечение квадрики и кубики в \mathbb{P}^4 не содержит прямых.
- (8) Докажите, что общая кватрика в \mathbb{P}^3 не содержит прямых.
- (9) Докажите, что общее полное пересечение трех квадратик в \mathbb{P}^5 не содержит прямых.
- (10) Когда грассманиан $\text{Gr}(k, n)$ изоморфен полному пересечению (в некотором проективном пространстве \mathbb{P}^N)?
- (11) Докажите, что семейство прямых на неособой трехмерной квадратике $Q \subset \mathbb{P}^4$ параметризуется проективным пространством \mathbb{P}^3 .
- (12) Опишите компоненту схемы Гильберта, параметризующую прямые в грассманиане $\text{Gr}(2, n)$ (с обоснованием).
- (13) Докажите, что любая 2-плоскость в грассманиане $\text{Gr}(2, n)$ является многообразием Шуберта типа $\sigma_{n-2, n-4}$ или $\sigma_{n-3, n-3}$.

- (14) Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ – неособая кривая степени d и рода g . Вычислите класс семейства 2-секущих в когомологиях грассманиана $\text{Gr}(2, 4)$.
- (15) Пусть $C = C_n \subset \mathbb{P}^n$ – рациональная нормальная кривая степени n . Вычислите класс семейства 2-секущих в когомологиях грассманиана $\text{Gr}(2, n + 1)$.
- (16) Пусть $V = \mathbb{C}^5$. Докажите, что группа $GL(V)$ имеет ровно две орбиты на $\mathbb{P}(\wedge^2 V)$. Этим орбитам соответствуют два типа гиперплоских сечений грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$. Каких?
- (17) Пусть $l_1, l_2 \subset \mathbb{P}^3$ – скрещивающиеся прямые. Как устроено подмногообразие $Z \subset \text{Gr}(2, 4)$, образованное классами прямых, пересекающих l_1 и l_2 ?
- (18) Как устроено подмногообразие $Z \subset \text{Gr}(2, 4)$, образованное классами прямых, лежащих на невырожденной квадрике $Q \subset \mathbb{P}^3$?
- (19) Пусть $l_1, l_2 \subset \mathbb{P}^n$ – пара прямых. Как характеризуется непустота $l_1 \cap l_2$ в терминах соответствующих точек на грассманиане $\text{Gr}(2, n + 1)$?
- (20) Опишите линейные подмногообразия максимальной размерности в грассманиане $\text{Gr}(2, n)$.
- (21) Пусть $V = \mathbb{C}^5$ и пусть $V_1 \subset V$ – фиксированное одномерное подпространство. Линейное отображение $V \rightarrow V/V_1$ индуцирует рациональное отображение $\text{Gr}(2, 5) \dashrightarrow \text{Gr}(2, 4)$. Опишите множество неопределенности и слои этого отображения.
- (22) Вычислите сколько прямых пересекают 4 коники в \mathbb{P}^3 в общем положении.
- (23) Пусть $G := \text{Gr}(2, n) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^n)$ и пусть $C \subset G$ – рациональная нормальная кривая. Какую поверхность замечают прямые в $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, соответствующие точкам C ?
- (24) Вычислите когомологии $H^i(X, \mathbb{Z})$ неособой кубической гиперповерхности $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$.
- (25) Вычислите когомологии $H^i(X, \mathbb{Z})$ неособой гиперповерхности $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ степени 4.
- (26) Вычислите когомологии $H^i(X, \mathbb{Z})$ для неособого полного пересечения квадрики и кубики $X = X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$.
- (27) Вычислите когомологии $H^i(X, \mathbb{Z})$ для неособого полного пересечения двух кубик $X = X_{3,3} \subset \mathbb{P}^5$.
- (28) Пусть $X = X_8 \subset \mathbb{P}^6$ – неособое пересечение трех квадрик. Вычислите $H^3(X, \mathbb{Z})$.
- (29) Вычислите ранг группы $H^2(X, \mathbb{Z})$ для неособой квинтики $X = X_5 \subset \mathbb{P}^3$.

- (30) Выпишите уравнение многообразия $\Delta_1 \subset \mathbb{P}(S^2\mathbb{C}^3)$ особых коник. Покажите, что оно особо вдоль Δ_2 .
- (31) Могут ли все коники в пучке плоских коник быть вырожденными?
- (32) Докажите следующие утверждения.
- (a) Через 5 различных точек на \mathbb{P}^2 проходит по крайней мере одна коника.
 - (b) Если никакие 4 из этих точек не коллинеарны, то эта коника единственна.
 - (c) Если никакие 3 из этих точек не коллинеарны, то эта коника невырождена.
- (33) Докажите что, для любой пятерки прямых $l_1, \dots, l_5 \subset \mathbb{P}^2$, никакие 3 из которых не проходят через одну точку, существует единственная коника, касающаяся l_1, \dots, l_5 .
- (34) Сколько вырожденных элементов может быть в пучке плоских коник?
- (35) Сколько общих касательных могут иметь две невырожденные плоские коники?
- (36) Опишите многообразие $\Sigma(2, 6)$ в терминах плюккеровой квадрики $\text{Gr}(2, 4)$.
- (37) Чему равен знак определителя формы пересечения на $H^n(Q, \mathbb{Z})$ для неособой четномерной квадрики $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$?
- (38) Докажите, что любое линейное подмногообразие в неособой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ содержится в максимальном линейном подмногообразии (размерности $[n/2]$).
- (39) Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ неособая кривая степени d и рода g . Пусть $F \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность, заметаемая касательными прямыми к C . Вычислите степень F .
- (40) Пусть $C = C_d \subset \mathbb{P}^d$ – рациональная нормальная кривая (образ d -кратного вложения Веронезе \mathbb{P}^1). Пусть $F \subset \mathbb{P}^d$ – поверхность, заметаемая касательными прямыми к C . Вычислите степень F .
- (41) Сколько прямых проходит через общую точку на пересечении двух квадрик $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^5$?
- (42) Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – неособая гиперповерхность и пусть $Y = X \cap \mathbb{P}^{N-1}$ – ее гиперплоское сечение. Докажите, что Y или неособо или имеет лишь изолированные особенности.
- (43) Пусть $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^3$ – неприводимое особое пересечение двух квадрик. Приведите уравнения этих квадрик и каноническому виду.

- (44) Каким подмногообразием в грассманиане $\text{Gr}(2, 4)$ параметризуются 2-секущие кривой X , где $X \subset \mathbb{P}^3$ – пересечение двух квадрик?
- (45) Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ – эллиптическая кривая в форме Вейерштрасса. Представьте ее в виде пересечения двух квадрик.
- (46) Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ – неособое пересечение двух квадрик. Пусть $L \subset \mathbb{P}^3$ – прямая, не пересекающая C . Докажите, что 2-секущие C , пересекающие L параметризуются кривой \tilde{C} , двулистно накрывающей C . Найдите точки ветвления. Найдите род \tilde{C} .
- (47) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ – неособое полное пересечение двух квадрик. Опишите многообразие параметризующее коники на X . Докажите, что это многообразие четырехмерно.
- (48) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^{n+2}$ – неособое полное пересечение двух квадрик и пусть $\psi : X \dashrightarrow X' \subset \mathbb{P}^{n+1}$ – проекция из точки $P \in X$. Докажите, что образ $X' = \psi(X)$ не может быть конусом.
- (49) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ – неособое полное пересечение двух квадрик. Докажите, что через общую (лежащую в некотором непустом открытом по Зарисскому множестве) проходят ровно 4 прямые.
- (50) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^{n+2}$ – неособое полное пересечение двух квадрик. Найдите все возможности для образа $\text{Aut}(X)$ в $\text{Aut}(X)/\Gamma$ (Γ – канонически определенная подгруппа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+2}$ в $\text{Aut}(X)$).
- (51) Пусть $X = Y_1 \cap \dots \cap Y_k \subset \mathbb{P}^N$ – неособое полное пересечение коразмерности k (размерности $n := N - k \geq 3$). Докажите, что X не содержит $(n - 1)$ -мерных конусов.
- (52) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ – неособое полное пересечение двух квадрик и пусть $Y = X \cap \mathbb{P}^5$ – гиперплоское сечение. Докажите, что Y имеет лишь изолированные особенности.
- (53) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ – неособое полное пересечение двух квадрик и пусть $C \subset X$ невырожденная коника. Докажите что существует неособое гиперплоское сечение, проходящее через C . Найдите возможности для нормального пучка \mathcal{C} в X .
- (54) Вычислите нормальное расслоение прямой в неособой трехмерной квадрике.
- (55) Пусть X – поверхность дель Педро степени 4. Докажите, что X можно представить в виде двулистного покрытия $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с ветвлением в дивизоре $B \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

бистепени $(2, 2)$. Как это связано с проективной моделью $X = Q_1 \times Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ поверхности X ? Сколько существует таких различных представлений? Чем являются образы прямых на X при этом двулистом накрытии?

- (56) Докажите, что образ группы автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ поверхности дель Пеццо X степени 4 в группе $\text{Aut}(\text{Pic}(X))$ содержится в группе Вейля $W(D_5)$.
- (57) Докажите, что группа Вейля $W(D_5)$ транзитивно действует на множестве прямых и на множестве корней.
- (58) Докажите, что никакой корень в $K_X^\perp \subset \text{Pic}(X)$ на поверхности дель Пеццо степени и не может быть представлен эффективным дивизором.
- (59) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 4. Может ли группа $\text{Aut}(X)/\Gamma$ быть изоморфной S_5 ? Какие есть возможности для этой группы?
- (60) Сколько коник проходит через точку на поверхности дель Пеццо степени 4?
- (61) Докажите, что пучки коник на поверхности дель Пеццо X степени 4 распадаются на пары $|C_i|, |C_j|$ так, что $C_i + C_j \sim -K_X$. Существует ли автоморфизм X , который переставляет все пучки в таких парах?
- (62) Пусть поверхность дель Пеццо X задана уравнениями

$$\begin{cases} \sum x_i^2 = 0, \\ \sum \lambda_i x_i^2 = 0, \end{cases}$$

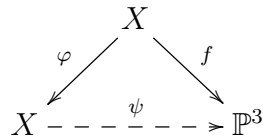
Рассмотрим кривую C , высекаемую на X уравнением

$$\sum \lambda_i^2 x_i^2 = 0$$

Докажите, что C – неособая каноническая кривая рода 5, допускающая действия группы $\Gamma \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.

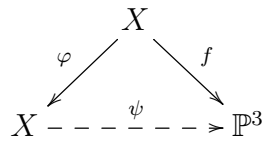
- (63) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – неособая кубика. Докажите, что X содержит двумерное семейство прямых. Какое может быть нормальное расслоение прямой в X ?
- (64) Пусть $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$ – неособое полное пересечение трех квадратов. Докажите, что X содержит прямую. *Указание.* Воспользуйтесь исчислением Шуберта.
- (65) Пусть $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$ – неособое полное пересечение трех квадратов. Докажите, что X содержит одномерное семейство прямых. *Указание.* Найдите возможности для нормального пучка и воспользуйтесь теорией деформации.

- (66) Докажите, что абелева поверхность не может быть полным пересечением в проективном пространстве.
- (67) Перечислите все полные пересечения в проективном пространстве, являющиеся поверхностями типа КЗ.
- (68) Перечислите все полные пересечения в грассманианах, являющиеся поверхностями типа КЗ.
- (69) Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ неособое n -мерное многообразие. и пусть $L \subset X$ – линейное подмногообразие размерности k , где $2k < n$. Докажите, что через L можно провести неособое гиперплоское сечение.
- (70) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^{n+2}$ – неособое полное пересечение двух квадратик. Найдите все возможности для нормального расслоения $\mathcal{N}_{L/X}$ прямой на X .
- (71) Пусть C – кривая рода g и пусть $S = S^2(C)$. Вычислите
 (а) топологическую эйлерову характеристику $\chi_{\text{top}}(S)$;
 (б) K_S^2 ;
 (с) индекс самопересечения образа диагонали D^2 ;
 (д) $\chi(\mathcal{O}_X)$.
- (72) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ – неособое полное пересечение двух квадратик, пусть $L \subset X$ – прямая. Рассмотрим бирациональное преобразование связанное с проекций из L :



Какой линейной системой задается отображение ψ^{-1} ?

- (73) Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ – неособая кривая степени 5 и рода 2. Докажите, что она содержится в единственной квадратике $Q^\bullet \subset \mathbb{P}^3$.
- (74) Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ – неособое полное пересечение двух квадратик, пусть $L \subset X$ – прямая и пусть



бирациональное преобразование связанное с проекций из L . (задача 72). Пусть $Q^\bullet \subset \mathbb{P}^3$ – квадратика, проходящая через кривую C (задача 73). Докажите, что квадратика Q неособа \iff прямая $L \subset X$ имеет тип (а).

- (75) Докажите, что канонический образ кривой рода 5 не является пересечением трех квадратик тогда и только тогда, когда

кривая гиперэллиптическая или тригональна. Что высекают квадратики, проходящие через каноническую тригональную кривую рода 5?

- (76) Докажите, что общая кривая рода 5 не имеет автоморфизмов. Каков максимальный порядок группы автоморфизмов кривой рода 5 в гиперэллиптическом, тригональном, и общем случае?
- (77) Приведите пример двумерного простого комплексного тора, т. е. тора не имеющего нетривиальных комплексных подторов.
- (78) Докажите, что любая абелева поверхность имеет не более чем счетное число абелевых подмногообразий.
- (79) Пусть A – простое абелево многообразие, т. е. A не имеет нетривиальных абелевых подмногообразий. Докажите, что любой эффективный дивизор является обильным.