Автоморфизмы алгебраических многообразий

Список задач

Автоморфизмы кривых.

(1-a) ^{2} Покажите, что группа автоморфизмов общей кривой рода $g = 2$ равна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2-a) ^{2} Покажите, что группа автоморфизмов общей кривой рода $g = 3$ тривиальна.

(3-a) ^{2} Покажите, что группа автоморфизмов общей кривой рода $g = 4$ тривиальна.

(4-a) ^{2} Может ли кривая рода 3 иметь автоморфизм порядка 5?

(5-a) ^{3} Может ли группа автоморфизмов кривой рода 10 быть изоморфной $\mathfrak{S}_6$?

(6-a) ^{3} Докажите, что оценка Гурвица не достигается в случае кривых рода 2. Каков может быть порядок группы автоморфизмов в этом случае?

(7-a) ^{4} Докажите, что оценка Гурвица не достигается в случае кривых рода 4.

(8-a) ^{4} Докажите, что оценка Гурвица не достигается в случае кривых рода 5.

(9-a) ^{2} Докажите, что оценка Гурвица не может достигаться для циклической группы $\mathrm{Aut}(X)$.

Общие факты об автоморфизмах поверхностей.

(10-a) ^{5} Пусть C – кривая рода 2. Найдите минимальную модель для симметрического квадрата S^2C.

(11-a) ^{2} Докажите, что неособая поверхность $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 4$ может содержать лишь конечное число прямых.

(12-a) ^{1} Докажите, что неособая поверхность $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 4$ не содержит (-1)-кривых.

(13-a) ^{1} Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – неособая поверхность степени $d \geq 3$, $d \neq 4$. Докажите, что $\mathrm{Aut}(X) \subset PGL(4)$.

(14-a) ^{2} Докажите, что на нерациональной поверхности число (-1)-кривых конечно.

(15-a) ^{5} Пусть X – линейчатая поверхность над эллиптической кривой E. Предположим, что на X также имеется структура эллиптического расслоения. Докажите, что $X \simeq (E \times \mathbb{P}^1)/G$, где G – группа, действующая сдвигами на E.

(16-a) ^{5} Пусть X – поверхность с $\dim \mathrm{Aut}(X) > 2$. Докажите, что X линейчатая.

K3 поверхности.

(17-a) [2] Пусть $K3$-поверхность X представляется в виде двулистного накрытия (минимальной) линейчатой поверхности Y: $\pi\colon X \to Y$.

(a) Докажите, что Y рациональна (т.е. $Y \simeq \mathbb{F}_n$).

(b) Найдите все возможности для n и дивизора ветвления.

(18-a) [2] Пусть $K3$ поверхность X и пусть $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$ – автоморфизм порядка 2. Предположим, что фактор $Y = X/\langle\sigma\rangle$ неособ. Каков может быть бирациональный тип Y? Приведите примеры.

(19-a) [2] Перечислите все поверхности типа K3, являющиеся полными пересечениями в произведениях проективных пространств $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^M$ гиперповерхностей положительных бистепеней.

(20-a) [3] Пусть $X \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ – общее пересечение четырех дивизоров бистепени $(1,1)$. Имеет ли эта K3 поверхность эллиптический пучок? Содержит ли она (-2)-кривые? Опишите конус Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

(21-a) [3] Пусть $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ – общее пересечение дивизоров бистепеней $(1,2)$, $(1,1)$, $(1,1)$. Конечна ли группа $\mathrm{Aut}(X)$? Опишите конус Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

(22-a) [3] Пусть $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ – общий дивизор бистепени $(3,2)$. Конечна ли группа $\mathrm{Aut}(X)$? Опишите конус Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

(23-a) [3] Пусть $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ – общее пересечение дивизоров бистепеней $(1,2)$, $(2,1)$. Конечна ли группа $\mathrm{Aut}(X)$? Опишите конус Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

(24-a) [3] Пусть $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ – общее пересечение дивизоров бистепеней $(1,1)$, $(1,3)$. Конечна ли группа $\mathrm{Aut}(X)$? Опишите конус Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

(25-a) [3] Пусть $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ – общее пересечение дивизоров бистепеней $(1,2)$, $(1,2)$. Конечна ли группа $\mathrm{Aut}(X)$? Опишите конус Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

(26-a) [2] Найдите коразмерность семейства квартик в $\mathbb{P}^3$, содержащих прямую (конику) в пространстве всех квартик.

(27-a) [4] Пусть X – поверхность типа K3 и пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – конечная подгруппа, содержащая несимплектический автоморфизм. Докажите, что фактор X/G или рационален или бирационально эквивалентен поверхности Энриквеса. Чем различаются эти случаи?

(28-a) [2] Может ли группа автоморфизмов K3 поверхности быть изоморфной симметрической группе S_{11}?

(29-a) [3] Опишите группу проективных симплектических автоморфизмов квартики Ферма.

(30-a) [2] Оцените сверху порядок конечной циклической группы автоморфизмов поверхности типа K3 (не требуется точная оценка).

(31-a) [4] Пусть X – поверхность типа K3. Предположим, что группа $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ вкладывается в $\mathrm{Aut}^{\mathrm{s}}(X)$, где p – простое ≥ 5. Какое максимальное значение может принимать r?

(32-a) [4] Пусть X – поверхность типа K3. Предположим, что группа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^r$ вкладывается в $\mathrm{Aut}^{\mathrm{s}}(X)$. Какое максимальное значение может принимать r?

(33-a) [4] Пусть X – поверхность типа K3. Предположим, что группа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ вкладывается в $\mathrm{Aut}^{\mathrm{s}}(X)$. Какое максимальное значение может принимать r?

(34-a) [5] Пусть X – поверхность типа K3 с $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$. Докажите, что если $H^2 > 2$, то $\mathrm{Aut}(X)$ тривиальна. *Указание.* Сначала покажите, что $\mathrm{Aut}^{\mathrm{s}}(X) = \{1\}$. Затем исследуйте действие несимплектического автоморфизма на T_X и покажите, что его порядок ≤ 2.

(35-a) [5] Пусть X – поверхность типа K3 с $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$. Докажите, что если $H^2 = 2$, то $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Указание.* Сначала покажите, что $\mathrm{Aut}^{\mathrm{s}}(X) = \{1\}$. Затем исследуйте действие несимплектического автоморфизма на T_X и покажите, что его порядок ≤ 2.

(36-a) [3] Какие возможности есть для действия симплектического автоморфизма $g \in \mathrm{Aut}(X)$ порядка 2 на решетке $H^2(X, \mathbb{Z})$.

(37-a) [4] Докажите, что симплектический автоморфизм поверхности типа K3 не может имеет порядок 10.

(38-a) [1] Предположим, что группа Пикара поверхности типа K3 порождена (-2)-кривыми и число таких кривых конечно. Докажите, что $\mathrm{Aut}(X)$ конечна.

(39-a) [0] Пусть K3 поверхность X является разветвленным накрытием $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Покажите, что X имеет два эллиптических пучка и опишите вырожденные слои.

(40-a) [1] Пусть $\tau \in \mathrm{Aut}(X)$ – инволюция, действующая на поверхности X типа K3 так, что имеется лишь конечное число неподвижных точек. Каков бирациональный тип фактор-поверхности X/τ? Сколько имеется неподвижных точек?

(41-a) [2] Постройте пример $K3$-поверхности с числом Пикара $\rho = 20$ (с обоснованием!).

Поверхности Энриквеса.

(42-a) [2] Пусть X поверхность Энриквеса и пусть $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$ – автоморфизм порядка 2. Докажите, что факторповерхность $Y = X/\sigma$ особа.

(43-a) [4] Пусть X поверхность Энриквеса и пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – конечная подгруппа. Докажите, что X/G или рациональна или бирациональна поверхности Энриквеса.

(44-a) [4] Пусть X поверхность Энриквеса и пусть H – обильный дивизор на X с $H^2 = 2$. Докажите, что линейная система $|H|$ не имеет неподвижных компонент.

(45-a) [2] Пусть X поверхность Энриквеса и пусть $|2F_1|$ и $|2F_2|$ – эллиптические пучки на X такие, что $F_1 \cdot F_2 = 1$. Предположим, что все слои пучка $|2F_1|$ неприводимы. Докажите, что дивизор $E_1 + E_2$ обилен.

(46-a) [3] Пусть X поверхность Энриквеса и пусть H – обильный дивизор на X с $H^2 = 2$. Предположим, что линейная система $|H|$ не имеет неподвижных компонент (см. задачу (44-a)). Докажите, что общий элемент $H \in |H|$ неприводим и неособ. Имеет ли линейная система $|H|$ базисные точки?

(47-a) [1] Пусть X поверхность Энриквеса и пусть H – обильный дивизор на X с $H^2 = 4$. Докажите, что линейная система $|H|$ имеет базисные точки.

(48-a) [3] Пусть X поверхность Энриквеса и пусть H – обильный дивизор на X с $H^2 = 4$. Докажите, что линейная система $|H|$ не имеет неподвижных компонент.

(49-a) [1] Может ли группа автоморфизмов поверхности Энриквеса содержать элемент порядка 23?

(50-a) [2] Может ли группа автоморфизмов поверхности Энриквеса быть изоморфной симметрической группе S_{13}?

(Би)эллиптические поверхности.

(51-a) [1] Пусть $f : X \to B$ – минимальная эллиптическая поверхность. Предположим, что X рациональна. Какие значения может принимать $\rho(X)$?

(52-a) [1] Пусть $f : X \to B$ – эллиптическая поверхность над кривой рода ≥ 2. Докажите, что $\kappa(X) = 1$.

(53-a) [1] Пусть $f : X \to B$ – эллиптическая поверхность над кривой рода ≥ 2. Докажите, что $p_g(X) > 0$.

(54-a) [1] Пусть $X = (E \times B)/G$ – биэллиптическая поверхность. Используя формулу для канонического дивизора, докажите, что $nK_X \sim 0$ для $n = 2, 3, 4$ или 6.

(55-a) [2] Пусть X – эллиптическая поверхность с $\kappa(X) = 1$. Докажите, что $H^0(X, nK_X) \neq 0$ для $n = 2, 3, 4$ или 6.

(56-a) [3] Пусть $X = (E \times B)/G$ – биэллиптическая поверхность. Докажите, что $\mathrm{Aut}(X)$ одномерна.

(57-a) [5] Пусть $X = (E \times B)/G$ – биэллиптическая поверхность. Докажите, что морфизмы $X \to E/G = E'$ и $X \to B/G = \mathbb{P}^1$ эквивариантны относительно $\mathrm{Aut}(X)$.

(58-a) [5] Пусть $X = (E \times B)/G$ – биэллиптическая поверхность. Докажите, что $\mathrm{Aut}(X)/\mathrm{Aut}^0(X)$ конечна.

(59-a) [5] Пусть $X = (E \times B)/G$ – биэллиптическая поверхность, где G – группа порядка 2. Опишите группу $\mathrm{Aut}(X)$.

(60-a) [5] Рассмотрим факторповерхность $X = (E \times B)/G$, где E – эллиптическая кривая, B – кривая рода g, а G – группа, действующая на E сдвигами. При каких условиях $\kappa(X) = 1$? (Можно считать, что действие точное на E и B).

Абелевы поверхности.

(61-a) [3] Пусть X – абелева поверхность и пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – конечная подгруппа. Каков может быть бирациональный тип X/G?

(62-a) [1] Приведите примеры абелевых поверхностей с бесконечной группой $\mathrm{Aut}(X)/\mathrm{Aut}(X)_0$.

(63-a) [3] Пусть X – абелева поверхность и пусть $g \in \mathrm{Aut}(X)$ – элемент простого порядка p, имеющий неподвижную точку. Какие значения может принимать p?

Поверхности общего типа.

(64-a) [1] Показать, что число Пикара минимальных поверхностей общего типа не ограничено (привести пример и обосновать).

(65-a) [1] Пусть X – поверхность общего типа. Докажите, что X не может содержать семейства эллиптических кривых.

(66-a) [4] Пусть X – минимальная поверхность общего типа. Докажите, что все (-2)-кривые линейно независимы в $N^1(X) = (\mathrm{Pic}(X)/\equiv) \otimes \mathbb{R}$ (в частности, их число не превосходит $\rho(X)$.