

---

# Автоморфизмы алгебраических многообразий

---

**Ю. Г. Прохоров**

*НОЦ МИАН, осенний семестр 2014 г.*

preliminary version

Mon Nov 2 10:42:14 MSK 2015

29 мая 2017 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Предварительные сведения.	2
2. Автоморфизмы алгебраических многообразий	2
3. Автоморфизмы кривых	6
4. Автоморфизмы абелевых многообразий	10
5. Абелевы поверхности	13
6. Поверхности типа $K3$	14
7. Дивизоры на поверхностях типа $K3$	17
8. Действие группы автоморфизмов на когомологиях	20
9. Конечные группы автоморфизмов	22
10. Автоморфизмы поверхностей типа $K3$ с $\rho(X) = 2$	24
11. Простейшие особенности поверхностей	29
12. Куммеровы поверхности	32
13. Эллиптические пучки	34
14. Группа Морделла-Вейля	37
15. Минимальные модели	38
16. Эллиптические пучки на поверхностях типа $K3$	41
17. Классификация алгебраических поверхностей	45
18. Биэллиптические поверхности	46
19. Поверхности Энриквеса	48
20. Решетка Пикара поверхности Энриквеса	53
21. Дивизоры на поверхностях Энриквеса	55
22. Эллиптические пучки на поверхностях Энриквеса	56
23. Автоморфизмы поверхностей Энриквеса	63
24. Автоморфизмы поверхностей с $\kappa = 1$	65
25. Автоморфизмы поверхностей общего типа	68
Список литературы	70

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Все многообразия считаются проективными алгебраическими и определенными над полем  $\mathbb{C}$ .

**1.1. Обозначения.** • Если  $A$  – абелева группа, то через  $A_t$  будет обозначаться подгруппа кручения, а через  $A_f$  ее свободная часть  $A/A_t$

- $q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$  – иррегулярность многообразия  $X$ ,
- $p_g(X) = \dim H^0(X, \omega_X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X))$  – геометрический род многообразия  $X$ ,
- $NS(X)$  – группа Нерона-Севери многообразия  $X$  (см. [1, гл. II, зам. 6. 10. 3, гл. V, упр. 1. 6]).
- $N^1(X) = \text{Div}(X)/\cong \otimes \mathbb{R}$ .
- $KP(X) := \{\mathbf{x} \in N^1(X) \mid \mathbf{x}^2 \geq 0\}$ .

Ясно, что  $KP(X) \setminus \{0\}$  имеет две компоненты связности:

$$(1) \quad KP(X) = KP^+(X) \cup KP^-(X), \quad KP^-(X) = -KP^+(X).$$

Выберем индексацию так, чтобы компонента  $KP^+(X)$  содержала обильный класс.

**1.2. Теорема об индексе Тома-Хирцебруха** [2, гл. 2, §8].

*Пусть  $X$  – компактная комплексная поверхность. Обозначим через  $b^+(X)$  и  $b^-(X)$  положительный и отрицательный индексы инерции формы пересечения на  $H^2(X, \mathbb{R})$  (таким образом,  $b^+(X) + b^-(X) = b_2(X)$ ). Тогда*

$$(2) \quad b^+(X) - b^-(X) = \frac{1}{3}p_1(X) = \frac{1}{3}(\omega_X^2 - 2Eu(X)),$$

где  $p_1(X)$  – первое число Понтрягина  $X$ .

**1.3. Теорема Нетера-Лефшеца** (см. [3]). *Пусть  $V$  – неособое трехмерное проективное алгебраическое многообразие. Тогда для того чтобы на его “общем” гиперплоском сечении  $X$  отображение  $\text{Pic}(V) \rightarrow \text{Pic}(X)$  было сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:*

- (i)  $b_2(V) = b_2(X)$ ;
- (ii)  $h^{2,0}(V) < h^{2,0}(X)$ .

## 2. АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

**2.1. Предложение.** *Пусть  $X$  – проективное алгебраическое многообразие и пусть  $[H] \in \text{Pic}(X)$  – обильный класс. Пусть*

$\text{Aut}_H(X) \subset \text{Aut}(X)$  стабилизатор  $[H]$  при естественном действии  $\text{Aut}(X)$  на  $\text{Pic}(X)$ :

$$g : D \longmapsto g^* D.$$

Тогда группа  $\text{Aut}_H(X)$  индуцирована проективными автоморфизмами при вложении  $\Phi_{|nH|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ ,  $n \gg 0$ . В частности,  $\text{Aut}_H(X)$  – линейная алгебраическая группа.

**2.2. Наблюдение.** Пусть  $X$  – проективное алгебраическое многообразие и пусть  $D$  – дивизор Картье на  $X$ . Пусть  $G \subset \text{Aut}(X)$  – некоторая подгруппа, сохраняющая класс  $[D] \in \text{Pic}(X)$  при естественном действии  $\text{Aut}(X)$  на  $\text{Pic}(X)$ :

$$g : L \longmapsto g^* L.$$

Предположим, что  $|D| \neq \emptyset$ . Тогда рациональное отображение  $\Phi_{|D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$  является  $G$ -эквивариантным.

**2.3.** Пусть  $X$  – проективное алгебраическое многообразие. Группа  $\text{Aut}(X)$  имеет структуру локальной алгебраической группы с конечным или счетным числом компонент, т. е. существует нормальная подгруппа  $\text{Aut}(X)_0 \subset \text{Aut}(X)$  такая, что

- (i)  $\text{Aut}(X)_0$  – связная алгебраическая группа,
- (ii)  $\text{Aut}(X)/\text{Aut}(X)_0$  – конечная или счетная группа,

(комплексный аналог этого факта можно найти напр. в [4, гл. 3, §1]). Согласно структурной теореме Шевалле о строении алгебраических групп [5, Th. 16] существует нормальная связная линейная алгебраическая подгруппа  $N \subset \text{Aut}(X)_0$  такая, что  $\text{Aut}(X)_0/N$  – абелево многообразие.

**2.4. Теорема.** Пусть  $X$  – (необязательно неприводимое) алгебраическое многообразие и пусть  $G \subset \text{Aut}(X)$  – конечная подгруппа. Пусть  $P \in X$  неподвижная точка для  $G$ . Тогда естественное действие  $G$  в касательном пространстве  $T_{P,X}$  является точным.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть  $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_{P,X}$  – максимальный идеал локального кольца  $\mathcal{O}_{P,X}$ . Мы утверждаем, что точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\nu} \mathfrak{m} \xrightarrow{\varsigma} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow 1$$

$G$ -модулей расщепляется. Действительно, возьмем элементы  $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$  такие, что их образы  $\varsigma(f_i)$  порождают  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  и рассмотрим векторное пространство  $W \subset \mathfrak{m}$ , порожденное всеми  $g \cdot f_i$ ,  $g \in G$ . Это пространство конечномерно и инвариантно, поэтому  $\mathfrak{m}^2 \cap W$  выделяется в нем прямым слагаемым:  $W = V \oplus \mathfrak{m}^2$  (как  $G$ -модуль). Тогда ограничение  $\varsigma|_V : V \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  – изоморфизм и

$$(3) \quad \mathfrak{m} = V \oplus \mathfrak{m}^2.$$

Ясно, что  $T_{P,X} = V^\vee$  и поэтому действие  $G$  на  $V$  не является точным. Пусть  $G_0$  – ядро этого действия  $G$  и пусть  $V^d \subset \mathfrak{m}$  – подпространство, порожденное всевозможными произведениями элементов  $V$  в количестве  $\leq d$ . Мы утверждаем, что

$$(4) \quad \mathfrak{m}^d = V^d + \mathfrak{m}^{d+1}.$$

Докажем это утверждение индукцией по  $d$ . При  $d = 1$  оно совпадает с (3). Предположим, что утверждение верно для  $d$ . Возьмем любой элемент  $f \in \mathfrak{m}^{d+1}$ . Тогда он представляется в виде

$$f = \sum f_i w_i, \quad f_i \in \mathfrak{m}^d, \quad w_i \in \mathfrak{m}.$$

Согласно (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} f_i &= s_i + h_i, & s_i &\in V^d, & h_i &\in \mathfrak{m}^{d+1}, \\ w_i &= u_i + v_i, & u_i &\in V, & v_i &\in \mathfrak{m}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$f = \sum (s_i + h_i)(u_i + v_i) = \sum s_i u_i + \sum (s_i v_i + h_i u_i + h_i v_i) \in V^{d+1} + \mathfrak{m}^{d+2}.$$

Это и доказывает (4).

Следовательно, ограничение на  $V^d$  естественного отображения

$$\mathfrak{m}^d \rightarrow \mathfrak{m}^d/\mathfrak{m}^{d+1}$$

сюръективно. Поэтому  $G_0$  действует тривиально на  $\mathfrak{m}^d/\mathfrak{m}^{d+1}$  для любого  $d$ .

Возьмем любой элемент  $f \in \mathfrak{m}$ . Согласно сказанному выше,  $f - g \cdot f \in \mathfrak{m}^{d+1}$  для любого  $g \in G_0$  и любого  $d > 0$ . С другой стороны,  $\bigcap \mathfrak{m}^d = 0$  (см., напр., [6, следствие 10. 18]). Отсюда следует, что  $f = g \cdot f$ , т. е.,  $f - G_0$ -инвариант. Таким образом,  $G_0$  действует тривиально на  $\mathfrak{m}$  и также на  $\mathcal{O}_{P,X}$ . Так как  $\mathbb{k}(X)$  – поле рациональных дробей для  $\mathcal{O}_{P,X}$ , то  $G_0$  действует тривиально на  $\mathbb{k}(X)$  и на  $X$ . Противоречие.  $\square$

**5. Замечание.** Это доказательство работает также для случая, когда  $G$  – произвольная редуктивная линейная алгебраическая группа (см. [7, гл. II, §8, предложение 8. 5 (a)]).

**2.5. Следствие.** Пусть  $X$  – неособая алгебраическая поверхность и пусть  $G \subset \text{Aut}(X)$  – конечная подгруппа. Тогда множество неподвижных точек  $G$  на  $X$  – неособое подмногообразие.

*Доказательство.* Пусть  $F = \text{Fix}(G)$  – множество неподвижных точек и пусть  $P \in F$  – особая точка. Тогда индуцированное действие  $G$  на  $T_{P,F} = T_{P,X}$  тривиально. Это противоречит теореме 2.4.  $\square$

**2.6. Разложение Жордана** [8, гл. VI]. Пусть  $G$  – связная линейная алгебраическая группа. Для любого элемента  $x \in G$  имеется каноническое разложение  $x = x_s x_u = x_u x_s$  такое, что это разложение коммутирует с морфизмами: если  $\varphi : G \rightarrow G'$  – морфизм алгебраических групп, то  $\varphi(x_s) = \varphi(x)_s$  и  $\varphi(x_u) = \varphi(x)_u$ .

В случае  $G = \text{GL}_n$  это разложение линейного оператора  $x$  в произведение полупростого (диагонализируемого) и унитарного (все собственные значения равны 1).

**2.7. Следствие.** Пусть  $X$  – проективное алгебраическое многообразие и пусть  $G \subset \text{Pic}(X)$  подгруппа действующая тривиально на  $\text{Pic}(X)$ . Тогда  $G$  – линейная алгебраическая группа. Если многообразие  $X$  не является унилинейчатым, то группа  $G$  конечна.

**2.8. Следствие.** Пусть  $X$  – проективное алгебраическое неунилинейчатое многообразие. Тогда группа  $\text{Aut}(X)_0$  или тривиальна или является абелевым многообразием.

**2.9. Теорема.** Пусть  $X$  – неособое проективное многообразие. Предположим, что  $X$  унилинейчато. Тогда канонический дивизор  $K_X$  не является численно эффективным.

*Доказательство.* Существует бирациональный изоморфизм  $\psi : Z \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ . По основной теореме Зарисского множество неопределенности  $\psi$  имеет коразмерность  $\geq 2$  (см., напр., [1, гл. V, лемма 5. 1]). Поэтому, ограничивая  $\psi$  на открытое плотное подмножество

$U \subset \mathbb{P}^{n-1}$ , мы получим морфизм  $\psi : U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ . Обозначим через  $\pi : U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow U$  проекцию. Общий геометрический слой  $C := \pi^{-1}(u)$ ,  $u \in U$  (и его окрестность) морфизмом  $\psi$  бирационально отображается на свой образ. Поэтому дифференциал  $d\psi : \mathcal{T}_{U \times \mathbb{P}^1} \rightarrow \psi^* \mathcal{T}_X$  сюръективен в общей точке  $C$ . Так как  $\mathcal{T}_{U \times \mathbb{P}^1}|_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(n-1)}$ , то

$$-K_X \cdot \psi(C) = \det(\psi^* \mathcal{T}_X) \cdot C \geq \deg \mathcal{T}_{U \times \mathbb{P}^1}|_C > 0.$$

□

### Задачи.

1. Пусть  $C$  – кривая рода 2. Найдите минимальную модель для симметрического квадрата  $S^2 C$ .
2. Докажите, что неособая поверхность  $F \subset \mathbb{P}^3$  степени  $d \geq 4$  может содержать лишь конечное число прямых.
3. Докажите, что неособая поверхность  $F \subset \mathbb{P}^3$  степени  $d \geq 4$  не содержит  $(-1)$ -кривых.
4. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^3$  – неособая поверхность степени  $d \geq 3$ ,  $d \neq 4$ . Докажите, что  $\text{Aut}(X) \subset PGL(4)$ .
5. Докажите, что на нерациональной поверхности число  $(-1)$ -кривых конечно.
6. Пусть  $X$  – линейчатая поверхность над эллиптической кривой  $E$ . Предположим, что на  $X$  также имеется структура эллиптического расслоения. Докажите, что  $X \simeq (E \times \mathbb{P}^1)/G$ , где  $G$  – группа, действующая сдвигами на  $E$ .
7. Пусть  $X$  – поверхность с  $\dim \text{Aut}(X) > 2$ . Докажите, что  $X$  линейчатая.

## 3. АВТОМОРФИЗМЫ КРИВЫХ

Пусть  $X$  – проективная алгебраическая кривая рода  $g$ . Имеют место следующие случаи:

- (i)  $g = 0$ ,  $X \simeq \mathbb{P}^1$ ,  $\text{Aut}(X) \simeq PGL_2(\mathbb{k})$ ;
- (ii)  $g = 1$ ,  $K_X = 0$ ,  $X$  – эллиптическая кривая, она является компактной группой Ли,  $\text{Aut}^0(X) \simeq X$ ;
- (iii)  $g > 1$ , дивизор  $K_X$  обилен, группа  $\text{Aut}(X)$  конечна.

**Случай  $g > 1$ .** Обозначим  $G := \text{Aut}(X)$ ,  $n := |G|$ . Рассмотрим фактормногообразие  $Y := X/G$  и соответствующий морфизм  $\pi : X \rightarrow Y$ . Тогда  $Y$  – также неособая проективная кривая. Пусть  $g'$  – ее род. Пусть  $P_1, \dots, P_m$  – точки с нетривиальными стабилизаторами  $G_i$  и пусть  $n_i := |G_i|$ . Тогда индекс ветвления  $P_i$  равен  $n_i$

и, следовательно,  $R := \sum (n_i - 1)P_i$  – дивизор ветвления. Запишем формулу Гурвица:

$$2g - 2 = \deg K_X = n \deg K_Y + \deg R = n(2g' - 2) + \sum_{P_i} (n_i - 1).$$

Пусть  $O_1, \dots, O_r$  – различные  $G$ -орбиты на множестве  $\{P_1, \dots, P_m\}$ . Тогда  $|O_i| = n/n_i$ . В последней сумме сгруппируем точки из одной  $G$ -орбиты:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= n(2g' - 2) + \sum_{O_i} |O_i|(n_i - 1) = n(2g' - 2) + \sum_{O_i} (n - n/n_i), \\ 0 &< (2g - 2)/n = 2g' - 2 + \sum_{O_i} (1 - 1/n_i) \end{aligned}$$

Минимально возможное положительное значение выражения справа равно  $1/42$  и достигается при  $g' = 0$ ,  $r = 3$ ,  $\{n_i\} = \{2, 3, 7\}$ . Отсюда

$$|\text{Aut}(G)| \leq 84(g - 1).$$

**3.1. Пример.** Рассмотрим группу  $G = \text{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ . Это простая группа порядка  $168 = 42 \cdot 4$ . Несложно показать, что  $G$  не имеет точных двумерных представлений. Тогда разлагая  $168$  в сумму квадратов, получим, что  $G$  имеет (точное) неприводимое трехмерное представление  $V$ . (Более того можно показать, что  $168 = 1 + 2 \cdot 3^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$ .) Группа  $\tilde{G} = G \cdot \{\pm 1\}$  порождена элементами порядка  $2$ , которые являются комплексными отражениями. Пусть  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$  – ее степени. Тогда

$$\prod d_i = \text{порядок группы}, \quad \sum (d_i - 1) = \text{число отражений.}$$

(см. [9]). В нашем случае  $\prod d_i = 336$ ,  $\sum (d_i - 1) = 21$ . Отсюда  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 6$ ,  $d_3 = 14$ , т. е.  $\tilde{G}$  имеет инвариант степени  $4$ . Пусть  $C \subset \mathbb{P}^2$  – соответствующая кватрика. Ясно, что  $C$  неприводима. Так как  $\rho_a(C) = 3$ , то  $C$  имеет не более трех особых точек. Эти точки не могут переставляться группой  $G$ . Следовательно,  $C$  неособа.

### Задачи.

1. Покажите, что группа автоморфизмов общей кривой рода  $g = 2$  имеет порядок  $2$ .
2. Покажите, что группа автоморфизмов общей кривой рода  $g = 3$  тривиальна.
3. Покажите, что группа автоморфизмов общей кривой рода  $g = 4$  тривиальна.
4. Может ли кривая рода  $3$  иметь автоморфизм порядка  $5$ ?



5. Может ли группа автоморфизмов кривой рода 10 быть изоморфной  $\mathfrak{S}_6$ ?
6. Докажите, что оценка Гурвица не достигается в случае кривых рода 2. Каков может быть порядок группы автоморфизмов в этом случае?
7. Докажите, что оценка Гурвица не достигается в случае кривых рода 4.
8. Докажите, что оценка Гурвица не достигается в случае кривых рода 5.
9. Докажите, что оценка Гурвица не может достигаться для циклической группы  $\text{Aut}(X)$ .
10. Let  $C$  be a hyperelliptic curve of genus  $g > 2$  and denote by  $n : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  the two-sheeted covering map given by the hyperelliptic equation  $y^2 = x^{2g+2} + \dots + px + q$ . Denote also by  $\tau$  the hyper-hyperelliptic involution (sheet interchange) and by  $p_1, \dots, p_{2g+2} \in \mathbb{P}^1$  the branch points of  $n$ . Show that any element of  $\text{Aut}(C)$  commutes with  $\tau$ , and from this conclude that  $\text{Aut}(C)$  is a  $Z/2$ -extension of the group of automorphisms of  $\mathbb{P}^1$  preserving  $\{p_1, \dots, p_{2g+2}\}$ . In particular, in this case  $\text{Aut}(C)$  is finite.
11. Let  $C$  be a curve of genus  $g$ ,  $\phi \in \text{Aut}(C)$ , and  $p_1, \dots, p_{2g+2} \in C$  general points of  $C$ . Show that there exists a meromorphic function  $f$  on  $C$  with polar divisor  $(f)_\infty = p_1 + \dots + p_{2g+2} + 1 \cdot \infty$  and, counting zeros and poles of  $f - \lambda$ ,  $\phi$  has at most  $2g + 2$  fixed points. Using Weierstrass points, deduce that  $\text{Aut}(C)$  is finite.
12. For a simpler, albeit less elementary argument, show that if  $\phi$  is any automorphism of  $C$ , the eigenvalues of  $\phi^* : H^1(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(C, \mathbb{C})$  are all roots of unity, and use this and the Lefschetz fixed point theorem to prove that any automorphism of  $C$  fixing all the Weierstrass points of  $C$  is the identity. Again, conclude that  $\text{Aut}(C)$  is finite.
13. For a Weierstrass-point-free argument, show that: (i) any automorphism of  $C$  acting trivially on  $H^1(C, \mathbb{C})$  is the identity (use the Lefschetz fixed point theorem); and if  $\phi \in \text{Aut}(C)$ , then the automorphism  $\phi^* : H^1(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(C, \mathbb{C})$  is both integral and unitary with respect to the Hermitian form  $H(a, b) = \int_C a \bar{b}$  on  $H^1(C)$ . Conclude once more that  $\text{Aut}(C)$  is finite.
14. Let  $\phi : \tilde{C} \rightarrow C$  be an automorphism of finite order  $n$ . Show that the orbit (or quotient) space  $\tilde{C}/\langle \phi \rangle$  has naturally the structure of a compact Riemann surface such that  $\tilde{C} \rightarrow \tilde{C}/\langle \phi \rangle$  is an  $n$ -sheeted covering totally ramified at the fixed points of  $\phi$ . Show that if  $n$  is prime then these are all the ramification points.

15. Retaining the notations from the preceding exercise, and using the Riemann-Hurwitz formula show that the number  $a$  of fixed points of  $\phi$  satisfies  $2 < a - 2n$  with inequality only if the quotient  $C/\langle \phi \rangle = \mathbb{P}^1$ .
16. Let  $G_p \subset G$  the subgroup of elements fixing  $p \in C$ , then the quotient  $C/G$  has naturally the structure of a compact Riemann surface such that  $\pi: C \rightarrow C/G$  is an  $n$ -sheeted cover with ramification indices  $v_p = \text{card}(G_p)$  for each  $p \in C$ .
17. Continuing the preceding exercises, using again the Riemann-Hurwitz formula show that  $\text{Aut}(C)$  has order at most  $8 - 1$ , and that if equality holds then the quotient  $C/\text{Aut}(C)$  is isomorphic to  $\mathbb{P}^1$  and there are exactly three points of  $C$  fixed under non-trivial subgroups of  $\text{Aut}(C)$  (this proof requires non-trivial fiddling). This completes the proof of the theorem stated above. In the remaining exercises on automorphisms we shall give applications and special cases of this theorem.
18. Show that a curve of genus  $g = 2$  cannot have an automorphism of order 7. Conclude that the bound  $8g + 1$  is not always sharp.
19. Show that a curve of genus  $g = 3$  cannot have an automorphism of order 5.
20. Show that if a curve of genus  $g = 3$  has an automorphism of order 7, then it must be the normalization of one of the two curves  $Y = x^2(x - 1), 7Y = x(x - 1)$ .
21. Let  $C$  be the normalization of the plane curve  $y^3 = x^6 - 1$ ? Show that  $C$  is isomorphic to the normalization of the curve  $y^2 = x^6 - 1$ , but is not isomorphic to the normalizations of either  $y^2 = x^6 - x$  or  $y^2 = x(x^4 - 1)$ . (Hint: use Exercise 10)
22. Show that if  $g(C) = 2$ , then  $\text{Aut}(C)$  has order at most 48, with equality if and only if  $C$  is the normalization of  $y^2 = x(x^4 - 1)$ .
23. Show that if  $g(C) = 4$ , then  $\text{Aut}(C)$  has order at most 120, with equality if and only if  $C$  is the curve given in homogeneous coordinates  $X_0, \dots, X_4$  in  $P^4$  by  $X_1^2 = 0$ .
24. Show that if  $g(C) = 3$ , then the order of  $\text{Aut}(C)$  is 168 if and only if  $C$  is the curve  $y^2 = x^2(x - 1)$  (cf. Exercise 20).
25. Show that, if an automorphism  $\phi$  has order  $n$  and at least  $(2n - 2)/(n - 1)$  fixed points, then these fixed points are Weierstrass points of  $C$ . In particular, this will be the case if  $C$  has five or more fixed points. (J. Lewittes.) Note. Recall that an automorphism  $\phi: C' \rightarrow C$  is said to be a deck transformation for the covering  $\pi: C' \rightarrow C$  if  $\phi$  commutes with  $\pi$ , i.e.,  $\pi \circ \phi = \pi$ , and the covering  $\pi$  is called Galois (or normal) if the group of deck transformations acts transitively on the points of a general fiber.

26. Show that a covering  $\pi$  is Galois if and only if the corresponding extension of function fields  $k(C)/k(C')$  is normal.
27. Suppose the covering  $\pi$  is unramified. Show that  $\pi$  is Galois if and only iff  $\pi_1(C)$  or  $\pi_1(C')$  is a normal subgroup; and, conversely, every normal subgroup of finite index in  $\pi_1(C)$  arises in this way.
28. Let  $\pi$  be an unramified Galois covering of Riemann surfaces and  $\phi \in \text{Aut}(C)$ . Show that  $\phi$  lifts to an automorphism of  $C'$  if and only if  $\phi$  is in the image of  $\pi_1(C')$ . Show that if  $g(C) = 4$ , then  $\text{Aut}(C)$  has order at most 120, with equality if and only if  $\pi$  preserves the subgroup  $\text{Aut}(C')$  associated to the cover  $C'$ .
29. Using the preceding exercise, show that for any curve  $C$  of genus  $g$ ;  $g > 2$  and any  $n$ , there exists an  $n$ -sheeted unramified Galois cover of  $C$  to which every auto-automorphism of  $C$  lifts. Conclude, in particular, that if the estimate in the theorem preceding exercise 10 is sharp for curves of genus  $g$ , it is sharp for curves of genus  $g = n^2(g+1) + 1$ ; and hence, in particular, that it is sharp for infinitely many  $g$ .
30. Note. To see that the estimate is not sharp for infinitely many genera, in fact that the inequality  $|\text{Aut}(C)| < S(g+1)$  holds for infinitely many genera? see Accola [1].

#### 4. АВТОМОРФИЗМЫ АБЕЛЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

4.1. Рассмотрим комплексный тор  $X = U/\Lambda$ ,  $U = \mathbb{C}^n$ . Положим  $V = U^\vee = \text{Hom}(U, \mathbb{C})$ ,  $\bar{V} = \text{Hom}_{\text{anti}}(U, \mathbb{C})$  (антилинейные формы). Имеются естественные отождествления

$$H^1(X, \Omega_X^1) = T_{0,X}^\vee = V, \quad H_1(X, \mathbb{Z}) = \Lambda,$$

$$H^{p,q}(X) = \wedge^p V \otimes \wedge^q \bar{V}, \quad H^r(X, \mathbb{Z}) = \wedge^r \Lambda^\vee.$$

В частности,  $H^2(X, \mathbb{Z}) = \wedge^2 \Lambda^\vee$ ,

$$H^{2,0}(X) = \wedge^2 V, \quad H^{0,2}(X) = \wedge^2 \bar{V}, \quad H^{1,1}(X) = V \otimes \bar{V}.$$

$\mathbb{Z}$ -линейное вложение  $\Lambda \hookrightarrow U$  задает вложение  $\wedge^2 \Lambda^\vee \hookrightarrow \wedge^2(V \oplus \bar{V})$ , которое соответствует

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X) = H^2(X, \mathbb{C}).$$

Элементы  $\wedge^2 \Lambda^\vee$  можно рассматривать как кососимметрические формы  $\lambda : \Lambda \otimes \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ , а элементы  $V \otimes \bar{V}$  – как эрмитовы формы на  $U$ .

Класс Чженя  $c_1(L)$  любого линейного расслоения  $L$  лежит в

$$H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) \subset H^2(X, \mathbb{C})$$

(см. [10, гл. 1, §2]). Поэтому каждое линейное расслоение определяет эрмитову форму на  $U$  такую, что ограничение ее мнимой части на  $\Lambda$  целочисленно. Линейное расслоение является обильным тогда и только тогда, когда эта эрмитова форма положительно определена.

\*\* Условия Римана ???\*\*

Напомним, что *абелевым многообразием* называется комплексный тор, допускающий голоморфное вложение в проективное пространство (и, таким образом, являющийся проективным многообразием).

4.2. Пусть  $(X, 0) = \mathbb{C}^n/\Lambda$  и  $(Y, 0) = \mathbb{C}^m/\Lambda'$  – комплексные торы размерности  $n$  и  $m$  соответственно. Гомоморфизм  $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$  индуцирует  $\mathbb{C}$ -линейное отображение

$$\mathbb{C}^n = T_{0,X} = H^0(X, \Omega_X^1)^\vee \longrightarrow \mathbb{C}^m = T_{0,Y} = H^0(Y, \Omega_Y^1)^\vee$$

и  $\mathbb{Z}$ -линейное отображение

$$\Lambda = H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Lambda' = H_1(Y, \mathbb{Z}),$$

которые совместимы с вложениями:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n = H^0(X, \Omega_X^1)^\vee & \longrightarrow & H^0(Y, \Omega_Y^1)^\vee = \mathbb{C}^m \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda = H_1(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_1(Y, \mathbb{Z}) = \Lambda' \end{array}$$

4.3. **Следствие.** *Образ  $\text{im}(f)$  является комплексным тором. Ядро  $\ker(f)$  является замкнутой подгруппой в  $X$ . Ее связная компонента  $\ker(f)_0$  является комплексным тором.*

4.4. **Пример.** Двумерный комплексный тор  $X$  допускает разложение  $X = E_1 \times E_2$  в произведение двух эллиптических кривых тогда и только тогда, когда имеется разложение  $U = U_1 \oplus U_2$ ,  $\dim U_i = 1$ , которое индуцирует разложение целочисленных решеток  $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ .

4.5. **Предложение.** *Пусть  $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$  – сюръективный гомоморфизм абелевых многообразий. Тогда существует абелево подмногообразие  $(Z, 0) \subset (X, 0)$  такое, что ограничение  $f : (Z, 0) \rightarrow (Y, 0)$  – конечный морфизм.*

*Доказательство.* Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} T_{X,0} & \xrightarrow{\alpha} & T_{Y,0} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \Lambda & \longrightarrow & \Lambda_Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Пусть  $(\ , \ )$  – эрмитова форма на  $T_{X,0}$ , соответствующая некоторому обильному дивизору. Пусть  $T' \subset T_{X,0}$  – ортогональное дополнение к ядру  $\alpha$  относительно этой формы и пусть  $\Lambda' := \Lambda \cap T'$ . Ясно, что  $\dim T' = \dim T_{Y,0}$  и  $\text{rk } \Lambda' = \text{rk } \Lambda_Y$ . Полагаем  $Z = T'/\Lambda'$ .  $\square$

4.6. Пусть  $(X, 0)$  –  $n$ -мерное абелево многообразие. Через  $\text{Aut}(X, 0)$  мы обозначим его автоморфизмы, сохраняющие групповой закон, а через  $T$  – группа сдвигов. Очевидно имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow \text{Aut}(X, 0) \longrightarrow 1.$$

Обозначим через  $\text{End}(X, 0)$  кольцо эндоморфизмов  $(X, 0)$ . Тогда  $\text{Aut}(X, 0) = \text{End}(X, 0)^*$  – множество обратимых элементов. Получаем

$$\begin{aligned} \text{End}(X, 0) &= \{ \varphi \in \text{End}(\mathbb{C}^n) \mid \varphi(\lambda) \subset \Lambda \}, \\ \text{Aut}(X, 0) &= \{ \varphi \in \text{GL}(\mathbb{C}^n) \mid \varphi(\lambda) = \Lambda \}. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример  $\dim X = 1$ , т. е.  $X = E$  – эллиптическая кривая. Тогда  $\varphi$  – умножение на  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \text{End}(E, 0) &\simeq \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \cdot \Lambda \subset \Lambda \}, \\ \text{Aut}(E, 0) &\simeq \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \cdot \Lambda = \Lambda \}. \end{aligned}$$

4.7. **Следствие.**  $\text{Aut}(E, 0)$  – конечная циклическая группа порядка  $n = 2, 4, 6$ .

Мы можем считать, что  $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$ . Тогда  $(\alpha, \alpha\tau)$  и  $(1, \tau)$  – два  $\mathbb{Z}$ -базиса решетки  $\Lambda$ . Они должны отличаться друг от друга невырожденным целочисленным преобразованием, т. е.

$$\alpha = a + b\tau, \quad \alpha\tau = c + d\tau, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Исключая  $\tau$ , получаем

$$\tau = \frac{\alpha - a}{b}, \quad \alpha \frac{\alpha - a}{b} = c + d \frac{\alpha - a}{b},$$

$$\alpha^2 - (a + d)\alpha + ad - bc = 0.$$

Получаем,  $n = 2, 3, 4, 6$ .

**Задачи.**

1. Пусть  $E$  – эллиптическая кривая. При каких  $n$  и  $r$   $\text{Aut}(E)$  может содержать подгруппу  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$ .

## 5. АБЕЛЕВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Напомним, что абелева поверхность характеризуется условиями  $K_X = 0$  и  $q(X) = 2$ .

**5.1. Теорема.** Пусть  $X$  – поверхность с  $K_X = 0$  и  $q = 2$ . Тогда  $X$  является комплексным тором.

**5.2. Предложение.** Пусть  $X$  – абелева поверхность. Тогда

- (i)  $\text{Eu}(X) = 0$ ;
- (ii)  $H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq H^3(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^4$ ;
- (iii)  $H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^6$ ,  $h^{1,1}(X) = 4$ ;
- (iv)  $\text{Pic}^0(X) = 0$  имеет структуру абелевой поверхности (двойственная поверхность);
- (v)  $\text{rk } c_1(\text{Pic}(X)) \simeq \mathbb{Z}^\rho$ , где  $\rho \leq 4$ ;
- (vi)  $\dim H^0(X, \mathcal{T}_X) = \dim H^2(X, \mathcal{T}_X) = 2$ ,  $\dim H^1(X, \mathcal{T}_X) = 4$ .

.....  
Пусть  $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$  – абелева поверхность. Рассмотрим знакопеременную форму  $\alpha : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ , определенную следующим образом:

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Форма  $\alpha$  называется *гиперболической*, если существует разложение  $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$  в прямую сумму изотропных относительно  $\alpha$  подмодулей  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ . Здесь определитель  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  понимается как как определитель векторов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Lambda \subset \mathbb{C}^2$ . Иначе говоря,  $\alpha$  гиперболическая, если существует базис  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \Lambda$  такой, что  $\alpha(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha(\mu_1, \mu_2) = 0$ . Продолжение  $\alpha$  на  $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$  также обозначается через  $\alpha$ . Форма  $\alpha : (\Lambda \otimes \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{C}$  называется *гиперболической над  $\mathbb{Q}$* , если существует разложение  $\Lambda \otimes \mathbb{Q} = V_1 \oplus V_2$  в прямую сумму изотропных относительно  $\alpha$  векторных подпространств  $V_1$  и  $V_2$ .

Оба определения не зависят от выбора базиса в  $\mathbb{C}^2$ .

**5.3. Предложение.** Для абелевой поверхности  $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$  следующие условия эквивалентны:

- (i) поверхность  $X$  изоморфна (соответственно, изогенна) произведению эллиптических кривых;
- (ii) форма  $\alpha$  гиперболична (соответственно, гиперболична над  $\mathbb{Q}$ ).

*Доказательство.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Предположим, что  $X$  изоморфна произведению эллиптических кривых. Тогда существуют базисы в  $\mathbb{C}^2$

и  $\Lambda$  такие, что соответствующая матрица периодов равна

$$\Pi = \begin{pmatrix} z_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что ее столбцы удовлетворяют условию  $\alpha(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha(\mu_1, \mu_2) = 0$ , т.е.  $\alpha$  гиперболична.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \Lambda$  – базис над  $\mathbb{Z}$  такой, что  $\alpha(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha(\mu_1, \mu_2) = 0$ . Тогда существуют константы  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$  такие, что  $\lambda_1 = z_1 \lambda_2, \mu_1 = z_2 \mu_2$  и

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (z_1 \lambda_2, \lambda_2, z_2 \mu_2, \mu_2) = (\lambda_2, \mu_2) \begin{pmatrix} z_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом,  $X$  изоморфна произведению эллиптических кривых. Утверждение об изогенности доказывается аналогично.  $\square$

## 6. ПОВЕРХНОСТИ ТИПА $K3$

**6.1. Определение.** Неособая проективная поверхность  $X$  такая, что  $K_X = 0$  и  $q(X) = 0$  называется *поверхностью типа  $K3$* .

**6.2. Предложение.** Пусть  $X$  – поверхность типа  $K3$ . Тогда

- (i)  $\chi(\mathcal{O}_X) = 2, \text{Eu}(X) = 24$ ;
- (ii)  $b_1(X) = b_3(X) = 0, b_2(X) = 22, h^{1,1}(X) = 20$ ;
- (iii) группы  $H^p(X, \mathbb{Z})$  не имеют кручений;
- (iv)  $\text{Pic}^0(X) = 0$  и отображение  $c_1 : \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  инъективно;
- (v)  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}^\rho$ , где  $\rho \leq 20$ ;
- (vi)  $H^0(X, \mathcal{T}_X) = H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0, \dim H^1(X, \mathcal{T}_X) = 20$ .

*Доказательство.* По двойственности Серра  $\dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 1$ . Так как  $q(X) = 0$ , то  $\chi(\mathcal{O}_X) = 2$  и по формуле Нетера  $\text{Eu}(X) = 24$ . Это доказывает (i). Более того,  $b_1(X) = 2q(X) = 0$  и

$$b_2(X) = \text{Eu}(X) - 2 + 2b_1(X) = 22.$$

Это, в частности, доказывает (ii).

Предположим, что  $H_1(X, \mathbb{Z})_t \neq 0$ . Тогда имеется конечное топологическое накрытие  $\pi : X' \rightarrow X$ . Имеем  $K_{X'} = 0, \text{Eu}(X') = 24n$ . Снова по формуле Нетера  $\chi(\mathcal{O}_{X'}) = 2n > 2$ . Отсюда

$$\dim H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(K_{X'})) = \dim H^2(X', \mathcal{O}_{X'}) \geq 2.$$

Противоречие. Следовательно,  $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ . По двойственности Пуанкаре имеем  $H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$ . По формулам универсальных коэффициентов

$$H^r(X, \mathbb{Z}) \simeq H_r(X, \mathbb{Z})_f \oplus H_{r-1}(X, \mathbb{Z})_t,$$

$$H^2(X, \mathbb{Z})_t \simeq H_1(X, \mathbb{Z})_t = 0, \quad H^1(X, \mathbb{Z})_t = 0.$$

Это, в частности, доказывает (iii). Утверждение (iv) следует из экспоненциальной последовательности и того, что  $q(X) = 0$ , а (v) следует из того, что  $\rho(X) \leq h^{1,1}(X) = 20$ .

(vi) Так как  $\mathcal{O}_X \simeq \wedge^2 \Omega_X$ , то мы имеем канонический изоморфизм  $\mathcal{T}_X \simeq \Omega_X^1$ .  $\square$

**6.3. Следствие.** *Комплексные кэлеровы поверхности типа КЗ параметризуются 20-мерным комплексным многообразием.*

Так как  $H_1(X, \mathbb{Z})_t = 0$ , то фундаментальная группа  $\pi_1(X)$  поверхности типа КЗ не имеет подгрупп конечного индекса.

**6.4. Следствие.** *Поверхность типа КЗ не имеет конечных неразветвленных нетривиальных накрытий.*

Из других соображений доказывается общий результат.

**6.5. Предложение.** *Любая поверхность типа КЗ односвязна.*

Опишем решетку  $H^2(X, \mathbb{Z})$ . По теореме об индексе Тома-Хирцебруха 1.2 сигнатура в нашем случае будет  $(3, 19)$ . Форма пересечения унимодулярна (двойственность Пуанкаре) и четна:  $\mathbf{x}^2$  четно для всех  $\mathbf{x} \in H^2(X, \mathbb{Z})$ . Это устанавливается аналогично четности решетки  $\text{Pic}(X)$  с использованием топологического аналога формулы присоединения  $\mathbf{x}^2 \equiv \mathbf{x} \cdot w_2 \pmod{2}$ ,  $w_2$  – второй класс Штифеля-Уитни, а  $w_2 \equiv c_1 \pmod{2}$ . Из теории целочисленных решеток тогда немедленно получается, что

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq 3U_2 \oplus 2E_8,$$

где  $U$  – стандартная гиперболическая решетка с матрицей Грама  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , а  $E_8$  – отрицательно определенная решетка типа  $E_8$ .

Согласно известной теореме из топологии односвязные четырехмерные многообразия с изоморфными решетками  $H^2(X, \mathbb{Z})$  гомеоморфны. Из наших рассуждений следует теперь, что все поверхности КЗ гомеоморфны. Односвязность КЗ несложно (по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении) проверить для примеров 6.6.

Можно также показать, что все КЗ диффеоморфны, однако, это – более глубокий результат.

Экспоненциальная последовательность задает вложение

$$\text{Pic}(X) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}),$$

которое, однако, не является изоморфизмом: по теореме Лефшеца об  $(1, 1)$ -классах  $\text{Pic}(X) = H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ , поэтому



$\text{rk Pic}(X) \leq 20$ . Если  $C$  – неприводимая кривая, то  $C^2 = (K_X + C) \cdot C = 2p_a(C) - 2$  четно. По линейности  $D^2$  четно для всех дивизоров.

**6.6. Пример.** Пусть  $X = X_4 \subset \mathbb{P}^3$  – поверхность степени 4. Тогда по формуле присоединения  $K_X = 0$ . Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Немедленно получаем, что  $q(X) = 0$ . По теории Ходжа  $b_1(X) = h^{1,0}(X) + h^{0,1}(X) = 2q(X) = 0$ . Следовательно,  $X$  – КЗ поверхность. Аналогично, полные пересечения  $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^4$  и  $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^5$  также являются КЗ поверхностями. Формула присоединения показывает также, что не существует других полных пересечений, являющихся КЗ поверхностями.

**6.7. Пример.** Предположим, что поверхность  $X$  представляется в виде двулистного накрытия  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  с дивизором ветвления  $B \subset \mathbb{P}^2$  степени 6. Тогда

$$K_X = f^* \left( K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{2}B \right) = 0.$$

Далее

$$\text{Eu}(X) = 2 \text{Eu}(\mathbb{P}^2) - \text{Eu}(B) = 6 - \text{Eu}(B) = 24.$$

По формуле Нетера

$$12\chi(\mathcal{O}_X) = K_X^2 + \text{Eu}(X) = 24, \quad \chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X) = 2.$$

Так как  $K_X = 0$ , то  $p_g(X) = 1$ ,  $q(X) = 0$ . Следовательно,  $X$  – поверхность типа КЗ.

Аналогично, мы можем рассмотреть двулистное накрытие  $f: X \rightarrow Y$  с ветвлением в (гладком) дивизоре  $B \in |-2K_Y|$ . Как и выше получаем  $K_X = 0$ ,

$$\text{Eu}(B) = 2 - 2g(B) = -2K_Y^2 = 2 \text{Eu}(Y) - 24,$$

$$\text{Eu}(X) = 2 \text{Eu}(Y) - \text{Eu}(B) = 24,$$

т. е.  $X$  – поверхность типа КЗ.

**6.8. Пример.** Пусть  $G := \text{Gr}(k, n)$  – грассманиан, параметризующий аффинные  $k$ -мерные подпространства в  $\mathbb{C}^n$ . Тогда  $-K_G = nH$ , где  $H$  – гиперплоское сечение при плюккером вложении. Несложно показать (аналогично нашим вычислениям для проективного пространства), что сечение  $X = G \cap \mathbb{P}^6 \cap Q$  плюккерова вложения  $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^5) = \mathbb{P}^9$  подпространством коразмерности 3 и квадрикой является КЗ поверхностью. Аналогично, сечение  $X = G \cap \mathbb{P}^6 \cap Q$  плюккерова вложения  $\text{Gr}(2, 6) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^6) = \mathbb{P}^{14}$  подпространством коразмерности 6 является КЗ поверхностью.

Поскольку все КЗ поверхности гомеоморфны, то мы можем зафиксировать топологическое многообразие  $X$  и рассматривать нашу конструкцию как деформацию комплексной структуры на  $X$ .

Отметим, что квартики в  $\mathbb{P}^3$  параметризуются многообразием размерности

$$\frac{(4+3)!}{4! \cdot 3!} - 1 - (4^2 - 1) = 19.$$

Аналогичные вычисления могут быть проделаны во всех примерах проективных КЗ поверхностей: поляризованные поверхности КЗ параметризуются 19-мерным подсемейством.

### Задачи.

1. Пусть КЗ-поверхность  $X$  представляется в виде двулистного накрытия (минимальной) линейчатой поверхности  $Y: \pi: X \rightarrow Y$ .
  - (a) Докажите, что  $Y$  рациональна (т. е.  $Y \simeq \mathbb{F}_n$ ).
  - (b) Найдите все возможности для  $n$  и дивизора ветвления.
2. Пусть КЗ поверхность  $X$  и пусть  $\sigma \in \text{Aut}(X)$  – автоморфизм порядка 2. Предположим, что фактор  $Y = X/\langle \sigma \rangle$  неособ. Каков может быть бирациональный тип  $Y$ ? Приведите примеры.
3. Перечислите все поверхности типа КЗ, являющиеся полными пересечениями в произведениях проективных пространств  $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^M$  гиперповерхностей положительных бистепеней.

## 7. ДИВИЗОРЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ТИПА КЗ

7.1. **Лемма.** Пусть  $X$  – проективная поверхность.

- (i) Если  $C \subset X$  – неприводимая кривая такая, что  $C^2 < 0$ , то  $C$  порождает экстремальный луч  $R \subset \overline{NE}(X)$ .
- (ii) Если  $C \subset X$  – неприводимая кривая такая, что  $C^2 = 0$ , то класс  $C$  в  $N_1(X)$  лежит на границе конуса  $\overline{NE}(X)$ .
- (iii) Если  $R \subset \overline{NE}(X)$  – экстремальный луч такой, что  $R^2 < 0$ , то  $R$  порождается классом неприводимой кривой.

*Доказательство.* (i) Рассмотрим конус  $\mathcal{K} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} \cdot C \geq 0\} \subset N_1(X)$ . Этот конус содержит классы всех неприводимых кривых. Следовательно,  $\overline{NE}(X)$  порождается  $\mathcal{K}$  и классом  $C$ . Это и доказывает (i).

(ii) Класс  $C$  численно эффективен, следовательно, линейная функция  $\mathbf{z} \mapsto C \cdot \mathbf{z}$  высекает грань конуса  $\overline{NE}(X)$ .

(iii) Докажем для случая  $\rho(X) = 2$ . Доказательство в общем случае см., напр., в [?, §2] или [?, гл. 2, предл. 17. 13]. Пусть  $0 \neq \mathbf{z} \in R$ . Имеется последовательность эффективных 1-циклов  $\mathbf{z}_n$  сходящихся к  $\mathbf{z}$ . Тогда  $\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}_n < 0$  и  $\mathbf{z}_n^2 < 0$  при  $n \gg 0$ . Поэтому существует неприводимая кривая (компонента  $\mathbf{z}_n$ ) такая, что  $\cdot \mathbf{z} < 0$ . Так как

$z \in \overline{NE}(X)$ , то  $C$  не является численно эффективным дивизором. Следовательно,  $C^2 < 0$  и согласно (i)  $C$  порождает экстремальный луч  $R' \subset \overline{NE}(X)$ . Предположим, что  $R' \neq R$ . Так как  $\rho(X) = 2$ , то  $\overline{NE}(X)$  имеет ровно два экстремальных луча. Но тогда эффективный дивизор  $C$  отрицателен на  $\overline{NE}(X)$ , что невозможно. Следовательно,  $R = R' = \mathbb{R}_+[C]$ .  $\square$

**7.2. Лемма.** Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ и пусть  $D$  – дивизор на  $X$ . Тогда

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2}D^2 + 2.$$

В частности,  $D^2$  чётно. Если  $D \cdot A > 0$  для обильного дивизора  $A$ , то

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \geq \frac{1}{2}D^2 + 2.$$

Если  $D = C$  – неприводимая кривая и  $C^2 > 0$ , то

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(C)) = \frac{1}{2}C^2 + 2 = p_a(C) + 1.$$

**7.3. Лемма.** Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ и пусть  $D$  – эффективный дивизор на  $X$ . Тогда  $2p_a(D) - 2 = D^2$ . Если  $D = C$  – неприводимая кривая, то  $C^2 \geq -2$ , причем равенство  $C^2 = -2$  достигается в случае, когда  $C$  – неособая рациональная кривая.

Неособая рациональная кривая  $C$  с индексом самопересечения  $C^2 = -2$  на поверхности называется  $(-2)$ -кривой.

**7.4. Следствие.** Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ. Каждая  $(-2)$ -кривая на  $X$  порождает экстремальный луч  $R \subset \overline{NE}(X)$ . Эллиптический пучок  $|E|$  на  $X$  порождает экстремальный луч тогда и только тогда, когда все слои  $|E|$  неприводимы. Наоборот, если  $\rho(X) > 1$ , то для каждого экстремального луча  $R \subset \overline{NE}(X)$  имеем  $R^2 \leq 0$ . Если  $R^2 < 0$ , то  $R$  порождается классом  $(-2)$ -кривой. Если  $R^2 = 0$ , то  $R$  порождается классом эллиптического пучка тогда и только тогда, когда  $R$  рационален.

**7.5. Теорема.** Пусть  $D$  – численно эффективный дивизор на КЗ поверхности  $X$ . Имеет место одна из следующих возможностей:

- (i)  $D \sim 0$ ;
- (ii)  $D^2 = 0$ ,  $D \not\sim 0$ ,  $|D| = n|E|$ ;
- (iii)  $D^2 > 0$ ,  $|D| = C + n|E|$ ;
- (iv)  $D^2 > 0$ ,  $\text{Bs } |D| = \emptyset$ .

*Доказательство.* Положим  $n := \frac{1}{2}D^2 + 1$ . По теореме Римана-Роха

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = n + 1.$$

Отсюда  $n$  – целое положительное и  $\dim |D| \geq n$ . Запишем  $|D| = F + |M|$  (возможно,  $F = 0$ ). Ясно, что  $M^2 \geq 0$ .

Рассмотрим случай  $M^2 = 0$ . Тогда  $\text{Bs } |M| = 0$  и  $\Phi_{|M|}$  задает морфизм на кривую  $B$ . Так как  $H^0(X, \Omega_X) = 0$ , то  $B \simeq \mathbb{P}^1$ . Тогда  $|M| = n|E|$ , где  $|E|$  – эллиптический пучок. Если  $F = 0$ , то мы получаем случай (ii). Поэтому дальше мы считаем, что  $F \neq 0$ . По теореме Римана-Роха  $F^2 \leq -2$ . Из

$$0 \leq 2n - 2 = D^2 = 2nE \cdot F + F^2$$

получаем, что  $E \cdot F > 0$ . Так как  $D \cdot F \geq 0$ , то из

$$2n - 2 = D^2 = nE \cdot F + D \cdot F,$$

получаем, что  $E \cdot F = 1$ ,  $D \cdot F = n - 2$ .

Пусть  $C$  – компонента  $F$ , пересекающая  $E$ . Тогда  $E \cdot C = 1$  и  $C$  –  $(-2)$ -кривая. Запишем  $F = C + F'$ . Тогда  $C$  – не компонента  $F'$ . Предположим, что  $F' \neq 0$ . Тогда  $F'^2 < 0$ ,

$$-2 \geq F^2 = (C + F')^2 = -2 + 2C \cdot F' + F'^2.$$

Отсюда

$$(C + F') \cdot F' \leq (C + F') \cdot F' + C \cdot F' \leq 0.$$

С другой стороны,

$$0 \leq D \cdot F' = (nE + C + F') \cdot F' = (C + F') \cdot F'$$

и поэтому  $(C + F') \cdot F' = 0$ ,  $C \cdot F' = 0$ ,  $F'^2 = 0$ . Противоречие показывает, что  $F' = 0$ , т. е.  $F = C$ . Получаем случай (iii).

Рассмотрим случай  $M^2 > 0$ . Предположим, что  $F \neq 0$ . По теореме Каваматы-Фивега об обращении в нуль  $H^i(X, M) = 0$  при  $i > 0$  и

$$\dim |M| = \frac{1}{2}M^2 + 1 = \dim |D| \geq \frac{1}{2}D^2 + 1.$$

Следовательно,  $M^2 \geq (M + F)^2$ ,  $(M + F) \cdot F + M \cdot F \leq 0$ ,  $M \cdot F = F^2 = 0$ . Противоречие.

Таким образом, мы можем считать, что  $F = 0$ , т. е.  $|D|$  не имеет неподвижных компонент и  $D^2 > 0$ .

..... □

**7.6. Лемма.** Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ. Полу группа эффективных дивизоров на  $X$  порождается  $(-2)$ -кривыми и кривыми с неотрицательным индексом самопересечения.

**7.7. Пример (квартика Ферма).** Рассмотрим кватику в  $X \subset \mathbb{P}^3$ , заданную уравнением

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0.$$

Для каждого разбиения  $\{1, 2, 3, 4\} = \{i_1, i_2\} \cup \{i_3, i_4\}$  уравнения  $x_{i_1}^4 + x_{i_2}^4 = x_{i_3}^4 + x_{i_4}^4 = 0$  задают 16 прямых на  $X$ . Получаем множество  $\Sigma$  из 48 прямых. Это множество инвариантно относительно группы автоморфизмов  $G \subset \text{Aut}(X)$ ,  $G \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ , действующей умножениями координат на корни 4-й степени из 1 и перестановками. Более того,  $G$  транзитивно действует на  $\Sigma$ .

## 8. ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ НА КОГОМОЛОГИЯХ

Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ.

**8.1. Предложение.** *Ядро действия группы  $\text{Aut}(X)$  на  $\text{Pic}(X)$  конечно и состоит из автоморфизмов, которые являются проективными при любом вложении.*<sup>1</sup>

Действие группы  $\text{Aut}(X)$  на  $H^{2,0}(X) = \mathbb{C} \cdot \omega$  индуцирует точную последовательность

$$1 \longrightarrow \text{Aut}^s(X) \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

где  $\Gamma \subset \text{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ . Подгруппа  $\text{Aut}^s(X) \subset \text{Aut}(X)$  называется подгруппой *симплектических* автоморфизмов. Положим

$$\text{N}_X := \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid \omega(x) = 0\}, \quad \text{T}_X = \text{N}_X^\perp.$$

**8.2. Пример.** Рассмотрим поверхность  $X \subset \mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$  типа КЗ, заданную уравнениями  $\sum x_i = \sum x_i^2 = \sum x_i^3 = 0$ . Знакопеременная группа  $\mathfrak{A}_6$  действует на  $X$  перестановками координат. Так как  $\mathfrak{A}_6$  – простая группа, то ее индуцированное действие на  $H^{2,0}(X) = \mathbb{C} \cdot \omega$  тривиально. Следовательно,  $\mathfrak{A}_6 \subset \text{Aut}^s(X)$ .

**8.3. Пример.** Рассмотрим кватику  $X \subset \mathbb{P}^3$ , заданную уравнением  $x_1x_2^3 + x_2x_3^3 + x_3x_1^3 + x_0^4 = 0$ . Согласно примеру 3.1 на этой поверхности действует простая группа Клейна  $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ . Как и выше, это действие – симплектическое.

**8.4. Теорема.** (i)  $\text{Aut}^s(X)$  действует на  $\text{T}_X$  тривиально;  
(ii) индуцированное действие  $\Gamma$  на  $\text{T}_X$  не имеет единичных собственных значений (в частности, точно);  
(iii)  $\Gamma$  – конечная циклическая группа,  
(iv) если  $m$  – порядок  $\Gamma$ , то  $\varphi(m)$  делит  $\text{rk } \text{T}_X$ , в частности,  $\varphi(m) \leq 21$  и  $m \leq 66$ .

<sup>1</sup>Позднее мы покажем, что ядро действия на  $H^2(X, \mathbb{Z})$  тривиально.

(v) если  $\rho(X)$  нечетно, то  $m \leq 2$ .

*Доказательство.* Пусть  $g \in \text{Aut}^s(X)$  и  $x \in T_X$ . Тогда

$$\omega(x) = g^*\omega(g^*x) = \omega(g^*x), \quad x - g^*(x) \in \ker(\omega) \cap T_X = N_X \cap T_X = 0.$$

Следовательно,  $g$  действует на  $T_X$  тривиально.

Наоборот, пусть  $g \notin \text{Aut}^s(X)$  и  $0 \neq x \in T_X$ . Так как  $N_X \cap T_X = 0$ , то  $\omega(x) \neq 0$ . Тогда  $g^*\omega = \lambda\omega$ ,  $\lambda \neq 1$ ,

$$g^*\omega(g^*x) = \omega(x) = \lambda\omega(g^*x), \quad g^*x \neq x.$$

В пространстве  $H^2(X, \mathbb{R})$  рассмотрим подпространства  $T' =$  вещ. часть  $(H^{2,0} \oplus H^{0,2})$  и  $T''$  – ортогональное дополнение к  $T'$  в  $H^2(X, \mathbb{R})$ . Тогда ограничение формы пересечения на  $T'$  (соотв.  $T''$ ) положительно (соотв. отрицательно) определено. Действие  $\Gamma$  на  $H^2(X, \mathbb{R})$  сохраняет разложение

$$H^2(X, \mathbb{R}) = \text{Pic}(X)_{\mathbb{R}} \oplus T' \oplus T''.$$

Поэтому имеем вложение в ортогональную группу  $G \hookrightarrow O(T') \times O(T'')$ . Пусть  $\gamma \in \Gamma$  и пусть  $\gamma^*\omega = \lambda\omega$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\lambda \neq 1$ . Согласно сказанному выше,  $|\lambda| = 1$ . С другой стороны,  $\lambda$  – целое алгебраическое число. В этом случае  $\lambda$  должно быть корнем из 1, т. е.  $\gamma \in \Gamma$  – элемент конечного порядка. Далее,  $\Gamma$  подгруппа в  $(O(T') \times O(T'')) \cap O(H^2(X, \mathbb{Z}))$ . Следовательно,  $\Gamma$  дискретна в (компактной) группе  $(O(T') \times O(T''))$ . Тогда  $\Gamma$  должна быть конечной. Так как  $\Gamma \subset \mathbb{C}^*$ , то  $\Gamma$  – конечная циклическая группа.

Все незначительные собственные значения элемента  $\gamma \in \Gamma$  в пространстве  $T''$  группируются на пары комплексно сопряженных. Если ранг  $T_X$  нечетен, то имеется собственное значение  $\pm 1$ . Это возможно только если порядок  $\gamma$  не превосходит 2.  $\square$

### Задачи.

1. Найдите коразмерность семейства кватрик в  $\mathbb{P}^3$ , содержащих прямую (коническую) в пространстве всех кватрик.
2. Предположим, что группа Пикара поверхности типа КЗ порождена  $(-2)$ -кривыми и число таких кривых конечно. Докажите, что  $\text{Aut}(X)$  конечна.
3. Пусть КЗ поверхность  $X$  является разветвленным накрытием  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Покажите, что  $X$  имеет два эллиптических пучка и опишите вырожденные слои.
4. Постройте пример КЗ-поверхности с числом Пикара  $\rho = 20$  (с обоснованием!).

## 9. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ

Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ и пусть  $G \subset \text{Aut}(X)$  – конечная группа автоморфизмов. Положим  $G_s := \text{Aut}^s(X) \cap G$ . Имеется точная последовательность

$$1 \longrightarrow G_s \longrightarrow G \longrightarrow G/G_s \longrightarrow 1$$

Пусть  $m := |G/G_s|$ .

**9.1. Теорема (голоморфная формула Лефшеца, см. [10, гл. 3]).**

$$\text{Lef}(g, \mathcal{O}) = \sum_n (-1)^n \text{Tr } g^*|_{H^{0,q}(X)} = \sum_{g(P)=P} \frac{1}{\det(E - J_P)}.$$

**9.2. Теорема.** Пусть  $g$  – симплектический элемент простого порядка  $p$ . Тогда  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$  и число неподвижных точек равно  $24/(p+1)$ .

*Доказательство.* Пусть  $m$  – число неподвижных точек. По голоморфной формуле Лефшеца

$$2(p-1) = \sum_{k=1}^{p-1} \text{Lef}(g^k, \mathcal{O}) = m \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(1-\epsilon^k)(1-\epsilon^{-k})}.$$

Заметим, что  $(\epsilon^k - 1)^{-1}$  – корни уравнения  $(t+1)^p - t^p = 0$ . По формулам Виета

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\epsilon^k - 1} = -\frac{p-1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(\epsilon^k - 1)^2} = \left(-\frac{p-1}{2}\right)^2 - 2\frac{(p-1)(p-2)}{6}.$$

Так как

$$\frac{1}{(1-\epsilon^k)(1-\epsilon^{-k})} = -\frac{1}{\epsilon^k - 1} - \frac{1}{(\epsilon^k - 1)^2}$$

то

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(1-\epsilon^k)(1-\epsilon^{-k})} = \frac{p-1}{2} - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \frac{(p-1)(p-2)}{3} = \frac{p^2-1}{12}.$$

Откуда

$$m(p+1) = 24, \quad p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}.$$

Если  $p = 11$ , то  $m = 2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\epsilon)(1-\epsilon^{-1})} + \frac{1}{(1-\epsilon^k)(1-\epsilon^{-k})} &= 2 \\ 4 - 3(\epsilon^k + \epsilon^{-k}) - 3(\epsilon + \epsilon^{-1}) + 2(\epsilon + \epsilon^{-1})(\epsilon^k + \epsilon^{-k}) &= 0 \end{aligned}$$

Следовательно,  $\epsilon$  удовлетворяет 9-членному уравнению. Противоречие.  $\square$

**9.3. Теорема.** Действие группы  $\text{Aut}(X)$  на  $H^2(X, \mathbb{Z})$  точно.

*Доказательство.* По предложению 8.1 ядро  $G_0$  действия конечно. Оно состоит только из симплектических автоморфизмов. Пусть  $g \in G_0$  – элемент простого порядка. По теореме 9.2  $g$  имеет не более чем 8 неподвижных точек. С другой стороны, по топологической формуле Лефшеца

$$\text{Lef}(g) = \sum_q \text{Tr } g^*|_{H^q(X, \mathbb{R})} = 24.$$

Противоречие.  $\square$

**Задачи.**

1. Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ и пусть  $G \subset \text{Aut}(X)$  – конечная подгруппа, содержащая несимплектический автоморфизм. Докажите, что фактор  $X/G$  или рационален или бирационально эквивалентен поверхности Энриквеса. Чем различаются эти случаи?
2. Может ли группа автоморфизмов КЗ поверхности быть изоморфна симметрической группе  $\mathfrak{S}_{11}$ ?
3. Является ли симплектическим автоморфизм – циклическая перестановка координат на квартике

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_4 + x_4^3 x_1 = 0?$$

4. Опишите группу проективных симплектических автоморфизмов квартики Ферма.
5. Оцените сверху порядок конечной циклической группы автоморфизмов поверхности типа КЗ (не требуется точная оценка).
6. Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ. Предположим, что группа  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$  вкладывается в  $\text{Aut}^s(X)$ , где  $p$  – простое  $\geq 5$ . Какое максимальное значение может принимать  $r$ ?
7. Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ. Предположим, что группа  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^r$  вкладывается в  $\text{Aut}^s(X)$ . Какое максимальное значение может принимать  $r$ ?
8. Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ. Предположим, что группа  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$  вкладывается в  $\text{Aut}^s(X)$ . Какое максимальное значение может принимать  $r$ ?
9. Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ с  $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$ . Докажите, что если  $H^2 > 2$ , то  $\text{Aut}(X)$  тривиальна. *Указание.* Сначала



покажите, что  $\text{Aut}^s(X) = \{1\}$ . Затем исследуйте действие несимплектического автоморфизма на  $T_X$  и покажите, что его порядок  $\leq 2$ .

10. Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ с  $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$ . Докажите, что если  $H^2 = 2$ , то  $\text{Aut}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . *Указание.* Сначала покажите, что  $\text{Aut}^s(X) = \{1\}$ . Затем исследуйте действие несимплектического автоморфизма на  $T_X$  и покажите, что его порядок  $\leq 2$ .
11. Какие возможности есть для действия симплектического автоморфизма  $g \in \text{Aut}(X)$  порядка 2 на решетке  $H^2(X, \mathbb{Z})$ .
12. Докажите, что симплектический автоморфизм поверхности типа КЗ не может иметь порядок 10.
13. Пусть  $\tau \in \text{Aut}(X)$  – инволюция, действующая на поверхности  $X$  типа КЗ так, что имеется лишь конечное число неподвижных точек. Каков бирациональный тип факторповерхности  $X/\tau$ ? Сколько имеется неподвижных точек?

## 10. АВТОМОРФИЗМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА КЗ С $\rho(X) = 2$

10.1. **Предложение.** Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ с  $\rho(X) = 2$ . Тогда конус  $\overline{\text{NE}}(X)$  имеет ровно два экстремальных луча. Любой эллиптический пучок  $|E|$  (и любая  $(-2)$ -кривая) на  $X$  порождает экстремальный луч. Если  $X$  содержит эллиптический пучок, то или  $X$  содержит другой эллиптический пучок или  $(-2)$ -кривую.

*Доказательство.* Нужно пояснить только последнее утверждение. Если  $|E|$  – эллиптический пучок, то  $E^2 = 0$ , т. е. форма  $\mathbf{x}^2 = 0$  на решетке  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$  представляет 0. Но тогда имеется другой элемент  $0 \neq D \in \text{Pic}(X)$  такой, что  $D^2 = 0$  (проверьте!). По теореме Римана-Роха можно считать  $D$  эффективным. Если  $D$  численно эффективен, то по теореме 7.5  $|D|$  задает эллиптический пучок. В противном случае некоторая компонента  $D$  является  $(-2)$ -кривой по лемме 7.1.  $\square$

10.2. **Теорема.** Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ с  $\rho(X) = 2$ . Если  $X$  содержит  $(-2)$ -кривую или эллиптический пучок, то группа ее автоморфизмов конечна.

*Доказательство теоремы 10.2.* Предположим, что на  $X$  имеется  $(-2)$ -кривая  $C$ . Согласно следствию 10.1 подгруппа  $G \subset \text{Aut}(X)$  индекса  $\leq 2$  сохраняет  $C$ . Тогда  $G$  также сохраняет прямую

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot C = 0\} \subset \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$$

и целые точки на ней. Следовательно, подгруппа  $G' \subset G$  индекса  $\leq 2$  действует тривиально на прямой  $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot C = 0\}$ , а значит и на  $\text{Pic}(X)$ . По следствию 2.7 группа  $G'$  конечна.  $\square$

**6. Замечание.** Условия теоремы будут выполнены если хотя бы одно из ребер конусов  $\overline{\text{NE}}(X)$  или  $\text{KP}(X) := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^2 \geq 0\} \subset \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$  рационально.

10.3. Далее нас будут интересовать КЗ поверхности для которых группа автоморфизмов бесконечна. Согласно теореме 10.2 на такой поверхности нет кривых с отрицательным индексом пересечения,  $\overline{\text{NE}}(X) = \text{KP}^+(X)$  и ребра этого конуса иррациональны (т. е. форма  $\mathbf{x}^2 = 0$  не представляет 0 в  $\text{Pic}(X)$ ). Пусть  $\Gamma$  – образ  $\text{Aut}(X)$  в  $\text{Aut}(\text{Pic}(X))$  и пусть  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  – подгруппа (индекса  $\leq 2$ ), сохраняющая ребра  $\overline{\text{NE}}(X) = \text{KP}^+(X)$ . Так как  $\Gamma \subset \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ , то определители элементов  $\Gamma$  могут принимать значения  $\pm 1$ . Выберем базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  в  $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$ , направленный вдоль ребер  $\overline{\text{NE}}(X)$ . Для любого элемента  $\gamma \in \Gamma$  имеем

$$(\gamma \mathbf{e}_1, \gamma \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) > 0.$$

Поэтому  $\gamma$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{если } \gamma \in \Gamma_0, \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{если } \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0.$$

В частности, это означает, что группа  $\Gamma_0$  абелева,  $\Gamma_0 = \Gamma \cap \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , а все элементы  $\Gamma \setminus \Gamma_0$  имеют порядок 2 и каждый такой элемент – отражение относительно обильного класса  $\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2$ . Этот элемент является собственным значением  $\gamma$  и поэтому пропорционален целочисленному классу в  $\text{Pic}(X)$ . Таким образом, автоморфизмы, реализующие элементы  $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ , естественно строить как инволюции Галуа двойного накрытия  $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ , заданного обильным классом, пропорциональным  $\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2$ .

10.4. Пусть  $R$  – свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль ранга 2 с невырожденной билинейной формой  $q : R \times R \rightarrow \mathbb{Z}$  сигнатуры  $(1, 1)$ . В пространстве  $R_{\mathbb{R}} := R \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  естественно определен конус  $\text{KP}(R) := \{\mathbf{x} \in R_{\mathbb{R}} \mid q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0\}$ , который имеет две компоненты:  $\text{KP}(R) = \text{KP}(R)^+ \cup \text{KP}(R)^-$  (ср. (1)). Для каждого  $\mathbf{u} \in R$  такого, что  $q(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$ , определим отражение

$$s_{\mathbf{u}} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x} - \frac{2q(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{q(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u}.$$

Любой элемент порядка 2 в  $O(R)$  имеет вид  $s_{\mathbf{u}}$  для некоторого  $\mathbf{u} \in R$ . Более того, если  $s_{\mathbf{u}}$  переводит компоненты  $\text{KP}(R)^+$  и  $\text{KP}(R)^-$  в

себя, то  $q(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ . Несложно проверить, что

$$s_{\mathbf{u}} \circ s_{\mathbf{v}} \circ s_{\mathbf{u}} = s_{\mathbf{w}}, \quad \text{где } \mathbf{w} = s_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}).$$

Зафиксируем некоторое множество  $U \subset R$  такое, что  $q(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$  для всех  $\mathbf{u} \in U$  и рассмотрим группу

$$W(U) := \langle s_{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u} \in U \rangle,$$

порожденную  $s_{\mathbf{u}}$  для всех  $\mathbf{u} \in U$ . Мы можем считать, что  $U$  максимально, т. е. оно содержит все отражения из  $W(U)$ . В этом случае группа  $W(U)$  действует на  $U$ . Заметим, что  $s_{\mathbf{u}} \circ s_{\mathbf{v}} = s_{\mathbf{v}} \circ s_{\mathbf{u}}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{v} = s_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ , т. е.  $q(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ .

**10.5. Лемма.** *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) группа  $W(U)$  конечна;
- (ii) группа  $W(U)$  имеет порядок 2 или 4.

*Доказательство.* Пусть  $W(U)$  конечна и предположим, что ее порядок больше 2. В пространстве  $\mathbb{R}^2 = R \otimes \mathbb{R}$  имеются два неколлинеарных изотропных вектора  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Пусть  $s_{\mathbf{u}} \in W(U)$ . Если  $s_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_1) = \lambda \mathbf{e}_1$ , то вектор  $\mathbf{e}_1$  коллинеарен  $\mathbf{u}$  и тогда он не может быть изотропным. Значит  $s_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_1) = \lambda \mathbf{e}_2$  и мы можем считать, что  $s_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ . Так как  $s_{\mathbf{u}}^2$  — тождественное отображение, то  $s_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$ . Аналогично, для любого другого отражения  $s_{\mathbf{v}} \in W(U)$  имеем  $s_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}_1) = \mu \mathbf{e}_2$ . Но тогда  $s_{\mathbf{v}}^2(\mathbf{e}_1) = \mu^2 \mathbf{e}_1$ . Следовательно,  $s_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2$  и  $s_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$ . Это означает, что  $W(U)$  содержит ровно два отражения и эти отражения коммутируют.  $\square$

**10.6. Пример.** Предположим, что форма  $q$  представляет 1, т. е.  $q(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$  для некоторого  $\mathbf{v} \in R$ . Предположим, также что модуль дискриминанта  $\Delta = \Delta(q)$  не является квадратом. Тогда существует базис  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{v}_2$ , в котором матрица  $q$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

где  $d = -\Delta > 0$ . Более того, на  $R$  можно ввести структуру кольца  $R := \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ . отождествляя  $\mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \sqrt{d}$ , мы можем записать нашу форму в виде

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{x}}\mathbf{y}),$$

где  $\overline{a + b\sqrt{d}} := a - b\sqrt{d}$ . Пусть

$$U \subset \{\mathbf{u} \in R \mid q(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1\}.$$

– подмножество в группе единиц. Тогда

$$s_{\mathbf{u}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2q(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u} = -\bar{\mathbf{x}}\mathbf{u}^2.$$

Тогда

$$s_{\mathbf{u}}s_{\mathbf{v}}s_{\mathbf{u}} = s_{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{w} = s_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = -\mathbf{u}^2\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{u}^2\mathbf{v}^{-1}.$$

10.7. Мы можем применить конструкцию 10.7 в следующей ситуации. Полагаем  $R = \text{Pic}(X)$ , где  $X$  – поверхность типа КЗ с  $\rho(X) = 2$ . Пусть  $q(D_1, D_2) = D_1 \cdot D_2$  – форма пересечения на  $X$ . Иногда удобнее положить  $q(D_1, D_2) = \lambda D_1 \cdot D_2$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . Пусть  $G \subset \text{Aut}(X)$  – подгруппа, порожденная элементами порядка 2 и пусть  $W \subset O(R)$  – ее образ. Тогда  $W = W(U)$  для некоторого  $U$ . Из леммы получаем

10.8. **Следствие.** *Если порядок  $W$  больше 2, то группа  $\text{Aut}(X)$  бесконечна.*

10.9. **Пример Фано-Севери (Fano-Severi).** Пусть  $X = X_4 \subset \mathbb{P}^3$  – неособая кватрика. Предположим, что  $X$  содержит неособую кривую  $C$  рода 2 и степени 6. Пусть  $H$  – гиперплоскостное сечение  $X$ . Можно доказать, по теории модулей КЗ-поверхностей, что  $C$  и  $H$  образуют базис группы  $\text{Pic}(X)$  при условии, что кватрика  $X$  достаточно общая. В этих предположениях на  $X$  нет кривых с отрицательным индексом самопересечения. Ясно, что  $C^2 = 2$ ,  $C \cdot H = 6$ ,  $H^2 = 4$ . Полагаем  $R = \text{Pic}(X)$  и  $q(D_1, D_2) = \frac{1}{2}D_1 \cdot D_2$ . Изоморфизм  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$  задается

$$C \mapsto 1, \quad H \mapsto 3 + \sqrt{7}.$$

Конус Мори  $\overline{\text{NE}}(X)$  совпадает с  $\text{KP}^+(X)$  и задается соотношениями

$$\overline{\text{NE}}(X) = \text{KP}^+(X) = \{\alpha C + \beta H \mid \alpha^2 + 6\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0, \quad \beta \geq 0\}.$$

Этот конус имеет иррациональные ребра  $H + \gamma_1 C$  и  $H + \gamma_2 C$ , где  $\gamma_{1,2} := -3 \pm \sqrt{7}$ . Внутренность  $\overline{\text{NE}}(X)$  состоит из обильных дивизоров.

Пусть  $(t, u)$ ,  $t > 0$  – решение уравнения Пелля  $t^2 - 7u^2 = 1$ . Положим

$$D = (t - 3u)C + uH.$$

Тогда мы имеем  $D^2 = 2$ ,  $D \cdot H = 2(3t - 7u)$ . Так как  $t > \sqrt{7}u$ , то  $3t > 7u$  и  $D \cdot H > 0$ . Следовательно,  $D$  – обильный дивизор. По теореме Римана-Роха  $\dim |D| \geq 2$  (лемма 7.2). Мы можем считать дивизор  $D$  эффективным и тогда  $r_a(D) = 2$  (лемма 7.3). По теореме 7.5 линейная система  $|D|$  определяет сюръективный морфизм  $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ . Ясно, что  $\deg \phi = 2$ . Поэтому существует автоморфизм

Галуа  $\tau = \tau_{t,u} : X \rightarrow X$  такой, что  $\tau^2 = \text{id}$ ,  $\tau(D) \sim D$ , т. е.  $D = \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ .

**10.10. Лемма.** Для различных решений  $(t, u)$  и  $(t', u')$  уравнения Пелля  $t^2 - 7u^2 = 1$  элементы второго порядка  $\tau_{t,u}, \tau_{t',u'} \in \text{Aut}(X)$  различны.

*Доказательство.* Если два различных решения  $(t, u)$  и  $(t', u')$  определяют один и тот же автоморфизм  $\tau : X \rightarrow X$ , то  $\tau(H) \sim H$ , следовательно,  $\tau : X \rightarrow X$  индуцирован линейным преобразованием. С другой стороны, множество неподвижных точек  $\tau$  содержит множество ветвления двулистного накрытия  $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  – плоскую кривую  $R$  степени 6 и рода 10. Такая кривая не может лежать в гиперплоском сечении поверхности  $X \subset \mathbb{P}^3$  и поэтому любой линейный автоморфизм поверхности  $X$ , фиксирующий  $R$  поточечно, действует тривиально на  $\mathbb{P}^3$ . Это и доказывает лемму.  $\square$

Таким образом,  $\text{Aut}(X)$  содержит бесконечно много элементов порядка 2.

**10.11. Пример.** Рассмотрим пересечение  $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  общих дивизоров бистепеней  $(1, 1)$  и  $(2, 2)$ . По теореме Нетера-Лефшеца отображение ограничения  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \rightarrow \text{Pic}(X)$  является изоморфизмом. Таким образом,  $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}[h_1] \oplus \mathbb{Z}[h_2]$ , где  $h_i^2 = 2$ ,  $h_1 \cdot h_2 = 4$ .

Проекции  $\pi_i : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  являются двулистными накрытиями с дивизорами ветвления  $B_i \subset \mathbb{P}^2$  – гладкими секстиками. Они задают две инволюции Галуа  $\tau_i \in \text{Aut}(X)$  с множеством неподвижных точек  $R_i = \pi_i^{-1}(B_i)$ .

Предположим, что одна из инволюций  $\tau_i$  действует тривиально на  $\text{Pic}(X)$ . Тогда  $\tau_i$  сохраняет обе проекции  $\pi_1, \pi_2$ . Кривая  $R_i$  – негиперэллиптическая. Значит она проектируется в нерациональные кривые на обоих копиях  $\mathbb{P}^2$ . Тогда  $\pi_1(R_i)$  и  $\pi_2(R_i)$  порождают  $\mathbb{P}^2$ . Следовательно,  $\tau_i$  действует тривиально на  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ , и на  $X$ . Противоречие доказывает, что обе инволюции  $\tau_i$  действуют нетривиально на  $\text{Pic}(X)$ .

Рассмотрим новую билинейную форму:

$$\langle D_1, D_2 \rangle = \frac{1}{2} D_1 \cdot D_2.$$

Имеем изоморфизм решеток

$$\varepsilon : \text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\sqrt{3}], \quad h_1 \mapsto 1, \quad h_2 \mapsto 2 + \sqrt{3}.$$

Индукцированное скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + \bar{x}y).$$

При этом  $h_i$  – единицы в  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ , а индуцированные действия  $\tau_i^*$  на  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  – это отражения относительно единиц  $\varepsilon(h_1) = 1$ ,  $\varepsilon(h_2) = 2 + \sqrt{3}$ . Как и в 10.6 получаем бесконечную группу автоморфизмов, порожденную  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , поскольку образ этой группы в группе автоморфизмов решетки бесконечен.

### Задачи.

1. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$  – общее пересечение четырех дивизоров бистепени  $(1, 1)$ . Имеет ли эта КЗ поверхность эллиптический пучок? Содержит ли она  $(-2)$ -кривые? Опишите конус Мори  $\overline{NE}(X)$ .
2. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$  – общее пересечение дивизоров бистепеней  $(1, 2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 1)$ . Конечна ли группа  $\text{Aut}(X)$ ? Опишите конус Мори  $\overline{NE}(X)$ .
3. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  – общий дивизор бистепени  $(3, 2)$ . Конечна ли группа  $\text{Aut}(X)$ ? Опишите конус Мори  $\overline{NE}(X)$ .
4. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  – общее пересечение дивизоров бистепеней  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ . Конечна ли группа  $\text{Aut}(X)$ ? Опишите конус Мори  $\overline{NE}(X)$ .
5. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$  – общее пересечение дивизоров бистепеней  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ . Конечна ли группа  $\text{Aut}(X)$ ? Опишите конус Мори  $\overline{NE}(X)$ .
6. Пусть  $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$  – общее пересечение дивизоров бистепеней  $(1, 2)$ ,  $(1, 2)$ . Конечна ли группа  $\text{Aut}(X)$ ? Опишите конус Мори  $\overline{NE}(X)$ .

## 11. ПРОСТЕЙШИЕ ОСОБЕННОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Приведем необходимые сведения о простейших особенностях поверхностей. Мы отсылаем к [?] за подробным изложением.

**11.1. Определение.** Нормальная особенность  $X \ni P$  поверхности называется *дювалевской*, если существует разрешение  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  такое, что  $K_{\tilde{X}} = f^*K_X$ .

**11.2. Лемма.** Пусть  $E = \sum E_i$  – исключительный дивизор разрешения  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  дювалевской особенности такого, что  $K_{\tilde{X}} = f^*K_X$ . Тогда

- (i) Все  $E_i$  –  $(-2)$ -кривые.
- (ii) Различные компоненты или не пересекаются или пересекаются трансверсально в одной точке.

Сопоставим этому исключительному дивизору  $E = \sum E_i$  его *двойственный граф*. Вершины этого графа соответствуют компонентам исключительного дивизора и две вершины соединяются



$\mathbb{C}^3$  одним из уравнений (7) ниже. Эти особенности также изоморфны факторам  $\mathbb{C}^2/G$ , где  $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  – конечная группа. Обратное, особенности, заданные уравнениями из (7), и факторособенности  $\mathbb{C}^2/G$ ,  $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  – дювалевские.

	тип	уравнение	группа $G$
(7)	$A_n$	$xy + z^{n+1} = 0, \quad n \geq 1$	циклическая
	$D_n$	$x^2 + y^2z + z^{n-1} = 0, \quad n \geq 4$	диэдральная
	$E_6$	$x^2 + y^3 + z^4 = 0$	тетраэдральная
	$E_7$	$x^2 + y^3 + yz^3 = 0$	октаэдральная
	$E_8$	$x^2 + y^3 + z^5 = 0$	икосаэдральная.

Напомним, что любая конечная подгруппа  $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  сопряжена подгруппе  $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ . При гомоморфизме  $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  образом группы  $G$  будет одна из хорошо известных групп симметрий: циклическая группа, группы диэдра, тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.

Это следует из следующего факта, который проверяется непосредственными вычислениями

**11.5. Лемма.** Пусть  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  – особенность, заданная одним из уравнений (7) и пусть  $\sigma: Y \rightarrow X$  – раздутие начала координат. Тогда  $Y$  нормально и имеет лишь двойные гиперповерхностные особенности типа (7). Более того,  $\sigma^*K_X = K_Y$ .

**11.6. Пример.** Пусть  $X$  – поверхность в  $\mathbb{C}^3$ , заданная уравнением  $xy + z^{n+1} = 0$ . Раздутие единственной особой точки – начала координат приводит к особенности того же типа, но с меньшим  $n$ . Действительно, в аффинной карте  $x = x'z', y = y'z', z = z'$  мы получим уравнение  $x'y' + z'^{n-1} = 0$ . При этом исключительный дивизор задается уравнением  $z' = 0$ . Несложно проверить, что других особенностей нет. Повторяя процесс, мы получим полное разрешение особенностей.

Пусть  $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  – конечная подгруппа. Согласно классификации конечных подгрупп в  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  (см., напр., [9]) группа  $G$  сопряжена одной из групп, перечисленных в таблице. Разберем, например, случай бинарной группы диэдра. Тогда  $G$  порождается матрицами

$$a = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\varepsilon = e^{\pi i/(n-2)}$ . Кольцо инвариантов  $\mathbb{C}[x, y]^{(a)}$  циклической группы,  $\langle a \rangle$ , порождается инвариантами

$$x' = x^{2n-4}, \quad y' = y^{2n-4}, \quad z' = xy,$$



между которыми имеется единственное соотношение  $x'y' = z'^{2n-4}$ . Действие факторгруппы  $\mu_2 = G/\langle a \rangle$  имеет вид

$$x' \mapsto (-1)^{n-2}y', \quad y' \mapsto (-1)^{n-2}x', \quad z' \mapsto -z'.$$

Отсюда видно, что при четном  $n$  кольцо инвариантов

$$\mathbb{C}[x, y]^G \simeq (\mathbb{C}[x', y', z']/(x'y' - z'^{2n-4}))^{\mu_2}$$

порождается многочленами

$$x'' = x' + y', \quad y'' = (x' - y')z', \quad z'' = x'y', \quad t'' = z'^2.$$

Соотношения имеют вид  $y''^2 = t''(x''^2 - 4z'')$  и  $z'' = t''^{n-2}$ . Поэтому

$$\mathbb{C}[x, y]^G \simeq \mathbb{C}[x'', y'', t'']/(y''^2 - t''(x''^2 - 4t''^{n-2})).$$

Легко преобразовать последнее уравнение к уравнению  $D_n$  из таблицы (7). Случай нечетного  $n$  разбирается аналогично. Вычисление кольца инвариантов для бинарных групп тетраэдра, октаэдра и икосаэдра прделывается немного сложнее (см. [9]).

## 12. КУММЕРОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть  $A$  – комплексный тор и пусть  $\tau: A \rightarrow A$  – инволюция  $\tau(y) = -y$ . Рассмотрим фактор  $V := A/\tau$  и пусть  $\pi: A \rightarrow V$  – морфизм факторизации. Поверхность  $V$  является особой: инволюция  $\tau$  имеет ровно 16 неподвижных точек  $P_1, \dots, P_{16} \in A$  и их образы  $Q_i := \pi(P_i)$  являются особыми точками  $V$ . Чтобы изучить характер этих особенностей введем локальные координаты  $z_1, z_2$ , согласованные со структурой комплексного тора, на  $A$  вблизи какой-либо точки, например,  $P_1 = 0$  (все точки  $P_i$  равноправны). Действие  $\tau$  имеет вид  $z_1 \rightarrow -z_1, z_2 \rightarrow -z_2$ . Голоморфными функциями в окрестности  $Q_i$  на  $V$  будут инвариантные голоморфные функции на  $X$ . Это кольцо порождается элементами  $v_1 = z_1^2, v_2 = z_2^2, v_3 = z_1z_2$ . Между ними имеется единственное соотношение  $v_1v_2 = v_3^2$ . Это показывает, что точки  $Q_i \in V$  – дювалевские типа  $A_1$  (т. е. аналитически эквивалентны точке, заданной уравнением  $v_1v_2 = v_3^2$ ). Локальная проверка показывает, что такие точки разрешаются одним раздутием (т. е. становятся неособыми после первого раздутия). Причем исключительные дивизоры неприводимы и являются  $(-2)$ -кривыми. Пусть  $\delta: X \rightarrow V$  – это раздутие. Утверждается, что  $X$  – КЗ поверхность. Чтобы показать это, мы дадим другую конструкцию поверхности

Х. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \delta \\ A & \xrightarrow{\pi} & V \end{array}$$

где  $\sigma: \tilde{A} \rightarrow A$  – раздутие точек  $P_1, \dots, P_{16}$ , а  $\varphi: A \rightarrow X$  – факторизация по инволюции  $\tau$  (так как мы раздували инвариантные точки, то действие  $\tau$  поднимается на  $A$ ). Локально, вблизи каждого исключительного дивизора  $\tilde{A}$  можно задать уравнением  $z_1 w_2 = z_2 w_1$  в  $A \times \mathbb{P}^1$ . Отсюда видно, что действие  $\tau$  на исключительных дивизорах  $E_i$  тривиально. Следовательно, в окрестности каждой точки  $Q \in E_i$  мы можем выбрать локальные координаты так, что действие  $\tau$  будет иметь вид  $x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow -x_2$ . В этом случае кольцо инвариантов порождается двумя элементами  $x_1$  и  $x_2^2$ , которые и являются локальными координатами на факторе. Следовательно,  $X = \tilde{A}/\tau$  – неособая поверхность.

Мы утверждаем, что  $K_X = 0$ . Действительно, на торе  $A$  существует  $\tau$ -инвариантная голоморфная 2-форма без нулей и полюсов, которая задает голоморфную 2-форму на  $V \setminus \text{Sing}(V)$  и на  $X \setminus \sum \varphi(E_i)$ . По принципу Хартогса эта форма продолжается на  $X$  и снова не имеет ни нулей, ни полюсов. Следовательно,  $K_X = 0$ . В частности, поверхность  $X$  минимальна.

С другой стороны, предполагая, что существует голоморфная 1-форма на  $X$  мы получим  $\tau$ -инвариантную голоморфную 1-форму на  $A \setminus \{P_1, \dots, P_{16}\}$ . Она продолжается на всю поверхность  $A$ , что невозможно.

Другой подход:

$$K_{\tilde{A}} = \sigma^* K_A + \sum E_i = \varphi^* K_X + \sum E_i \implies K_X = 0.$$

Далее

$$\begin{aligned} \text{Eu}(X) &= \frac{1}{2} \left( \text{Eu} \left( \tilde{A} \setminus \sum E_i \right) \right) + \sum \text{Eu}(E_i) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Eu} \left( A - \sum P_i \right) + 32 = 24. \end{aligned}$$

Следовательно,  $X$  – КЗ поверхность. Она называется *куммеровой поверхностью*  $\text{Kum}(A)$ . Заметим, что

$$\rho(X) = \rho(V) + 16 = \rho(A)^{(\tau)} + 16$$

Отметим также, что мероморфные функции на  $X$  – в точности  $\tau$ -инвариантные мероморфные функции на  $A$ . В частности,

$a(X) = a(A)$ . Поэтому несложно построить куммеровы поверхности с  $a(X) = 0, 1, 2$ , в частности, непроективные.

**12.1. Ранг Пикара произведений эллиптических кривых.** Пусть  $A = E \times E$ . Обозначим через  $E_1$  и  $E_2$  образующие, а через  $\Delta$  – диагональ. Пусть  $\varphi : E \rightarrow E$  – автоморфизм и  $D = \{(x, \varphi(x))\}$  – его график. По формуле для рода  $D^2 = \Delta^2 = 0$ . Предположим, что  $D \equiv a_1 E_2 + a_2 E_2 + b\Delta$ . Так как  $D \cdot E_1 = D \cdot E_2 = 1$ , то  $a_1 = a_2 := a$  и  $a + b = 1$ . Далее

$$0 = D^2 = 2a^2 + 4ab = 2a(a + 2b).$$

Пусть  $r$  – число неподвижных точек. Тогда

$$r = D \cdot \Delta = 2a.$$

Получаем две возможности:

- $a = 0, r = 0, D \equiv -\Delta$ , что невозможно.
- $a + 2b = 0, a = 2, b = -1, r = 4, D \equiv 2E_2 + 2E_2 - \Delta$ . В этом случае  $\varphi$  имеет порядок 2

**12.2. Следствие.** Если эллиптическая кривая  $(E, 0)$  имеет автоморфизм порядка  $> 2$ , то  $\rho(E \times E) = 4$  и  $\rho(\text{Kum}(E \times E)) = 20$ .

На такой куммеровой поверхности действует  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$  или  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z}[\zeta_3])$ .

8. Пусть  $(A, \Theta)$  – главнополяризованная абелева поверхность. Это означает, что  $\Theta$  – обильный дивизор на  $A$  такой, что  $\Theta^2 = 2$ . Например, якобиан кривой рода 2 является главнополяризованным абелевым многообразием. По теореме Римана-Роха  $\dim |\Theta| = 0$  и  $\dim |2\Theta| = 3$ . Отображение, заданное  $|2\Theta|$  является морфизмом  $\Phi_{|2\Theta|} : A \rightarrow \mathbb{P}^3$ . При этом  $\Phi_{|2\Theta|}(x) = \Phi_{|2\Theta|}(-x)$ . Поэтому  $\Phi_{|2\Theta|} : A \rightarrow \mathbb{P}^3$  пропускается через фактор  $A/(-1)$ :

$$\Phi_{|2\Theta|} : A \xrightarrow{\phi_1} A/(-1) \xrightarrow{\phi_2} \mathbb{P}^3$$

Если дивизор  $\Theta$  неприводим, то  $\phi_2$  – вложение и его образ – кватерника с 16-ю особыми точками.

**Задачи.**

1. Разберите подробно случай  $A = E_1 \times E_2$  и  $\Theta = \text{pr}_1(\text{pt}) + \text{pr}_2(\text{pt})$ .

## 13. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ

**13.1. Вырожденные слои.**

**9. Лемма Зарисского.** Пусть  $\pi: X \rightarrow B$  – доминантный проективный морфизм со связными слоями, где  $X$  – неособая поверхность, а  $B$  – неособая кривая. Пусть  $F := X_b = \sum m_i F_i$ ,  $b \in B$  – схемный слой, где  $F_i$  – неприводимые компоненты. Если  $D$  – дивизор с носителем в  $\sum F_i$ , то  $D^2 \leq 0$ . Более того, если  $D^2 = 0$ , то  $D$  численно пропорционален  $F$ . В частности, матрица пересечений  $\|F_i \cdot F_j\|$  полуотрицательно определена.

*Доказательство.* Положим  $G_i := m_i F_i$ . Таким образом,  $F = \sum G_i$  и мы можем записать  $D = \sum x_i G_i$  для некоторых  $x_i \in \mathbb{Q}$ . Так как  $G_i^2 = -\sum_{j \neq i} G_i \cdot G_j$ , то

$$\begin{aligned} D^2 &= \left( \sum x_i G_i \right)^2 = \sum_i x_i^2 G_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j G_i G_j = \\ &= -\sum_i \sum_{j \neq i} x_i^2 G_i \cdot G_j + 2 \sum_{i < j} x_i x_j G_i G_j = -\sum_{i < j} (x_i - x_j) G_i G_j \leq 0. \end{aligned}$$

□

**13.2. Лемма.** Пусть  $\pi: X \rightarrow B$  – относительно минимальное эллиптическое расслоение и пусть  $F := X_b = \sum m_i F_i$ ,  $b \in B$  – схемный слой, где  $F_i$  – неприводимые компоненты. Положим  $F_{\text{red}} := \sum F_i$ . Тогда

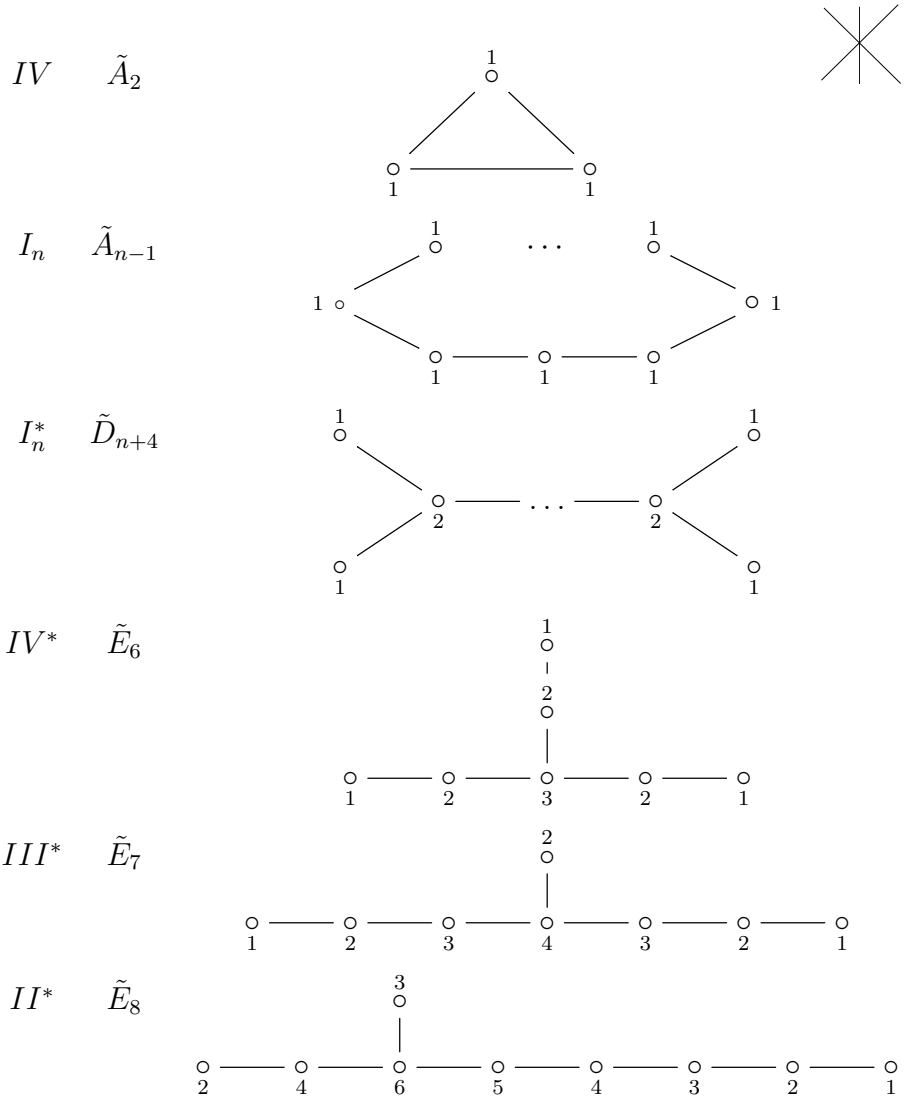
- (i)  $K_X \cdot F_i = 0$  для всех  $i$ .
- (ii) Пусть  $D$  – связная приведенная кривая такая, что  $D \neq \alpha F$  для  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Тогда  $D^2 = -2$ .
- (iii) Если  $F$  приводим, то все компоненты  $F_i$  –  $(-2)$ -кривые.
- (iv) Предположим, что  $F_{\text{red}} = D + D'$ , где  $D$  и  $D'$  связные приведенные кривые. Тогда  $D \cdot D' \leq 2$ . Более того, равенство достигается только если  $m_i = m_j$  для всех  $i, j$ , т. е.  $F = m F_{\text{red}}$ .
- (v) Если слой  $F$  является кратным, то он не односвязен, т. е. типа  $\tilde{A}_n$ .

I  $\tilde{A}_0$

II  $\tilde{A}_0$

III  $\tilde{A}_1$





13.3. Пусть  $\pi : X \rightarrow B = \mathbb{P}^1$  – относительно минимальное эллиптическое расслоение и пусть  $F_1, \dots, F_r$  – все его вырожденные слои такие, что  $(F_i)_{\text{red}}$  – не гладкая эллиптическая кривая. Тогда

$$(10) \quad \text{Eu}(X) = \sum \text{Eu}(F_i)_{\text{red}},$$

где

$$\text{Eu}(F_i) = \begin{cases} (\text{число компонент } F_i) + 1 & \text{если } F_i \text{ односвязен} \\ (\text{число компонент } F_i) & \text{если } F_i \text{ не односвязен} \end{cases}$$

**13.4. Следствие.** Пусть  $X$  – минимальная поверхность с  $\kappa(X) \geq 0$ . Предположим, что  $X$  допускает структуру эллиптического расслоения. Тогда  $\text{Eu}(X) \geq 0$  и  $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ .

**13.5. Теорема (формула для канонического дивизора).** Пусть  $\pi : X \rightarrow B$  – относительно минимальное эллиптическое расслоение и пусть  $m_1 F_1, \dots, m_r F_r$  – все его кратные слои. Тогда

$$(11) \quad K_X = \pi^*(K_B + \Xi) + \sum (m_i - 1) F_i$$

где  $\Xi$  – дивизор на  $B$  такой, что  $\deg \Xi = \chi(\mathcal{O}_X)$ .

**12. Замечание.**

(i) На самом деле пучок  $R^1 \pi_* \mathcal{O}_X$  обратим и  $\mathcal{O}_B(\Xi) = (R^1 \pi_* \mathcal{O}_X)^\vee$ .

(ii) Формулу (11) можно записать в виде

$$(13) \quad mK_X = \pi^* \left( mK_B + m\Xi + \sum (m - m/m_i) F_i \right),$$

где  $\text{lcm}(m_1, \dots, m_r)$ . Удобно также воспользоваться терминологией  $\mathbb{Q}$ -дивизоров:

$$(14) \quad K_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* \left( K_B + \Xi + \sum (1 - 1/m_i) F_i \right).$$

**13.6. Следствие.** Предположим, что  $K_X \sim 0$ . Тогда  $\pi$  не имеет кратных слоев.

*Доказательство.* Действительно, в этом случае  $\sum F_i = f^* \Theta$  для некоторого дивизора  $\Theta$  на  $B$ .  $\square$

**13.7. Следствие.** Предположим, что  $\pi$  имеет сечение  $\sigma$ . Тогда  $\Sigma^2 = -\chi(\mathcal{O}_X)$ .

*Доказательство.* В этом случае  $\pi$  не имеет кратных слоев. Пусть  $g$  – род кривой  $B$ . Имеем  $K_X \cdot \Sigma + \Sigma^2 = 2g - 2$ , где  $g$  – род  $B$ . Отсюда

$$\Sigma^2 = 2g - 2 - \Sigma \cdot \pi^*(K_B + \Xi) = -\Sigma \cdot \pi^* \Xi = -\chi(\mathcal{O}_X).$$

$\square$

## 14. ГРУППА МОРДЕЛЛА-ВЕЙЛЯ

**14.1.** Пусть  $\pi : X \rightarrow B$  – относительно минимальное эллиптическое расслоение. Предположим, что  $\pi$  имеет сечение  $\Sigma$ .

Имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \text{NS}(X) \longrightarrow \text{MW}(X) \longrightarrow 0.$$

где  $\Gamma$  – подгруппа в  $\text{NS}(X)$ , порожденная компонентами слоев и сечением  $\Sigma$ .

14.2. **Следствие.** *Группа  $MW(X)$  конечно порождена.*

Каждое другое сечение индуцирует автоморфизм сдвига

$$\tau_C : X_b \longrightarrow X_b, \quad \times \longmapsto x + (C - \Sigma)|_{X_b}$$

на каждом слое  $X_b$ . Это бирациональное отображение продолжается до автоморфизма  $\tau_C : X \rightarrow X$ . Получаем вложение

$$MW(X) \hookrightarrow \text{Aut}(X).$$

14.3. **Пример.** Пусть  $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$  – кубические кривые такие, что  $C_1 \cap C_2 = \{P_1, \dots, P_9\}$  – 9 различных точек. Пусть  $\sigma : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  – раздутие  $P_1, \dots, P_9$ ,  $L_i := \sigma^{-1}(P_i)$  – исключительные дивизоры и  $E_i$  – собственные прообразы  $C_i$ . Тогда  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  и поэтому  $|E_1| = |E_2|$  – эллиптический пучок без базисных точек, задающий расслоение  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Более того,  $|-K_X| = |E_i|$  и поэтому  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  относительно минимально. В этом случае  $\rho(X) = 10$ . Если кривые  $C_1, C_2$  – достаточно общие, то все слои  $\pi$  неприводимы и тогда  $\text{rk } \Gamma = 2$  и  $\text{rk } MW(X) = 8$ . Следовательно,  $\text{Aut}(X) \supset \mathbb{Z}^8$ . Отметим, что все сечения  $\pi$  являются  $(-1)$ -кривыми. Таким образом,  $X$  содержит бесконечно много  $(-1)$ -кривых.

## 15. МИНИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

15.1. **Теорема.** *Пусть  $X$  – неособая проективная поверхность.*

- (i) *Если  $\kappa(X) \geq 0$  и  $X$  не содержит  $(-1)$ -кривых, то  $K_X$  численно эффективен.*
- (ii) *Если  $K_X$  численно эффективен, то  $\kappa(X) \geq 0$  и  $X$  не содержит  $(-1)$ -кривых.*

*Доказательство.* (i) Предположим, что  $D \cdot C < 0$  для некоторой неприводимой кривой  $C$ . Так как  $\kappa(X) \geq 0$ , то для некоторого  $n > 0$  линейная система  $|nK_X|$  непуста. Пусть  $D \in |nK_X|$ . Тогда  $D \cdot C < 0$ . Следовательно,  $C$  – компонента  $D$  и  $C^2 < 0$ . По формуле для рода

$$2p_a(C) - 2 = K_X \cdot C + C^2 < 0.$$

Следовательно,  $p_a(C) = 0$ ,  $C \simeq \mathbb{P}^1$ ,  $C^2 = K_X \cdot C = -1$ , т. е.  $C$  –  $(-1)$ -кривая.

(ii) Если  $C \subset X$  –  $(-1)$ -кривая, то  $K_X \cdot C = -1$ . Противоречие. Предположим, что  $\kappa(X) = -\infty$ , т. е. линейная система  $|nK_X|$  пуста для любого  $n > 0$ . В частности,  $p_g(X) = 0$ . Так как  $K_X$  численно эффективен, то  $K_X^2 \geq 0$  и мы можем считать, что  $|nK_X| = \emptyset$  при  $n < 0$ . Тогда по теореме Римана-Роха

$$0 = \dim^0(X, nK_X) \geq \frac{1}{2}n(n-1)K_X^2 + \chi(\mathcal{O}_X)$$

при  $n > 0$ . Отсюда  $K_X^2 = 0$  и  $0 \geq \chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X)$ . По формуле Нётера

$$\begin{aligned} 2 - 2b_1(X) + b_2(X) &= 12(1 - q(X)), \\ b_2(X) &= 10 - 8q(X). \end{aligned}$$

Так как  $b_2(X) \geq 1$ , то получаем единственное решение:

$$q(X) = 1, \quad b_2(X) = 2, \quad \text{Eu}(X) = \chi(X) = 0.$$

Рассмотрим отображение Альбанезе его факторизацию Штейна:

$$\alpha : X \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \text{Alb}(X).$$

Здесь  $\text{Alb}(X)$  и  $B$  – эллиптические кривые и  $\pi$  – морфизм со связными слоями. По формуле для рода слои  $\pi$  – также эллиптические кривые. По формуле для канонического дивизора

$$K_X = \pi^*\Xi + \sum (m_i - 1)F_i, \quad \deg \Xi = \chi(\mathcal{O}_X) = 0,$$

Возьмем целое положительное  $m > 0$ , которое делится на все  $m_i$ . Тогда  $mF_i = \frac{m}{m_i}\pi^*(P_i)$ , где  $P_i = \pi(F_i)$ . Отсюда

$$mK_X = \pi^* \left( \Xi + \sum m(1 - 1/m_i)P_i \right).$$

Если  $\pi$  имеет кратные слои, то дивизор в правой части имеет положительную степень и тогда  $|mK_X| \neq \emptyset$ . Противоречие. Таким образом,  $\pi$  не имеет кратных слоев, а поскольку  $\text{Eu}(X) = 0$ , то  $\pi$  – гладкий морфизм (см. (10)). Более того,  $K_X = \pi^*\Xi \equiv 0$ .

Пусть  $F$  – типичный геометрический слой и пусть  $A$  – очень обильный дивизор на  $X$ . Пусть  $n := F \cdot A$ . На эллиптической кривой  $F$  существует ровно  $n^2$  точек  $P_i$  таких, что  $A|_F \sim nP_i$ . При вариации  $F$  эти точки заматают кривую  $D$ . При этом ограничение  $\pi|_D : D \rightarrow B$  этакльно степени  $n^2$ . Отсюда следует, что любая компонента  $C \subset D$  – эллиптическая кривая. Ясно, что  $F \cdot C > 0$ . По формуле для рода  $C^2 = 0$ . Так как  $(K_X + C)|_C \sim 0$ , то мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(K_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(K_X + C) \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

откуда получаем  $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + C)) \neq 0$ . Пусть  $G \in |K_X + C|$ . Тогда  $G^2 = 0$  и  $G$  имеет компоненту  $C' \neq C$ . В этом случае  $C'$  должна быть эллиптической кривой и  $C'^2 = 0$ . Пучок, порожденный  $nC$  и  $C'$  задает на  $X$  другую структуру эллиптического расслоения  $\varphi : X \rightarrow B_1$ . Мы утверждаем, что  $B_1 \simeq \mathbb{P}^1$ . Действительно,  $H^0(B_1, \Omega_{B_1}^1) \neq 0$  и поднимая 1-формы с  $B_1$  мы получим 1-формы на  $X$ , не обращающиеся в нуль вдоль слоев  $\pi$ . Это противоречит  $q(X) = 1$ . Применяя формулу для канонического дивизора к  $\varphi$



получим, что  $NK_X \sim 0$  для некоторого  $N \neq 0$ , т. е.  $\kappa(X) = 0$ . Противоречие.  $\square$

**15.2. Теорема.** Пусть  $X$  – неособая проективная поверхность с численно эффективным каноническим классом  $K_X$ . Тогда любое бирациональное отображение  $f : Y \dashrightarrow X$  является морфизмом.

*Доказательство.* Предположим, что  $f$  не является морфизмом. Рассмотрим разрешение неопределенностей отображения

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ g \swarrow & & \searrow h \\ Y & \overset{f}{\dashrightarrow} & X \end{array}$$

Пусть  $E_i \subset \text{Exc}(g)$  –  $g$ -исключительные дивизоры. Запишем

$$K_W = h^*K_X + \sum a_i E_i,$$

где  $a_i > 0$ . Среди компонент  $E_i$  имеется  $(-1)$ -кривая, скажем  $E_0$ . Так как  $K_X$  численно эффективен, то  $h^*K_X \cdot E_0 \geq 0$ . Так как  $K_W \cdot E_0 = -1$ , то  $(\sum a_i E_i) \cdot E_0 < 0$ . Значит  $E_0 \subset \text{Exc}(h)$ . Стянем  $E_0$ :

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ & \downarrow & \\ g \swarrow & W' & \searrow h \\ g' \swarrow & & \searrow h' \\ Y & \overset{f}{\dashrightarrow} & X \end{array}$$

По основной теореме Зарисского  $g'$  и  $h'$  – морфизмы. Продолжим процесс, заменяя  $W$  на  $W'$ . Добьемся того, что  $g$  – изоморфизм.  $\square$

**15.3. Следствие.** Пусть  $X$  – неособая проективная поверхность с численно эффективным каноническим классом  $K_X$ . Тогда любой бирациональный морфизм  $f : X \rightarrow X'$  является изоморфизмом.

*Доказательство.* По теореме выше  $f^{-1}$  – морфизм.  $\square$

**15.4. Следствие.** Пусть  $X$  – неособая проективная поверхность с численно эффективным каноническим классом  $K_X$ . Тогда  $\text{Bir}(X) = \text{Aut}(X)$ .

**15.5. Теорема (относительная версия).** Пусть  $X$  – неособая поверхность и пусть  $\pi : X \rightarrow B$  – проективный морфизм такой, что канонический класс  $K_X$  численно эффективен над  $B$ . Пусть  $Y$  – другая неособая поверхность и пусть  $\pi' : Y \rightarrow B$  – проективный

морфизм. Тогда любое бирациональное отображение  $f : Y \dashrightarrow X$  такое, что  $\pi \circ f = \pi'$  является морфизмом. ??????

**15.6. Следствие.** Минимальное разрешение особенностей существует.

**15.7. Следствие.** Пусть  $X$  – неособая поверхность и пусть  $\pi : X \rightarrow B$  – проективный морфизм со связными слоями на нормальное многообразие  $B$  такой, что канонический класс  $K_X$  численно эффективен над  $B$ . Тогда  $\text{Aut}(X_\eta) = \text{Bir}(X/B) = \text{Aut}(X/B)$ , где  $X_\eta$  – общий слой.

## 16. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ТИПА КЗ

**16.1. Предложение.** На поверхности типа КЗ  $X$  существует эллиптический пучок тогда и только тогда, когда на  $X$  существует дивизор  $D \not\sim 0$  такой, что  $D^2 = 0$ .

**16.2. Предложение.** Пусть  $X$  – поверхность типа КЗ с  $\rho(X) \geq 5$ . Тогда на  $X$  существует эллиптический пучок.

**16.3. Замечание.** Пусть  $\pi : X \rightarrow B$  – эллиптический пучок на КЗ поверхности  $X$ . Тогда

- (i)  $B \simeq \mathbb{P}^1$ ;
- (ii)  $\pi$  не имеет кратных слоев;
- (iii)  $\pi$  обязательно имеет вырожденные слои;
- (iv) если  $\pi$  имеет сечение  $C$ , то  $C$  –  $(-2)$ -кривая.

**16.4. Замечание.** Эллиптический пучок на КЗ поверхности необязательно имеет сечение.

**16.5. Пример.** Пусть  $X := \text{Kum}(A)$  – куммерова поверхность для абелевой поверхности  $A = E \times E$ . Тогда  $\rho(X) \geq 19$ . Имеется 4 вырожденных слоя типа  $\tilde{D}_4$ . Отсюда  $\text{rk } \Gamma = 4 \cdot 4 + 1 + 1 = 18$  и  $\text{rk } \text{MW}(X) \geq 1$ . Следовательно,  $\text{Aut}(X)$  бесконечна.

**16.6. Пример.** Пусть  $X = X_4 \subset \mathbb{P}^3$  – поверхность степени 4, содержащая прямую  $L$ . Рассмотрим пучок плоскостей  $\Pi_t$ ,  $t \in \mathbb{P}^1$ , проходящих через  $L$ . Для каждой  $\Pi_t$  имеем  $\Pi_t \cap X = L + C_t$ , где  $C_t$  – плоская кубическая кривая. Кривые  $C_t$  задают тогда эллиптический пучок на КЗ поверхности  $X$ , а прямая  $L$  является  $(-2)$ -кривой. Отметим, однако, что для общей кватрики имеем  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \cdot H$ . Следовательно, она не имеет структуры эллиптического расслоения.

### 16.7. Пример (квартика Ферма).

Рассмотрим кватрику в  $X \subset \mathbb{P}^3$ , заданную уравнением

$$x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 = 0.$$

Зафиксируем прямую

$$L_0 := \{x_1 = x_2, \quad x_3 = x_4\},$$

Квартика  $X \subset \mathbb{P}^3$  содержит также следующие прямые:

- $L_i := \{x_1^4 = x_2^4, \quad x_3^4 = x_4^4\}$ ,  $i \neq 0$  (15 прямых),
- $M_i := \{x_1^4 + x_3^4 = 0, \quad x_2^4 + x_4^4 = 0\}$ , (16 прямых),
- $N_i := \{x_1^4 = x_4^4, \quad x_2^4 = x_3^4\}$ , (16 прямых).

Прямые  $L_i$ ,  $i \neq 0$  не пересекают  $L_0$ . Имеется 8 точек пересечения

- $(\cup M_i) \cap L_0 = \{x_1 = x_2, \quad x_3 = x_4, \quad x_1^4 = -x_3^4\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ ,
- $(\cup N_i) \cap L_0 = \{x_1 = x_2, \quad x_3 = x_4, \quad x_1^4 = x_3^4\} = \{P_5, P_6, P_7, P_8\}$ .

Так как  $L_0 \cdot \sum M_i = L_0 \cdot \sum N_i = 4$ , то через каждую точку  $P_i$  проходит ровно одна прямая из множества  $(\cup M_i) \cup (\cup N_i)$ . С точностью до нумерации мы можем считать, что  $M_i \cap L_0 = P_i$  для  $i = 1, 2, 3, 4$  и  $N_j \cap L_0 = P_j$  для  $j = 5, 6, 7, 8$ . Рассмотрим проекцию  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  из прямой  $L_0$ . Слоями проекции будут кубические кривые  $X \cap \Pi - L_0$ , где  $\Pi$  – плоскость, проходящая через  $L_0$ . Имеется 8 вырожденных слоя  $X \cap \Pi_i - L_0$ , где  $\Pi_i$  – плоскость, проходящая через  $L_0 \cup M_i$  для  $i = 1, 2, 3, 4$  и проходящая через  $L_0 \cup N_i$  для  $i = 5, 6, 7, 8$ . Например,  $\Pi_5 = \{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ ,  $\Pi_5 \cap X = L_0 + N_1$ .

Квадратная форма  $x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 = 0$

Прямые  $L_0 = \{x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$

Прямые  $L_i = \{x_1^4 = x_2^4, x_3^4 = x_4^4\} \neq L_0$   
не пересекают  $L_0$  16 точек

Прямые  $M_i = \{x_1^4 + x_3^4 = 0, x_2^4 + x_4^4 = 0\}$  16 точек

$M_i = \{x_1^4 = x_4^4, x_2^4 = x_3^4\}$  16 точек

Точки принадлежат  $L_0$

$(\cup M_i) \cap L_0 = \{x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_1^4 + x_3^4 = 0\}$   
4 точки  $(1, 1, \sqrt{-1}, \sqrt{-1})$

$(\cup M_i) \cap L_0 = \{x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_1^4 = x_3^4\}$   
4 точки  $(1, 1, \sqrt{1}, \sqrt{1})$

-----  $L_0$

$M_i = \{x_3 = \sqrt[4]{-1}^k x_1, x_4 = \sqrt[4]{-1}^l x_2\}$

приходят крестом, 4 точки  $\Rightarrow k=l$   
4 точки

$M_i = \{x_4 = i^k x_1, x_3 = -i^l x_2\}$

приходят крестом, 4 точки  $\Rightarrow k=l$   
4 точки

Всего: 16 точек плюс 4 пары точек

Всего точек  $3 \cdot 24 = 72$  точек

Прямые, ортогональные  $L_0$ :

$$M \begin{cases} X_3 = \sqrt{-1} X_1, & X_4 = \sqrt{-1} X_2 \\ X_3 = -\sqrt{-1} X_1, & X_4 = -\sqrt{-1} X_2 \\ X_3 = \sqrt{-1} i X_1, & X_4 = \sqrt{-1} i X_2 \\ X_3 = -\sqrt{-1} i X_1, & X_4 = -\sqrt{-1} i X_2 \end{cases}$$

№1)  $\begin{cases} X_4 = X_1, & X_3 = X_2 \\ X_4 = -X_1, & X_3 = -X_2 \\ X_4 = i X_1, & X_3 = i X_2 \\ X_4 = -i X_1, & X_3 = -i X_2 \end{cases}$

Прямые, проходящие через точку  $(1, 1, 1, 1)$  и параллельные:

$(1, 1, 1, 1) \in L_0$ ,

№1: не проходит. №2: проходит.

Вероятно: Все четырехмерные случаи - трижды нули.

$$T_{1,1}(X) = 24 = f \cdot 3$$

Вероятно: имеется полтора  $f$  четырехмерных случаев. В них почти  $f \cdot 3 = 24$  случаев.

$$\text{Значение суммы} = 3 \cdot 16 - f \cdot 3 - 1 = 23.$$

Каждое значение не превышает  $L_0$ .

17. КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

$\kappa$	$X$	$q$	$K_X$	$\text{Eu}$
$-\infty$	рациональные	0	$K_X^2 = 8$ или 9	3 или 4
$-\infty$	линейчатые	$> 0$	$K_X^2 = 8(1 - q)$	$4(1 - q)$
	нерациональные			
0	абелевы	2	$K_X \sim 0$	0
0	КЗ	0	$K_X \sim 0$	24
0	поверхности Энриквеса	0	$2K_X \sim 0$	12
0	биэллиптические	1	$nK_X \sim 0, n \in \{2, 3, 4, 6\}$	0
1	эллиптические		$K_X^2 = 0$	$\geq 0$
2	общего типа		$K_X^2 > 0$	$> 0$

17.1. **Теорема.** Пусть  $X$  – минимальная поверхность с  $\kappa(X) = 0$ . Предположим, что на  $X$  имеется эллиптический пучок  $\pi : X \rightarrow B$ . Тогда

- (i)  $g(B) \leq 1$ ;
- (ii) если  $g(B) \leq 1$ , то  $\pi : X \rightarrow B$  локально тривиально;
- (iii) если  $g(B) = 0$ , то  $nK_X \sim 0$  для некоторого  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

*Доказательство.* Так как  $K_X$  численно эффективен, то  $K_X^2 \geq 0$ . Если  $K_X^2 > 0$ , то по теореме Римана-Роха  $\kappa(X) > 0$ . Поэтому  $K_X^2 = 0$ . По формуле Нетера

$$\text{Eu}(X) = 12\chi(\mathcal{O}_X), \quad b_2 + 8q(X) = 10 + 12p_g(X).$$

Если  $g(B) \geq 1$ , то  $\text{Eu}(X) \geq 0$ . Причем если  $g(B) = 1$ , то равенство  $\text{Eu}(X) = 0$  достигается только если все слои (с приведенной структурой) неособы. Поэтому при  $g(B) \geq 1$  имеем  $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ . По формуле для канонического дивизора (11)

$$K_X = \pi^*(K_B + \Xi) + \sum (m_i - 1)F_i, \quad mK_X = \pi^*L,$$

где  $m = \text{lcm}(m_i)$  – наименьшее общее кратное  $m_i$ , а  $L$  – дивизор на  $B$ . Так как  $\kappa(X) = 0$ , то  $\deg L = 0$ . Поэтому

$$\frac{1}{m} \deg L = 2g(B) - 2 + \chi(\mathcal{O}_X) + \sum \frac{m_i - 1}{m_i} = 0.$$

Отсюда  $g(B) \leq 1$ . Пусть  $g(B) = 1$ . Тогда  $\pi$  не имеет кратных слоев,  $\text{Eu}(X) = 0$ ,  $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$ ,  $\deg \Xi = 0$  и  $K_X = 0$ . Более того, все слои неприводимы в этом случае.

Пусть  $B \simeq \mathbb{P}^1$ . В этом случае  $n = m$ . Если  $K_X \not\sim 0$ , то  $p_g(X) = 0$  и  $b_2(X) + 8q(X) = 10$ . Следовательно,  $q \leq 1$  и  $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ . Тогда

$$\sum \frac{m_i - 1}{m_i} = 1 + q \leq 2.$$

Легко проверить, что  $\text{lcm}(m_i)$  принимает нужные значения.  $\square$

## 18. Биэллиптические поверхности

**18.1. Определение.** Компактная комплексная поверхность  $X$  с  $nK_X = 0$  для некоторого  $n > 1$ ,  $K_X \not\sim 0$  и  $q(X) = 1$  называется *биэллиптической поверхностью*.

**18.2. Предложение.** Пусть  $X$  – биэллиптическая поверхность. Тогда

- (i)  $\text{Eu}(X) = \chi(\mathcal{O}_X) = 0$ ,
- (ii)  $b_1(X) = b_2(X) = 2$ ,
- (iii)  $c_1 : \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  сюръективно.

Такая поверхность обязательно проективна.

**18.3.** Рассмотрим отображение Альбанезе

$$\alpha : X \longrightarrow \text{Alb}(X) = B.$$

Тогда  $B$  – эллиптическая кривая. Так как  $K_X \equiv 0$ , то  $\alpha$  – эллиптическое расслоение. Так как  $\text{Eu}(X) = 0$ , то все слои неприводимы. По формуле для канонического дивизора (11)

$$K_X = \alpha^*(K_B + \Xi) + \sum (m_i - 1)F_i, \quad \deg \Xi = \chi(\mathcal{O}_X) = 0,$$

Здесь  $K_B + \Xi \equiv 0$ . Следовательно,  $0 \equiv K_X = \sum (m_i - 1)F_i$  и поэтому  $\alpha$  не имеет вырожденных слоев. Дивизор кручения  $K_X$  задает этальное циклическое накрытие  $X' \rightarrow X$ . Здесь  $K_{X'} \sim 0$ ,  $\text{Eu}(X') = 0$ ,  $\chi(\mathcal{O}_{X'}) = 0$ ,  $p_g(X') = 1$ ,  $q(X') = 2$ . Следовательно,  $X'$  – абелева поверхность. Рассмотрим разложение Штейна:

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ B' & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

Здесь  $\alpha'$  – эллиптическое расслоение. Как и выше, по формуле для канонического дивизора (11)

$$0 = K_{X'} = \alpha'^*(K_{B'} + \Xi) + \sum (m'_i - 1)F'_i, \quad \deg \Xi = \chi(\mathcal{O}_{X'}) = 0,$$

Откуда получаем, что  $\alpha'$  не имеет вырожденных слоев и  $B'$  – эллиптическая кривая. Следовательно,  $\beta$  этально. По свойству универсальности отображений Альбанезе мы можем считать, что  $\alpha'$  – морфизм абелевых многообразий. По предложению 4.5 существует эллиптическая кривая  $E \subset X'$ , которая сюръективно отображается на  $B'$ . Сделаем замену базы:

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow \alpha'' & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ E & \xrightarrow{\beta'} & B' & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

Здесь  $X'' \simeq E \times C$ , где  $C$  – эллиптическая кривая, слой  $\alpha''$ . Морфизм  $E \rightarrow B$  – факторизация по группе сдвигов  $G$ . Следовательно,  $X \simeq (E \times C)/G$ .

**18.4. Конструкция.** Пусть  $E$  и  $C$  – эллиптические кривые и  $G$  – конечная подгруппа сдвигов на  $E$ , действующая на  $C$  не только сдвигами. Положим  $X = (C \times E)/G$  и  $B = E/G$ . Тогда  $X$  имеет структуру расслоения над  $B$  на эллиптические кривые изоморфные  $C$ .

Применим теперь формулу для канонического дивизора к (минимальному) эллиптическому расслоению  $\pi : X \rightarrow C/G \simeq \mathbb{P}^1$ :

$$K_X = \pi^*(K_{\mathbb{P}^1} + \Xi) + \sum (m_i - 1)F_i.$$

Здесь  $\Xi$  – дивизор степени  $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$  на  $\mathbb{P}^1$ . Поэтому  $\Xi \sim 0$ . Отсюда

$$\sum \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) = 2.$$

Это уравнение имеет следующие решения:

$$(m_1, \dots, m_r) = (2, 2, 2, 2), \quad (3, 3, 3), \quad (2, 4, 4), \quad (2, 3, 6).$$

Отсюда получаем следующую

**18.5. Теорема.** Пусть  $X$  – биэллиптическая поверхность. Тогда  $nK_X \sim 0$  для  $n \in \{2, 3, 4, 6\}$ .

Имеется полный список возможностей для  $C = \mathbb{C}/\Lambda$  и  $G$ :



$\Lambda$	$G$	действие $G$ на $C$
1 любая	$\mathbb{Z}_2$	$x \rightarrow -x$
2 любая	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$x \rightarrow -x, x \rightarrow x + a_0, 2a_0 = 0$
3 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$	$\mathbb{Z}_3$	$x \rightarrow \omega x$
4 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$	$x \rightarrow \omega x, x \rightarrow x + a_0, \omega a_0 = a_0$
5 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-1}$	$\mathbb{Z}_4$	$x \rightarrow \sqrt{-1}x$
6 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-1}$	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$	$x \rightarrow \sqrt{-1}x, x \rightarrow x + a_0, \sqrt{-1}a_0 = a_0$
7 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$	$\mathbb{Z}_6$	$x \rightarrow -\omega x$

Для таких поверхностей имеем  $nK_X \sim 0$  для  $n \in \{2, 3, 4, 6\}$ .

## 19. ПОВЕРХНОСТИ ЭНРИКВЕСА

**19.1. Определение.** Алгебраическая поверхность  $X$  с  $2K_X = 0$ ,  $K_X \not\sim 0$  и  $q(X) = 0$  называется *поверхностью Энриквеса*.

Эти условия дают нам  $K_X^2 = 0$ ,  $p_g = 0$ ,  $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$  и по формуле Нетера  $\text{Eu}(X) = 12$ . Следовательно,  $b_1(X) = 2q(X) = 0$  и  $b_2(X) = 10$ . Далее, из экспоненциальной последовательности имеем  $\text{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$ . По формулам универсальных коэффициентов

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq H_2(X, \mathbb{Z})_f \oplus H_1(X, \mathbb{Z})_t.$$

Поэтому элемент  $K_X$  задает элемент 2-кручения в  $H_1(X, \mathbb{Z})$  и, следовательно, неразветвленное двулистное накрытие  $\pi: Y \rightarrow X$ . Для  $Y$  имеем  $K_Y = 0$  и  $\text{Eu}(Y) = 2\text{Eu}(X) = 24$ . Это доказывает, что  $Y$  является КЗ поверхностью.

**19.2. Предложение.** *Каждая поверхность Энриквеса является фактором некоторой КЗ поверхности по инволюции, действующей без неподвижных точек. Обратно, каждый такой фактор является поверхностью Энриквеса.*

**19.3. Следствие.** *Пусть  $X$  – поверхность Энриквеса. Тогда*

- (i)  $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2$ ;
- (ii) *универсальная накрывающая  $X$  – поверхность типа КЗ;*
- (iii)  $\text{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{10} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Далее мы будем рассматривать решетку

$$\text{Pic}(X)_f := \text{Pic}(X) / \text{Pic}(X)_t \simeq H^2(X, \mathbb{Z}) / H^2(X, \mathbb{Z})_t.$$

**19.4. Пример.** Рассмотрим следующее полное пересечение  $Y = Y_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^5$ :

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, x_2) + g_1(x_3, x_4, x_5) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, x_2) + g_2(x_3, x_4, x_5) = 0 \\ f_3(x_0, x_1, x_2) + g_3(x_3, x_4, x_5) = 0 \end{cases}$$

Для общего выбора квадратичных форм  $f_i, g_i$   $Y$  является неособой поверхностью типа  $K3$ . Зададим действие инволюции

$$\tau: (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \longrightarrow (-x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3 : x_4 : x_5).$$

Если мы потребуем, чтобы системы уравнений  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$  и  $g_1 = g_2 = g_3 = 0$  не имели общих точек, то  $\tau$  не будет иметь неподвижных точек на  $Y$  и  $X := Y/\tau$  – поверхность Энриквеса.

**19.5. Предложение.** Пусть  $X$  – поверхность Энриквеса. Тогда

$$H^0(X, \mathcal{T}_X) = H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0, \quad \dim H^1(X, \mathcal{T}_X) = 10.$$

В частности, поверхности Энриквеса параметризуются 10-мерным комплексным многообразием.

*Доказательство.* Пусть  $\pi: Y \rightarrow X$  – фактор  $K3$  поверхности по инволюции. Так как  $Y$  не имеет нетривиальных голоморфных векторных полей, то же самое верно для  $X$ :  $H^0(X, \mathcal{T}_X) = 0$ . Далее  $\mathcal{K}_X \otimes \mathcal{T}_X^\vee = \mathcal{K}_X^\vee \otimes \Omega_X^1 = \mathcal{T}_X$ . Отсюда по двойственности Серра  $\dim H^2(X, \mathcal{T}_X) = \dim H^0(X, \mathcal{T}_X) = 0$ . Последнее равенство получается из теоремы Римана-Роха.  $\square$

Несложно проверить последнее утверждение на примере 19.4: таких поверхностей существует в точности 10-мерное семейство. Более того, известно, что многообразие модулей поверхностей Энриквеса неприводимо. Следовательно, почти любая поверхность Энриквеса может быть получена конструкцией из примера 19.4.

Можно расширить определение поверхностей Энриквеса в категорию компактных комплексных многообразий. Однако, в отличие от случая  $K3$  мы не получим ничего нового:

**19.6. Предложение.** Любая компактная комплексная поверхность Энриквеса проективна.

*Доказательство.* Так как  $\text{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$ , то по критерию проективности для поверхностей достаточно найти элемент  $\mathbf{x} \in H^2(X, \mathbb{Z})$  такой, что  $\mathbf{x}^2 > 0$ . Последнее следует из общей теоремы об индексе Тома-Хирцебруха 1.2.  $\square$

Рассмотрим другую реализацию поверхностей Энриквеса.

**19.7. Пример.** Пусть  $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  и пусть  $R \in |-2K_Q|$  – гладкая кривая бистепени  $(4, 4)$ . Как и в примере 6.7 рассмотрим двулистное накрытие  $f: Y \rightarrow Q$  с дивизором ветвления  $R$ . Тогда  $Y$  –  $K3$  поверхность. Рассмотрим инволюцию  $\tau$  на  $Q$ , действующую по правилу

$$\tau: ((u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) \longmapsto ((u_0 : -u_1), (v_0 : -v_1)),$$

где  $u, v$  – неоднородные координаты на каждом  $\mathbb{P}^1$ . Рассмотрим вложение Сегре  $Q \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ ,

$$((u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) \longmapsto (x_0 = u_0 v_0 x_1 = u_0 v_1 : x_2 = u_1 v_0 : x_3 = u_1 v_1)$$

Тогда  $Q \subset \mathbb{P}^3$  задается уравнением

$$x_0 x_3 = x_1 x_2,$$

а инволюция  $\tau$  действует как

$$\tau : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \longmapsto (x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3).$$

Кольцо инвариантов порождается многочленами

$$z_0 = x_0^2, \quad z_1 = x_3^2, \quad z_2 = x_0 x_3, \quad z_3 = x_1^2, \quad z_4 = x_2^2, \quad z_5 = x_1 x_2.$$

Между ними имеется ровно два соотношения:

$$(15) \quad z_0 z_1 = z_2^2, \quad z_3 z_4 = z_5^2.$$

Таким образом,  $\mathbb{P}^3/\tau$  изоморфно пересечению двух квадрик (15) в  $\mathbb{P}^5$ . Тогда  $Q/\tau$  задается в  $\mathbb{P}^5$  уравнениями (15) и дополнительным уравнением  $z_5 = z_2$ . Иначе говоря,  $Q/\tau$  задается в  $\mathbb{P}^4$  уравнениями

$$z_0 z_1 = z_2^2, \quad z_3 z_4 = z_2^2.$$

Эта поверхность имеет 4 особенности типа  $A_1$  в точках

$$(1 : 0 : 0 : 0 : 0), \quad (0 : 1 : 0 : 0 : 0), \quad (0 : 0 : 0 : 1 : 0), \quad (0 : 0 : 0 : 0 : 1).$$

Легко видеть, что  $\tau$  имеет ровно 4 неподвижные точки  $P_i$ , соответствующие координатным вершинам. Любая кривая  $R \subset Q$  бистепени  $(4, 4)$  высекается на  $Q$  некоторой поверхностью  $W$  степени 4. Поверхность  $Y$  может быть задана в  $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$  двумя уравнениями

$$x_0 x_3 = x_1 x_2, \quad y^2 = \phi(x_0, \dots, x_3),$$

где  $\phi = 0$  – уравнение  $W$ . Мы предполагаем, что  $\phi$  – инвариант относительно  $\tau$ . Тогда  $\tau$  поднимается на  $Y$ :

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : y) \longmapsto (x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3 : -y).$$

Если кривая  $R$  не проходит через  $P_i$ , то инволюция  $\tau$  не имеет на  $Y$  неподвижных точек и фактор  $X := Y/\tau$  является поверхностью Энриквеса.

Прообразы пучков прямых  $f^{-1}(L_x)$  и  $f^{-1}(L'_y)$  являются пучками эллиптических кривых на  $Y$  (по формуле Гурвица так как морфизмы  $f^{-1}(L_x) \rightarrow L_x$  разветвлены в 4 точках пересечения  $L_x \cap R$ ). Оба пучка спускаются до эллиптических пучков на  $X$ .

16. Посчитаем количество параметров в последнем примере. Кривая  $R$  задается биоднородным многочленом  $\psi(u_0, u_1; v_0, v_1)$  бистепени  $(4, 4)$ . Она будет инвариантной тогда и только тогда, когда сумма степеней  $u_1$  и  $v_1$  четна. Пространство таких многочленов 13-мерно. По модулю скалярных умножений и проективных преобразований  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  нормализующих нашу инволюцию имеется  $13 - 2 - 1 = 10$ -мерное семейство таких кривых, а, следовательно, и поверхностей  $X$ . Это подтверждает следующий факт: общая поверхность Энриквеса может быть получена при помощи конструкции из примера 19.7.

При вырождении конструкции из примера 19.7 поверхность  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  деформируется в квадратичный конус, а эллиптические пучки “сливаются”:

19.8. **Пример.** Пусть  $Q \subset \mathbb{P}^3$  – квадратичный конус  $\{x_0^2 = x_1x_2\}$  и пусть  $R \in |-2K_Q|$  – гладкая кривая, высекаемая поверхностью  $W$  степени 4. Рассмотрим двулистное накрытие  $f: Y \rightarrow Q$  с дивизором ветвления  $R$ . Тогда  $Y$  – КЗ поверхность. Рассмотрим инволюцию  $\tau$  на  $Q$ , действующую по правилу

$$\tau: (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \longmapsto (x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3).$$

Тогда  $Q/\tau$  задается в  $\mathbb{P}^5$  уравнениями (15) и дополнительным уравнением  $z_5 = z_0$ . Иначе говоря,  $Q/\tau$  задается в  $\mathbb{P}^4$  уравнениями

$$z_0z_1 = z_2^2 \quad z_3z_4 = z_0^2.$$

Эта поверхность имеет 2 особенности типа  $A_1$  в точках

$$(0 : 0 : 0 : 1 : 0), \quad (0 : 0 : 0 : 0 : 1).$$

и одну особенность  $A_3$  в  $(0 : 1 : 0 : 0 : 0)$ .

Легко видеть, что  $\tau$  имеет ровно 3 неподвижные точки на  $Q$ :  $P_0 = (0 : 0 : 0 : 1)$  (вершина конуса),  $P_1 = (0 : 1 : 0 : 0)$  и  $P_2 = (0 : 0 : 1 : 0)$ . Поверхность  $Y$  может быть задана в  $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$  двумя уравнениями

$$x_0^2 = x_1x_2, \quad y^2 = \phi(x_0, \dots, x_3),$$

где  $\phi = 0$  – уравнение  $W$ . Мы предполагаем, что  $\phi$  – инвариант относительно  $\tau$ . Тогда  $\tau$  поднимается на  $Y$ :

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : y) \longmapsto (x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3 : -y).$$

Если кривая  $R$  не проходит через  $P_i$ , то инволюция  $\tau$  не имеет на  $Y$  неподвижных точек. Однако в нашем случае  $Y$  имеет две особые точки типа  $A_1$  – прообразы  $P_0$ . Пусть  $\tilde{Y}$  – минимальное разрешение. Тогда фактор  $X := \tilde{Y}/\tau$  является поверхностью Энриквеса.

Прообраз пучка прямых  $f^{-1}(L_x)$  является эллиптическим пучком на  $\tilde{Y}$ . Он спускается до эллиптического пучка на  $X$ .

17. Посчитаем количество параметров в последнем примере. Кривая  $R$  задается однородным многочленом  $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$  степени 4. Она будет инвариантной тогда и только тогда, когда сумма степеней  $x_1$  и  $x_2$  четна. Пусть  $V \subset H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4))$  – пространство всех таких многочленов. Рассмотрим точную последовательность:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) \xrightarrow{\zeta} H^0(Q, \mathcal{O}_Q(4)) \longrightarrow 0$$

Имеем  $\dim V = 19$  и  $\dim \zeta(V) = 19 - 6 = 13$ . По модулю скалярных умножений и проективных преобразований  $Q$  нормализующих нашу инволюцию имеется  $13 - 1 - 3 = 9$ -мерное семейство таких кривых, а, следовательно, и поверхностей  $X$ .

18. **Замечание.** На  $Y$  действует также инволюция Галуа  $\sigma : Y \rightarrow Y$  двойного накрытия  $f : Y \rightarrow Q$ :

$$\sigma : (x_0 : \dots : x_3, y) \longmapsto (x_0 : \dots : x_3, -y).$$

Инволюции  $\sigma$  и  $\tau$  коммутируют. Поэтому действие  $\sigma$  опускается на  $X$ . Неподвижные точки действия на  $X$ : неособая кривая (образ  $y = 0$ ) и 4 изолированные неподвижные точки. Таким образом,  $Z := X/\sigma$  – поверхность с 4-мя особыми точками типа  $A_1$ . На самом деле,  $Z = Q/\tau$ .

19. Таким образом,  $Z := Q/\tau$  одним из следующих способов:

$$\text{а) } z_0 z_1 = z_3 z_4 = z_2^2, \quad \text{б) } z_0 z_1 = z_2^2, \quad z_3 z_4 = z_0^2$$

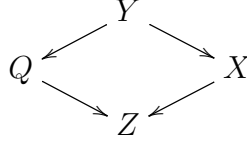
При этом в случае а)  $Z$  имеет четыре  $A_1$ -точки  $(1 : 0 : 0 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 0 : 0 : 1)$ , а в случае б)  $Z$  имеет две  $A_1$ -точки  $(0 : 0 : 0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 0 : 0 : 1)$  и одну  $A_3$ -точку  $(0 : 1 : 0 : 0 : 0)$ . В случае а) гиперплоскость  $z_2 = 0$  высекает на  $Z$  четыре прямые  $L_1, \dots, L_4$ . Прообразы этих прямых на минимальном разрешении  $\mu : \tilde{Z} \rightarrow Z$  являются  $(-1)$ -кривыми и не пересекаются. Стягивание этой четверки приводит к  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . В этом случае  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , а  $L_i$  – дивизоры Вейля на  $X$  такие, что  $L_1 - L_2 = L_3 - L_4$  – элемент второго порядка в  $\text{Cl}(X)$ .

В случае б)  $Z$  содержит две прямые, которые образуют конфигурацию  $L_1 := \{z_0 = z_2 = z_3 = 0\}$ ,  $L_2 := \{z_0 = z_2 = z_4 = 0\}$

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & & L_1 & & A_3 & & L_2 & & A_1 \\ \circ & \text{---} & \bullet & \text{---} & \circ & \text{---} & \bullet & \text{---} & \circ \end{array}$$

В этом случае  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ , а  $L_1, L_2$  – дивизоры Вейля на  $X$  такие, что  $L_1 - L_2$  – элемент второго порядка в  $\text{Cl}(X)$ .

20. Получаем диаграмму



где  $Z := Q/\tau = X/\sigma = Y/\langle \tau, \sigma \rangle$ .

Вывод: с каждым представлением  $X$  в виде двойной квадрики связана инволюция  $\sigma : X \rightarrow X$ .

## 20. РЕШЕТКА ПИКАРА ПОВЕРХНОСТИ ЭНРИКВЕСА

20.1. Напомним, что  $\text{Pic}(X)_f := \text{Pic}(X)/\text{Pic}(X)_t$ . Решетка  $\text{Pic}(X)_f$  унимодулярна, четна и имеет сигнатуру  $(1, 9)$ . Согласно общей теории [11] она изоморфна  $E_8 \oplus U$ . Решетка  $\text{Pic}(X)_f$  допускает следующее описание (ср. [12, гл. IV]).

20.2. Рассмотрим стандартную гиперболическую решетку  $N = \mathbb{Z}^{11}$  с ортогональным базисом  $\mathbf{h}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{10}$ , где

$$\mathbf{h}^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1^2 = \dots = \mathbf{e}_{10}^2 = -1.$$

Пусть

$$\mathbf{k} := -3\mathbf{h} + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_{10}.$$

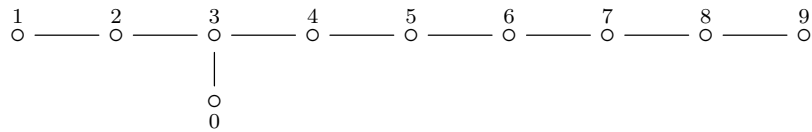
Так как  $\mathbf{k}^2 = -1$ , то ортогональное дополнение  $M := \mathbf{k}^\perp$  имеет сигнатуру  $(1, 9)$  и унимодулярно. Выберем базис в  $\mathbf{k}^\perp$ :

$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{h} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 9.$$

Таким образом, можно отождествить  $\text{Pic}(X)_f = \mathbf{k}^\perp$ . Легко видеть, что

$$(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \begin{cases} -2 & \text{если } i = j, \\ 1 & \text{если } i = 0, j = 3 \text{ или } i - j = 1, j > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда видно, что решетка  $M := \mathbf{k}^\perp$  четна. В этом случае  $M \simeq U \oplus E_8$  ([11]). Мы можем сопоставить базису  $\mathbf{r}_i$  граф  $T_{2,3,7}$ :



Отсюда сразу видно, что  $\langle \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_7 \rangle$  – подрешетка типа  $E_8$ . Зафиксируем изоморфизм  $\text{Pic}(X)_f \simeq M$ .

20.3. Элементы  $\alpha \in M$  такие, что  $\alpha^2 = -2$  называются *корнями*. Множество всех корней обозначим через  $R$ . Таким образом,

$$R := \{\alpha \in N \mid \alpha^2 = -2, \quad \alpha \cdot \mathbf{k} = 0\}.$$

Рассмотрим также множество

$$I := \{\mathbf{x} \in N \mid \mathbf{x}^2 = -1, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = -1\}.$$

Элементы этого множества называются *исключительными*. Действие отражений  $s_\alpha$  и всей группы  $W$  естественным образом продолжается на всю решетку  $N$  так, что вектор  $\mathbf{k}$  инвариантен.

20.4. Напомним [13], что *системой Кокстера* называется пара  $(W, S)$ , состоящая из группы  $W$  и подмножества  $S \subset W$  элементов второго порядка. Эта система может быть восстановлена по  $S$  и соотношениям  $s^2 = 1$ ,  $(ss')^{m(s,s')} = 1$ , где  $m(s, s')$  – порядок элемента  $ss'$  для  $s, s' \in S$ . Система Кокстера может быть изображена графом, у которого вершины соответствуют элементам  $S$  и две различные вершины  $s, s'$  соединяются ребром если  $m(s, s') > 2$ . Если  $m(s, s') > 3$ , то ребру приписывается вес  $m(s, s') - 2$ . В нашей ситуации граф  $T_{2,3,7}$  задает систему Кокстера.

20.5. Обозначим через  $s_\alpha$  отражение

$$s_\alpha : M \longrightarrow M, \quad x \longmapsto x + (x, \alpha)\alpha.$$

Так как  $\alpha^2 = -2$ , то  $s_\alpha^2 = \mathbf{1}$ . Обозначим через  $W$  подгруппу в  $O(M)$ , порожденную всеми отражениями  $s_\alpha$ .

20.6. **Лемма.** *Если  $x \in M$  представляет эффективный дивизор с  $x^2 \geq 0$ , то и  $s_\alpha(x)$  представляет эффективный дивизор с  $s_\alpha(x)^2 \geq 0$ . Если  $X$  не содержит  $(-2)$ -кривых, то  $s_\alpha$  переводит в себя полуруппу классов эффективных дивизоров.*

*Доказательство.*  $s_\alpha$  изометрия, поэтому  $s_\alpha(x)^2 \geq 0$ . По теореме Римана-Роха или  $s_\alpha(x)$  или  $K_X - s_\alpha(x)$  эффективен. Гиперплоскость неподвижных точек  $s_\alpha$  пересекает обе компоненты конуса  $x^2 > 0$ . Следовательно,  $s_\alpha$  не может переставлять эти компоненты.  $\square$

20.7. Обозначим  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$ ,

$$\text{KP}_{\mathbb{R}}(N) := \{\mathbf{x} \in N_{\mathbb{R}} \mid \mathbf{x}^2 \geq 0\}, \quad \text{KP}(N) := \text{KP}_{\mathbb{R}}(N) \cap N.$$

Ясно, что  $\text{KP}_{\mathbb{R}}(N) \setminus \{0\}$  имеет две компоненты связности:

$$\text{KP}_{\mathbb{R}}(N) = \text{KP}_{\mathbb{R}}^+(N) \cup \text{KP}_{\mathbb{R}}^-(N), \quad \text{KP}_{\mathbb{R}}^-(N) = -\text{KP}_{\mathbb{R}}^+(N).$$

Положим  $K\mathbb{R}^\pm(N) := K\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^\pm(N) \cap N$ . Выберем индексацию так, что  $\mathbf{h} \in K\mathbb{R}^+(N)$ . Рассмотрим полугруппу  $\overline{NE}(N) \subset N$ , порожденную  $K\mathbb{R}^+(N)$  и  $I$ .

## 21. ДИВИЗОРЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ЭНРИКВЕСА

**21.1. Предложение.** Пусть  $D$  – численно эффективный дивизор на поверхности Энриквеса  $X$ . Если  $D \neq K_X$ , то

$$\dim |D| \geq D^2.$$

Если  $D^2 > 0$ , то имеет место равенство  $\dim |D| = D^2$ .

**21.2. Предложение.** Пусть  $C$  – неприводимая кривая на поверхности Энриквеса  $X$ . Если  $C^2 < 0$ , то  $C$  –  $(-2)$ -кривая.

Нам понадобится аналог теоремы 7.5.

**21.3. Предложение.** Пусть  $C$  – неприводимая кривая на поверхности Энриквеса  $X$  с  $C^2 \geq 4$  и пусть  $Y := \Phi_{|C|}(X)$ . Предположим, что  $|C|$  не составлена из пучка и  $\deg \Phi_{|C|} > 1$ . Тогда имеет место один из следующих случаев:

- (i)  $C^2 = 4$  и  $\Phi_{|C|} : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  – конечный в общей точке морфизм степени 4;
- (ii)  $C^2 = 6$  и  $\Phi_{|C|} : X \rightarrow Y = Y_2 \subset \mathbb{P}^3$  – конечный в общей точке морфизм степени 3 на квадрату;
- (iii)  $C^2 \geq 6$ ,  $\Phi_{|C|} : X \rightarrow Y = Y_N \subset \mathbb{P}^N$  – конечный в общей точке морфизм степени 2 на поверхность степени  $N$ , где  $N = C^2/2$ ;
- (iv)  $|C|$  имеет две простые базисные точки,  $\Phi_{|C|} : X \dashrightarrow Y = Y_N \subset \mathbb{P}^N$  – конечное в общей точке отображение степени 2 на поверхность минимальной степени  $N - 1$ , где  $N = C^2/2$ ;
- (v)  $|C|$  имеет одну простую базисную точку,  $\Phi_{|C|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  – конечное в общей точке отображение степени 3.

*Доказательство.* Рассмотрим минимальное разрешение точек неопределенности отображения  $\Phi_{|C|} : X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$ ,  $N = \dim |C| = C^2/2$ :

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \varphi \\ X & \overset{\Phi_{|C|}}{\dashrightarrow} & Y \end{array}$$

Пусть  $C' \subset W$  – собственный прообраз общего элемента  $C \in |C|$ . Тогда

$$(\deg \Phi_{|C|}) \cdot (\deg Y) = (\deg \varphi) \cdot (\deg Y) = C'^2 \leq C^2,$$



где равенство  $C'^2 = C^2$  имеет место если и только если  $\Phi_{|C|}$  – морфизм. Более того, разность  $C^2 - C'^2$  равна числу базисных точек линейной системы  $|C|$  (включая бесконечно близкие). С другой стороны,

$$\deg Y \geq \operatorname{codim} Y + 1 = C^2/2 - 1$$

(см. [10, гл. 4, §3]). Отсюда

$$2C^2 \geq (\deg \Phi_{|C|}) \cdot (C^2 - 2).$$

Если  $\deg \varphi \geq 4$ , то  $C^2 = 4$ ,  $N = 2$ ,  $Y = \mathbb{P}^2$  и все неравенства выше являются, на самом деле, равенствами. Мы получаем случай (i).

Рассмотрим случай  $\deg \varphi = 3$ . Тогда  $C^2 \leq 6$ . Если  $C^2 = 6$ , то  $N = 3$  и, как и выше, все неравенства являются равенствами. В частности,  $\deg Y = C^2/3$ , т. е.  $Y = Y_2 \subset \mathbb{P}^3$  – квадрика. Мы получаем случай (ii). Если же  $C^2 = 4$ , то  $N = 2$ ,  $Y = \mathbb{P}^2$ ,  $C'^2 = 3$  и линейная система  $|C|$  имеет единственную (простую) базисную точку. Мы получаем случай (v). Случай  $\deg \varphi = 2$  может быть рассмотрен аналогично и оставляется читателю.  $\square$

## 22. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ЭНРИКВЕСА

**22.1. Теорема.** Пусть  $\pi : X \rightarrow B = \mathbb{P}^1$  – эллиптический пучок на поверхности Энриквеса. Тогда  $\pi$  имеет ровно два кратных слоя  $X_{b_1}$  и  $X_{b_2}$  и кратности этих слоев равны 2. Если мы запишем  $X_{b_i} = 2F_i$ ,  $i = 1, 2$ , то  $F_1 - F_2 \sim K_X$ .

*Доказательство.* Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-F_1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{F_1} \longrightarrow 0.$$

Из нее и двойственности Серра получаем

$$H^1(F_1, \mathcal{O}_{F_1}) \simeq H^2(X, \mathcal{O}_X(-F_1)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + F_1)).$$

Так как  $F_1$  – связная приведенная кривая арифметического рода 1, то  $\omega_{F_1} \simeq \mathcal{O}_{F_1}$ . Тогда по двойственности Серра  $h^1(F_1, \mathcal{O}_{F_1}) = h^0(F_1, \mathcal{O}_{F_1}) = 1$ . Следовательно, мы можем считать дивизор  $K_X + F_1$  эффективным.  $\square$

**22.2. Теорема.** Любая поверхность Энриквеса имеет структуру эллиптического расслоения над  $\mathbb{P}^1$ .

*Доказательство.* Согласно [11, Гл. V, §2, теорема 3] форма пересечения на  $\operatorname{Pic}(X)_f$  представляет 0, поэтому существует дивизор  $D$  такой, что  $D^2 = 0$ . По теореме Римана-Роха  $h^0(X, D) + h^0(K_X - D) \geq 1$ . Поэтому мы можем считать  $D$  эффективным.

**22.3. Лемма.** Если  $C$  – неприводимая кривая такая, что  $D \cdot C < 0$ , то  $C$  –  $(-2)$ -кривая.

*Доказательство.* Ясно, что  $C^2 < 0$ . По формуле для рода  $2p_a(C) - 2 = K_X \cdot C + C^2 < 0$ .  $\square$

**22.4. Лемма.** Последовательным применением отражений  $s_\alpha$  можно заменить дивизор  $D$  на  $D^\bullet$  такой, что  $D^{\bullet 2} = 0$ ,  $D^\bullet \neq 0$ ,  $D^\bullet$  эффективен и численно эффективен.

*Доказательство.* Зафиксируем обильный дивизор  $A$ . Предположим, что  $D$  не численно эффективен. Существует неприводимая кривая  $C$  такая, что  $D \cdot C < 0$ . Тогда  $C$  является  $(-2)$ -кривой. Положим  $D' := s_C(D)$ . Тогда  $D'^2 = 0$ ,  $D' \neq 0$  и  $D'$  эффективен (по лемме 20.6). Имеем

$$A \cdot D' = A \cdot D + (D \cdot C)(A \cdot C) < A \cdot D.$$

После конечного числа шагов процесс должен оборваться.  $\square$

**22.5. Лемма.** (i) Если  $\mathcal{O}_D(D) \simeq \mathcal{O}_D$ , то  $\dim |D| \geq 1$ .  
(ii) Если  $\mathcal{O}_D(D) \not\simeq \mathcal{O}_D$ , то  $\dim |2D| \geq 1$ .

*Доказательство.* (i) Воспользуемся точной последовательностью

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_D(D) \longrightarrow 0.$$

(ii) Дивизор  $D' = D + K_X$  удовлетворяет тем же условиям. В частности,  $D'$  можно считать эффективным. Тогда  $D' \neq D$  и  $2D \sim 2D'$ . Следовательно,  $\dim |2D| \geq 1$ .  $\square$

**22.6. Лемма.** Если  $D$  – численно эффективный дивизор на  $X$  такой, что  $D^2 = 0$  и  $\dim |D| \geq 1$ , то  $|nD|$  определяет эллиптический пучок на  $X$ .

*Доказательство.* Запишем  $|D| = F + |M|$ . Тогда

$$0 = D^2 = D \cdot M + D \cdot F \implies 0 = D \cdot M = F \cdot M + M^2 \implies M^2 = 0.$$

Заменяем  $D$  на  $M$ . Так как  $M^2 = 0$ , то  $|M|$  не имеет базисных точек. Тогда  $|nM|$  определяет эллиптический пучок  $\Phi_{|nM|} : X \rightarrow B \subset \mathbb{P}^N$ ,  $B \simeq \mathbb{P}^1$ . Причем,  $F$  лежит в слоях. Так как  $F^2 = 0$ , то по лемме Зарисского  $mF$  – сумма схемных слоев, т. е.  $F$  пропорционален  $M$  и  $D$ .  $\square$

Это доказывает теорему.  $\square$

**22.7. Следствие.** Если  $X$  не содержит  $(-2)$ -кривых, то каждый элемент  $\mathbf{x} \in \text{Pic}(X)_{\mathfrak{f}}$  такой, что  $\mathbf{x}^2 = 0$  определяет эллиптический пучок. В частности, имеется взаимно однозначное соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{эллиптические} \\ \text{пучки на } X \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{изотропные прямые} \\ \text{в } \text{Pic}(X)_{\mathfrak{f}}. \end{array} \right\}$$

**22.8. Теорема.** Пусть  $\pi : X \rightarrow B = \mathbb{P}^1$  – эллиптический пучок на поверхности Энриквеса. Тогда существует 2-сечение  $C \subset X$  такое, что  $C^2 \leq 0$ . Имеются две возможности:

- (i)  $C^2 = 0$  и  $C$  – кратный слой другого эллиптического пучка;
- (ii)  $C^2 = -2$  и  $C$  –  $(-2)$ -кривая.

*Доказательство.*

**22.9. Лемма.** В условиях теоремы 22.8 пусть  $2F_1$  – кратный слой  $\pi$ . Тогда  $F_1$  представляет примитивный элемент  $\text{Pic}(X)_{\mathfrak{f}}$ .

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда  $F_1 \sim mL + T$ , где  $T$  – элемент кручения и  $m > 1$ . По теореме Римана-Роха  $L$  эффективен и по лемме Зарисского  $\text{Supp}(L) = \text{Supp}(F_1)$ . Так как  $\pi$  не имеет слоев кратности  $> 2$ , то  $F_1 \sim mL + K_X$ . Но в этом случае  $mL \sim F_1 + K_X \sim F_2$ , где  $2F_2$  – второй кратный слой. Это значит, что  $\dim |F_2| > 0$ . Противоречие.  $\square$

Так как  $F_1$  примитивен, то существует  $D \in \text{Pic}(X)$  такой, что  $F_1 \cdot D = 1$ . Заменяем его на  $D' = D - \frac{1}{2}D^2F_1$ . Тогда  $D'^2 = 0$  и мы можем считать дивизор  $D$  эффективным по теореме Римана-Роха. Распишем

$$D = C + \sum n_i D_i, \quad C \cdot F_1 = 1.$$

Таким образом,  $\sum n_i D_i$  лежит в слоях. Остается показать, что  $C^2 \leq 0$ . Пусть  $C^2 > 0$ . Кривая  $D_i$  лежит в некотором слое. Тогда

$$0 = D^2 = D \cdot C + \sum n_i D_i \cdot D, \quad D \cdot C = C^2 + \sum n_i D_i \cdot C$$

Отсюда  $D \cdot C > 0$ ,  $\sum n_i D_i \cdot D < 0$ . По теореме Римана-Роха  $\dim |C| > 0$ . Так как кривая  $F_1$  приведена, то  $h^0(F_1 \mathcal{O}_{F_1}) = 1$ . Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(C - F_1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(C)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{F_1}(C))$$

Поэтому имеет место представление

$$C \sim C' + F_1 + G,$$

где  $C'$  – 2-сечение,  $G$  – эффективный дивизор с носителем в слоях. В этом случае

$$C'^2 = (C - F_1 - G)^2 = C^2 - 2 - 2C \cdot G + (F_1 + G)^2 < C^2.$$

Продолжая процесс, добьемся  $C^2 \leq 0$ . □

**22.10. Следствие.** *Для каждого эллиптического пучка  $\pi : X \rightarrow B = \mathbb{P}^1$ , как в теореме (i) классы кривых  $F_1, C$  определяют вложение  $U \hookrightarrow \text{Pic}(X)_\mathbb{R}$ .*

**22.11. Теорема.** *Пусть  $X$  – неспециальная поверхность Энриквеса и пусть  $|2F_1|, |2F_2|$  – эллиптические пучки на  $X$  такие, что  $F_1 \cdot F_2 = 1$ . Тогда  $X$  получается конструкцией 19.7 фактора двойной квадратики  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  по инволюции.*

*Доказательство.* Пусть  $Y \rightarrow X$  – двойное накрытие, где  $Y$  – поверхность типа КЗ. Пусть  $2F_1, 2F_2$  – кратные слои. Пусть  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \subset Y$  – прообразы  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда  $\tilde{F}_1^2 = \tilde{F}_2^2 = 0$  и  $\tilde{F}_1 \cdot \tilde{F}_2 = 2$ . Следовательно,  $|\tilde{F}_1|$  и  $|\tilde{F}_2|$  – эллиптические пучки.

..... □

Теорема. Пусть  $X$  — неособая комплексная поверхность Эйнштейна, и

$|\mathcal{O}|, |\mathcal{O}'|$  — эмиттные идеалы на  $X$   
такие, что  $\mathcal{O} \cdot \mathcal{O}' = \mathcal{O}$ .

Тогда  $X$  получается нашей конструкцией факторы двойной квадратичной  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  по инволюции  $\tau$ .

Доказательство. Пусть  $Y \xrightarrow{2:1} X$   
универсальная накрывающая (КЗ поверхность).

Пусть  $2F, 2F'$  — кратные слои  $|\mathcal{O}|$  и  $|\mathcal{O}'|$   
т.е.  $2F \in |\mathcal{O}|$ ,  $2F' \in |\mathcal{O}'|$ .

Тогда  $F^2 = 0$ ,  $F'^2 = 0$ ,  $F \cdot F' = 1$ .

Пусть  $\tilde{F}$  и  $\tilde{F}'$  — прообразы  $F$  и  $F'$

на  $Y$ . Тогда  $\tilde{F}^2 = \tilde{F}'^2 = 0$ ,  $\tilde{F} \cdot \tilde{F}' = 2$ .

По теореме Римана-Роха

$$\dim |\tilde{F}| \geq 1, \quad \dim |\tilde{F}'| \geq 1.$$

Значит,  $\tilde{F}$  и  $\tilde{F}'$  задают 2 эмиттных идеала на  $Y$ :

$\pi_1: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ . При этом,

$\tilde{F}$  и  $\tilde{F}'$  составлены из слоёв.

$\tilde{F} \sim_k C$ ,  $\tilde{F}' \sim_{k'} C'$ , где  $C, C'$  — слои нульв. Тогда

$$2 = \tilde{F} \tilde{F}' = k k' \cdot C \cdot C'.$$

Если  $k k' \neq 1$ , то, с точностью до постоянного  $k=2$ ,  $k'=1$ ,  $C \cdot C' = 1$ .

Но это означает, что  $C'$  — обратная к  $C$ . Так как база нульв рациональна, то это невозможно.

Следовательно,  $\tilde{F}$  и  $\tilde{F}'$  —

слои соответствующих эллиптических нульв.

$$\pi_1, \pi_2: Y \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

— групповое накрытие.

Дивизор ветвления:

$$0 = K_Y = \pi_1^* (K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} + \frac{1}{2} R)$$

$$\Rightarrow R \in |-2K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}|.$$

**22.12. Теорема.** Пусть  $X$  – специальная поверхность Энриквеса, пусть  $|2F_1|$  – эллиптический пучок и пусть  $C$  –  $(-2)$ -кривая на  $X$  такая, что  $F_1 \cdot C = 1$ . Тогда  $X$  получается конструкцией 19.8 фактора двойной особой квадрики по инволюции.

*Доказательство.* Пусть  $Y \rightarrow X$  – двойное накрытие, где  $Y$  – поверхность типа КЗ. Пусть  $\tilde{C}, \tilde{F}_1 \subset Y$  – прообразы  $C$  и  $F_1$ . Тогда  $\tilde{F}_1^2 = 0$ . Следовательно,  $|\tilde{F}_1|$  – эллиптический пучок. Далее  $\tilde{C}$  – несвязное объединение двух рациональных кривых  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ . Следовательно,  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  –  $(-2)$ -кривые. Так как  $\tilde{C} \cdot \tilde{F}_1 = 2C \cdot F_1 = 2$ , то  $\tilde{C}_1 \cdot \tilde{F}_1 = \tilde{C}_2 \cdot \tilde{F}_1 = 1$ .

Рассмотрим линейную систему  $|2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|$ . По теореме Римана-Роха  $\dim |2\tilde{F}_1 + \tilde{C}| \geq \frac{1}{2}(2\tilde{F}_1 + \tilde{C})^2 = 4$ . Мы утверждаем, что  $|2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|$  не имеет базисных точек. Действительно, предположим противное. Ясно, что  $\text{Bs } |2\tilde{F}_1 + \tilde{C}| \subset \tilde{C}$ . Если  $P \in \text{Bs } |2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|$  и  $P \in \tilde{C}_1$ , то  $\tilde{C}_1 \subset \text{Bs } |2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|$  поскольку  $(2\tilde{F}_1 + \tilde{C}) \cdot \tilde{C}_1 = 0$ . С другой стороны,  $\text{Bs } |2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|$  инвариантно относительно инволюции двойного накрытия  $Y \rightarrow X$ . Следовательно,  $\tilde{C} \subset \text{Bs } |2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|$ . В этом случае  $\dim |2\tilde{F}_1 + \tilde{C}| = \dim |2\tilde{F}_1| = 2$ . Противоречие. Следовательно,  $|2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|$  определяет морфизм

$$\Phi = \Phi_{|2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|} : Y \rightarrow \mathbb{P}^N, \quad N \geq 3.$$

Ограничение  $|2\tilde{F}_1 + \tilde{C}|$  на слой эллиптического пучка имеет степень 2. Поэтому  $\Phi$  не бирационален. Так как

$$(\deg \Phi) \cdot (\deg \Phi(Y)) = (2\tilde{F}_1 + \tilde{C})^2 = 4,$$

то имеется единственная возможность:  $\deg \Phi = \deg \Phi(Y) = 2$ . Образы слоев являются прямыми. Так как  $(2\tilde{F}_1 + \tilde{C}) \cdot \tilde{C}_1 = 0$ , то  $\Phi(\tilde{C}_1)$  – точка и эти прямые проходят через  $\Phi(\tilde{C}_1)$ . Следовательно,  $\Phi(Y)$  – квадратичный конус.  $\square$

**22.13. Следствие.** Если  $X$  не содержит  $(-2)$ -кривых, то имеется взаимно однозначное соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{пары эллиптических} \\ \text{пучков } |2F_1|, |2F_2| \\ \text{таких, что } F_1 \cdot F_2 = 1 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{вложения} \\ U \hookrightarrow \text{Pic}(X)_f \end{array} \right\}$$

**22.14. Следствие.** Предположим, что  $X$  не содержит  $(-2)$ -кривых. Каждое вложение  $U \hookrightarrow \text{Pic}(X)_f$  определяет инволюцию Галуа  $\tau \in \text{Aut}(X)$  двойного накрытия  $X \rightarrow Z$ . Эта инволюция действует на  $\text{Pic}(X)_f = U \oplus E_8$  как  $(\mathbf{1}_U, -\mathbf{1}_{E_8})$ .

22.15. **Следствие.** *Предположим, что  $X$  не содержит  $(-2)$ -кривых. Образ  $\text{Aut}(X)$  в  $\text{O}(\text{Pic}(X)_f)$  содержит нормальную подгруппу, содержащую  $(\mathbf{1}_U, -\mathbf{1}_{E_8})$ .*

### 23. АВТОМОРФИЗМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЭНРИКВЕСА

Продолжим действие автоморфизмов  $\varphi \in \text{Aut}(X)$  на  $N$  по правилу  $\varphi(\mathbf{k}) = \mathbf{k}$ .

23.1. **Лемма.** *Если  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{KP}^+(N)$ , то  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq 0$ .*

*Доказательство.* Предположим, что  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} < 0$ . По непрерывности, мы можем считать, что  $\mathbf{x}^2 > 0$ ,  $\mathbf{y}^2 > 0$ . Тогда для  $\mathbf{y}_t = t\mathbf{y} - (1-t)\mathbf{x}$ ,  $0 < t < 1$  имеем  $\mathbf{y}_t^2 > 0$ . По непрерывности формы пересечения имеем  $\mathbf{y}_t \in \text{KP}^+(N)$  и  $\mathbf{y}_t \in \text{KP}^-(N)$  (поскольку  $-\mathbf{y} \in \text{KP}^-(N)$ ). Противоречие.  $\square$

23.2. **Следствие.**  $\mathbf{e}_i - \mathbf{k} \in \text{KP}^+(N)$ .

*Доказательство.* Следует из того, что  $(\mathbf{e}_i - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{h} > 0$ .  $\square$

23.3. **Лемма.** *Действия элементов  $W$  и  $\text{Aut}(X)$  переводят  $\text{KP}^+(N)$  и  $\overline{\text{NE}}(N)$  в себя.*

*Доказательство.* Поскольку группы  $W$  и  $\text{Aut}(X)$  действуют на  $N$  изометриями, то они переводят  $I$  и  $\text{KP}(N)$  в себя. Так как  $W$  сохраняет  $\mathbf{k}$ , то она сохраняет и  $\text{KP}^\pm(N)$ . Группа  $\text{Aut}(X)$  не может переставлять компоненты  $\text{KP}^\pm(N)$ , поскольку только одна из них содержит обильные классы.  $\square$

23.4. **Теорема.** *Группа  $W \subset \text{O}(M)$  совпадает со стационарной подгруппой  $\text{KP}^+(N)$ .*

23.5. **Следствие.**  $\text{O}(M) = W \times \{\pm \mathbf{1}_M\}$ .

23.6. **Следствие.** *Пусть  $X$  – поверхность Энриквеса. Предположим, что  $X$  не содержит  $(-2)$ -кривых. Тогда образ представления  $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{O}(\text{Pic}(X)_f)$  содержится в группе  $W$ .*

23.7. **Теорема.** *Пусть  $X$  – поверхность Энриквеса. Тогда ядро представления  $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{O}(\text{Pic}(X)_f)$  конечно. Если  $X$  не содержит  $(-2)$ -кривых, то это ядро тривиально.*

*Доказательство.* Согласно следствию 2.7 ядро конечно. Пусть  $g \in \text{Aut}(X)$  тривиально действует на  $\text{Pic}(X)$  и пусть  $\text{Fix}(g)$  – множество его неподвижных точек. По топологической формуле Лефшеца  $\text{Eu}(\text{Fix}(g)) = 12$ . Если  $X$  не содержит  $(-2)$ -кривых, то  $\text{Fix}(g)$  должно содержать по крайней мере 12 изолированных точек. Тогда



представление  $X \rightarrow Z$  в виде двойной квадратки  $g$ -эквивариантно и поэтому  $g$  нетривиально действует на  $Z = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/\tau$ .  $\square$

**23.8. Пример (Barth-Peters [14]).** Пусть  $E$  эллиптическая кривая бистепени  $(2, 2)$  в  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , которая проходит через 4 точки  $(\pm 1, \pm 1)$ . Существует единственная инволюция  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  такая, что  $\varphi(E) = E$  и  $\varphi(\pm 1, \pm 1) = (\mp 1, \mp 1)$ . Пусть  $\tilde{Y}$  – минимальное разрешение двойного накрытия  $Y \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  с ветвлением в объединении  $E$  и 4 прямых  $L_{i,j}$ , проходящих через неподвижные точки. Обозначим через  $\tau$  инволюцию на  $\tilde{Y}$  индуцированную инволюцией Галуа. Есть две инволюции  $\tau'$  и  $\tau'' \in \text{Aut}(Y)$ , которые индуцированы  $\varphi$ . Одна из них, которую мы обозначим через  $\tau'$ , не имеет неподвижных точек и  $X := Y/\tau$  – поверхность Энриквеса. Поверхность  $X$  содержит 10 гладких рациональных кривых, из которых 8 происходят из  $D_4$ -особенностей двойного накрытия и 2 из которых происходят из 4 прямых в дивизоре ветвления.  $X$  имеет два эллиптических пучка, порожденных двумя структурами  $\mathbb{P}^1$ -расслоений на  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Эти 10 рациональных кривых и приведенные части слоев двух эллиптических расслоений порождают группу когомологий  $H^2(X, \mathbb{Z})$ . Ясно, что инволюция, индуцированная  $\tau$  фиксирует все эти кривые. Следовательно  $\tau$  – когомологически тривиальная инволюция.

**23.9. Пример (Lieberman, cf. [15]).** Пусть  $A$  – произведение двух эллиптических кривых  $E_1$  и  $E_2$  и  $\xi$  – точка 2-кручения, не лежащая ни на  $E_1$ , ни на  $E_2$ . Пусть  $\tau'$  (соотв.,  $\tau''$ ) – инволюция куммеровской поверхности  $Y = \text{Kum}(A)$  индуцированной эндоморфизмом  $(-\mathbf{1}_{E_1}, \mathbf{1}_{E_2})$  (соотв., сдвиг на  $\xi$ ). Тогда  $\tau := \tau' \circ \tau''$  инволюция, действующая без неподвижных точек на  $Y$  и фактор  $X := Y/\tau$  – поверхность Энриквеса. Инволюция  $\varphi \in \text{Aut}(X)$ , индуцированная  $\tau'$ , когомологически тривиальна.

### Задачи.

1. Пусть  $X$  поверхность Энриквеса и пусть  $\sigma \in \text{Aut}(X)$  – автоморфизм порядка 2. Докажите, что факторповерхность  $Y = X/\sigma$  особа.
2. Пусть  $X$  поверхность Энриквеса и пусть  $G \subset \text{Aut}(X)$  – конечная подгруппа. Докажите, что  $X/G$  или рациональна или бирациональна поверхности Энриквеса.
3. Пусть  $X$  поверхность Энриквеса и пусть  $H$  – обильный дивизор на  $X$  с  $H^2 = 2$ . Докажите, что линейная система  $|H|$  не имеет неподвижных компонент.

4. Пусть  $X$  поверхность Энриквеса и пусть  $|2F_1|$  и  $|2F_2|$  – эллиптические пучки на  $X$  такие, что  $F_1 \cdot F_2 = 1$ . Предположим, что все слои пучка  $|2F_1|$  неприводимы. Докажите, что дивизор  $E_1 + E_2$  обилён.
5. Пусть  $X$  поверхность Энриквеса и пусть  $H$  – обильный дивизор на  $X$  с  $H^2 = 2$ . Предположим, что линейная система  $|H|$  не имеет неподвижных компонент (см. задачу 3). Докажите, что общий элемент  $H \in |H|$  неприводим и неособ. Имеет ли линейная система  $|H|$  базисные точки?
6. Пусть  $X$  поверхность Энриквеса и пусть  $H$  – обильный дивизор на  $X$  с  $H^2 = 4$ . Докажите, что линейная система  $|H|$  имеет базисные точки.
7. Пусть  $X$  поверхность Энриквеса и пусть  $H$  – обильный дивизор на  $X$  с  $H^2 = 4$ . Докажите, что линейная система  $|H|$  не имеет неподвижных компонент.
8. Может ли группа автоморфизмов поверхности Энриквеса содержать элемент порядка 23?
9. Может ли группа автоморфизмов поверхности Энриквеса быть изоморфной симметрической группе  $\mathfrak{S}_{13}$ ?

#### 24. АВТОМОРФИЗМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ С $\kappa = 1$

24.1. **Теорема.** Пусть  $X$  – минимальная поверхность с  $\kappa(X) = 1$ . Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i)  $K_X^2 = 0$ ,
- (ii)  $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ ,
- (iii) на  $X$  имеется эллиптический пучок  $\pi : X \rightarrow B$ ,
- (iv) эллиптический пучок  $\pi : X \rightarrow B$  единственный.

*Доказательство.* Так как  $K_X$  численно эффективен, то  $K_X^2 \geq 0$ . Если  $K_X^2 > 0$ , то по теореме Римана-Роха  $\dim |nK_X|$  растёт квадратично. Противоречие. Следовательно,  $K_X^2 = 0$ . По 13.3 имеем  $\text{Eu}(X) \geq 0$ . По формуле Нётера  $12\chi(\mathcal{O}_X) = \text{Eu}(X) \geq 0$ .

Докажем, что для некоторого  $n > 0$  линейная система  $|nK_X|$  не имеет неподвижных компонент и базисных точек. Возьмем  $n$  таким, что  $\dim |nK_X| > 0$ . Предположим, что  $|nK_X|$  имеет неподвижные компоненты. Пусть  $D \in |nK_X|$  и пусть  $C$  – компонента  $D$ . Так как  $K_X$  численно эффективен, то  $D \cdot C \geq 0$  и  $0 = D^2 \geq D \cdot C$ . Поэтому  $D \cdot C = 0$ . Запишем  $|nK_X| = F + |M|$ , где  $F = \sum a_i F_i \geq 0$  – сумма неподвижных компонент, а  $|M|$  – линейная система без неподвижных компонент. Тогда

$$0 = (nK_X)^2 = (nK_X) \cdot M + (nK_X) \cdot F.$$

Следовательно,

$$0 = (nK_X) \cdot M = M^2 + M \cdot F.$$

Отсюда  $M^2 = M \cdot F = 0$  и  $F^2 = 0$ . Так как  $M^2 = 0$ , то линейная система  $|M|$  не имеет базисных точек и задает морфизм  $\phi = \Phi_{|M|} : X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$  на кривую. Так как  $F^2 = 0$ , то по лемме Зарисского дивизор  $F$  пропорционален слою, т. е.  $aF \sim bM$  для некоторых  $a, b > 0$ . Но тогда  $|anK_X| = |(a+b)M|$  не имеет неподвижных компонент и базисных точек. Пусть  $\Phi_{|nK_X|} : X \xrightarrow{\pi} B \rightarrow Y$  – разложение Штейна. Тогда  $\pi : X \rightarrow B$  – эллиптическое расслоение.

Пусть  $\phi : X \rightarrow C$  – другое эллиптическое расслоение. Тогда по формуле для канонического дивизора (11)

$$(21) \quad K_X = \phi^* \left( K_C + \Xi + \sum_{P_i \in C} (1 - 1/m_i) P_i \right) = \phi^* A,$$

где  $A$  –  $\mathbb{Q}$ -дивизор на  $C$ . Следовательно,

$$(22) \quad \deg A = 2g(B) - 2 + \chi(\mathcal{O}_X) + \sum_i (1 - 1/m_i) > 0.$$

т. е.  $A$  обилен. Это означает, что  $\pi = \phi$ .  $\square$

**24.2. Следствие.** Для эллиптического расслоения  $\pi : X \rightarrow B$  имеем  $K_X = \pi^* \Theta$ , где  $\Theta$  – обильный  $\mathbb{Q}$ -дивизор  $c$

$$(23) \quad \deg \Theta = 2g(B) - 2 + \chi(\mathcal{O}_X) + \sum_i (1 - 1/m_i) > 0.$$

**24.3. Следствие.** Эллиптическое расслоение  $\pi : X \rightarrow B$  эквивариантно относительно группы автоморфизмов  $\text{Aut}(X)$ .

**24.4. Теорема.**  $\text{Aut}(X)_0$  тривиально действует на  $B$ .

*Доказательство.* Напомним, что согласно следствию 2.8, группа  $\text{Aut}(X)_0$  является абелевым многообразием. Если  $B \simeq \mathbb{P}^1$ , то  $\text{Aut}(X)_0$  не может нетривиально действовать на  $B$ , т. е.  $\zeta(\text{Aut}_0(X)) = \{1\}$ . Если  $g > 1$ , то вся группа  $\text{Aut}(B)$  конечна. Пусть  $B$  – эллиптическая кривая и предположим, что  $\text{Aut}(X)_0 \neq \ker(\zeta)$ . Тогда  $\pi$  не имеет вырожденных слоев и  $\deg A = 0$ . Противоречие доказывает 24.1.  $\square$

**24.5. Теорема.** Пусть  $X$  – минимальная поверхность с  $\kappa(X) = 1$ . Тогда  $\dim \text{Aut}(X)_0 \leq 1$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $\dim \text{Aut}(X)_0 \geq 2$ . для некоторой точки  $P \in X$  ее стабилизатор  $G \subset \dim \text{Aut}(X)_0$  нетривиален.  $\square$

*Доказательство.* Любой автоморфизм общего слоя  $X_\eta$  над  $\mathbb{k}(B)$  индуцирует бирациональное отображение  $X \dashrightarrow X$ , которое должно быть регулярным поскольку  $X$  минимальна. Поэтому имеется точная последовательность

$$(24) \quad 1 \longrightarrow \text{Aut}(X_\eta) \longrightarrow \text{Aut}(X) \xrightarrow{\zeta} \text{Aut}(B).$$

По теореме 24.1 имеем  $\text{Eu}(X) \geq 0$  и  $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ . □

**24.6. Лемма.** *Если группа  $\text{Aut}(X)_0$  нетривиальна, то  $\pi$  не имеет особых слоев (но, возможно, имеет кратные неособые слои).*

*Доказательство.* Предположим, что  $F = \pi^{-1}(\text{pt})_{\text{red}}$  – особый слой. Все компоненты  $F$  – рациональные кривые и поэтому действие  $\text{Aut}(X)_0$  на  $F$  тривиально. Пусть  $G \subset \text{Aut}(X)_0$  – конечная подгруппа. Тогда действие  $G$  на  $F$  также тривиально. Поскольку  $F$  особо, то по следствию 2.5 действие  $G$  должно также быть тривиально и на  $X$ . Противоречие. □

**24.7. Теорема.** *Если группа  $\text{Aut}(X)_0$  нетривиальна, то группа  $\text{Aut}(X)/\text{Aut}(X)_0$  конечна.*

*Доказательство.* Докажем, что образ  $\zeta$  в (24) конечен. Это, очевидно, верно при  $g(B) \geq 2$  (поскольку вся группа  $\text{Aut}(B)$  конечна в этом случае). Пусть  $g(B) = 1$  и предположим, что образ  $\Gamma := \zeta(\text{Aut}(X))$  бесконечен. Тогда  $\Gamma$  не имеет неподвижных точек на  $B$ . Поэтому  $\pi$  не имеет вырожденных слоев. Но тогда  $\deg \Xi = \frac{1}{12} \text{Eu}(X) = 0$  и по (21) имеем  $K_X = \pi^* K_B = 0$ . Это противоречит  $\kappa(X) = 1$ . Пусть  $B \simeq \mathbb{P}^1$ . Как и выше,  $\pi$  имеет не более двух вырожденных слоев. Если они оба кратные эллиптические кривые с кратностями  $m_1$  и  $m_2$ , то  $\deg \Xi = 0$  и  $\deg A = -1/m_1 - 1/m_2$ , что противоречит  $\kappa(X) = 1$ . Следовательно, по крайней мере один вырожденный слой (его приведенная часть)  $F'$  является особым. Более того, можно считать, что  $\text{Eu}(F') \geq 2$ . Это противоречит лемме 24.6.

С другой стороны,  $\text{Aut}(X)_0$  имеет конечный индекс в  $\ker(\zeta) = \text{Aut}(X_\eta)$  поскольку  $X_\eta$  – эллиптическая кривая и  $\dim \text{Aut}(X)_0 = 1$ . □

### Задачи.

1. Докажите, что эллиптический пучок на поверхности с  $\kappa = 1$  единственный.

## 25. АВТОМОРФИЗМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБЩЕГО ТИПА

25.1. **Объем.** *Объемом* дивизора  $D$  на проективном многообразии размерности  $n$  называется

$$\text{vol}(V) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n!}{t^n} h^0(V, tD).$$

Дивизор  $D$  называется *объемным*, если  $\text{vol}(D) > 0$ . Через  $\text{vol}(V)$  мы будем обозначать  $\text{vol}(K_V)$ .

25. **Теорема.** *Если дивизор  $D$  численно эффективен, то  $\text{vol}(D) = D^n$ .*

*Доказательство.* Для простоты докажем утверждение в случае  $n = 2$ . Для некоторого очень обильного дивизора  $H$  дивизор  $D + H - K_V$  обилен. По теореме Кодаиры об обращении в нуль  $H^i(V, tD + H) = 0$  при  $t > 0$ . Тогда из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(tD) \longrightarrow \mathcal{O}_V(tD + H) \longrightarrow \mathcal{O}_H(tD + H) \longrightarrow 0$$

получаем

$$h^i(V, \mathcal{O}_V(tD)) \leq h^{i-1}(H, \mathcal{O}_H(tD + H)).$$

Но числа  $h^{i-1}(H, \mathcal{O}_H(tD + H))$  при  $t \rightarrow 0$  имеют не выше чем линейный рост. Следовательно,

$$\text{vol}(V) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{t^2} \chi(V, tD) = D^2$$

по теореме Римана-Роха. □

25.2. **Следствие.** *Если дивизор  $D$  численно эффективен и  $f : W \rightarrow V$  – конечный в общей точке морфизм, то*

$$\text{vol}(f^*D) = \text{vol}(D) \cdot \deg f.$$

25.3. **Лемма.** *Пусть  $f : W \rightarrow V$  – бирациональный морфизм неособых поверхностей. Тогда  $\text{vol}(V) = \text{vol}(W)$ .*

*Доказательство.* Достаточно проверить это для одного раздутия точки. В этом случае  $K_W = f^*K_V + E$ , где  $E$  –  $(-1)$ -кривая. Тогда  $E$  – неподвижная компонента линейной системы  $|tK_W|$  для любого  $t > 0$ . Более того,  $|tK_W| = |tf^*K_V| + tE$ . Следовательно,  $\text{vol}(W) = \text{vol}(f^*K_V) = \text{vol}(V)$ . □

25.4. **Теорема** [16]. *Пусть  $X$  – минимальная поверхность общего типа. Тогда*

$$|\text{Aut}(X)| \leq cK_X^2.$$

где  $c$  – константа, не зависящая от поверхности. Более того, можно положить  $c = 42^2$  [17].

Теорема имеет многомерное обобщение [18].

25.5. Пусть  $|G| = N$ . Пусть  $Y = X/G$  и  $\pi : X \rightarrow Y$  – морфизм факторизации. Запишем формулу Гурвица

$$K_X = \pi^*(K_Y + B),$$

где  $B = \sum(1 - 1/m_i)B_i$  – дивизор ветвления. Тогда

$$K_X^2 = N(K_Y + B)^2.$$

26. Рассмотрим существенно упрощенный случай: факторповерхность  $X/G$  неособа. Тогда пересечения  $(K_Y + B)$  с любым целым эффективным дивизором может принимать значения 0 или  $\geq 1/2$ . Предположим, что  $\kappa(X) \geq 0$ . Тогда  $mK_X$  эффективен для некоторого  $m > 0$ . Следовательно,

$$(K_Y + B)^2 = K_Y \cdot (K_Y + B) + \sum(1 - 1/m_i)(K_Y + B) \cdot B_i \geq 1/2.$$

Отсюда  $N \leq 2K_X^2$ .

27. Пусть  $\mu : \tilde{Y} \rightarrow Y$  – минимальное разрешение особенностей. Будем использовать следующую диаграмму замены базы:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\psi} & \tilde{Y} & \xrightarrow{\nu} & \bar{Y} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \mu & & \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y & & \end{array}$$

где  $\tilde{X}$  – минимальное разрешение особенностей  $X \times_Y \tilde{Y}$ , а  $\nu : \tilde{Y} \rightarrow \bar{Y}$  – морфизм на минимальную модель. Имеем

$$\mu^*(K_Y + B) = K_{\tilde{Y}} + \tilde{B},$$

где  $\tilde{B}$  – эффективный дивизор такой, что  $\mu_*\tilde{B} = B$ . Ясно, что дивизоры  $K_Y + B$  и  $K_{\tilde{Y}} + \tilde{B}$  численно эффективны.

28. **Случай**  $\kappa(Y) = 2$ . Имеем разложение  $K_{\tilde{Y}} = L + F$ , где  $L$  – численно эффективный объемный дивизор, а  $F$  эффективен. Тогда по (29)  $K_{\tilde{X}} = \psi^*(K_{\tilde{Y}} + \Theta)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} K_X^2 = \text{vol}(X) &= n \text{vol}(K_Y + B) = n \text{vol}(\mu^*(K_Y + B)) = \\ &= n \text{vol}(K_{\tilde{Y}} + \tilde{B}) \geq n \text{vol}(K_{\tilde{Y}}) = n \text{vol}(K_{\tilde{Y}}) \geq n. \end{aligned}$$

Пусть  $\psi : \tilde{X} \xrightarrow{\hat{\psi}} \hat{X} \xrightarrow{\psi'} \tilde{Y}$  – разложение Штейна.

.....  
Таким образом,

$$(29) \quad K_{\tilde{X}} = \psi^*(K_{\tilde{Y}} + \Theta)$$

где  $\Theta = \sum \theta_i \Theta_i \geq 0$ . Более того, компоненты  $\Theta$  бывают двух типов:

- (I) исключительные для  $\hat{\psi}$ ;
- (II) компоненты ветвления для  $\psi'$ , для них имеем  $\theta_i = 1 - 1/m_i$ .

В соответствии с этим разложим  $\Theta = \Theta^I + \Theta^{II}$ .

**30. Случай**  $\kappa(Y) = 1$ . На  $\tilde{Y}$  имеется эллиптический пучок  $\tilde{Y} \rightarrow \bar{Y} \rightarrow C$ . Если компоненты  $\Theta^{II}$  лежат в слоях, то  $\psi'$  неразветвлено над общим слоем. Поэтому  $\hat{X}$ , а, следовательно, и  $\tilde{X}$  содержат пучки эллиптических кривых. Это невозможно на поверхности общего типа. Следовательно, существует “вертикальная” компонента  $\Theta^{II}$ .

$$K_X^2 = \text{vol}(X) = \text{vol}(\tilde{X}) \geq n \text{vol}(\tilde{Y}) = n \text{vol}(\bar{Y}) \geq n.$$

**25.6. Теорема** [19], [20]. *Зафиксируем дсс-множество  $C \subset \mathbb{Q}$ . Тогда для любой логповерхности  $(Y, B)$  с логтерминальными особенностями и  $B \in C$  такой, что  $K_Y + B$  численно эффективен и объем имеет  $(K_Y + B)^2 \geq c$ , где  $c = c(C)$  – положительная константа, зависящая только от  $C$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\mu : \tilde{Y} \rightarrow Y$  – хорошее разрешение особенностей  $(Y, B)$ . Запишем  $K_{\tilde{Y}} + \tilde{B} = \mu^*(K_Y + B)$ . □

**25.7. Лемма.** *Зафиксируем дсс-множество  $C \subset \mathbb{Q}$ . Пусть  $(X \ni P)$  – росток двумерной нормальной особенности и пусть  $B = \sum b_i B_i$  – эффективный  $\mathbb{Q}$ -дивизор на  $X$  такой, что .*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — Москва : Мир, 1981.
- [2] Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. — Москва : Мир, 1973.
- [3] Мойшезон Б. Г. Об алгебраических классах гомологий на алгебраических многообразиях // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1967. — Т. 31, № 2. — С. 225–268.
- [4] Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — Наука, 1986.
- [5] Rosenlicht M. Some basic theorems on algebraic groups // Amer. J. Math. — 1956. — Vol. 78. — P. 401–443.
- [6] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — Москва : Факториал Пресс, 2003. — Т. 4 из XX век – Мат. и мех.
- [7] Хамфри Д. Линейные алгебраические группы. — Наука, 1980.
- [8] Борель А. Линейные алгебраические группы. — Москва : Мир, 1972.
- [9] Спрингер Т. Теория инвариантов. — Москва : Мир, 1981. — Т. 24 из Математика – Новое в зарубежной науке.
- [10] Гриффитс Ф., Харрис Д. Принципы алгебраической геометрии. — Москва : Мир, 1982. — Т. 1, 2.
- [11] Серр Ж.-П. Курс арифметики. — Москва : Мир, 1972.

- [12] Манин Ю. И. Кубические формы: Алгебра, геометрия, арифметика. — Москва : Наука, 1972.
- [13] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. Элементы математики. — Москва : Мир, 1972.
- [14] Barth W., Peters C. Automorphisms of Enriques surfaces // *Invent. Math.* — 1983. — Vol. 73, no. 3. — P. 383–411. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01388435>.
- [15] Peters C. A. M. Holomorphic automorphisms of compact Kähler surfaces and their induced actions in cohomology // *Invent. Math.* — 1979. — Vol. 52, no. 2. — P. 143–148. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01403061>.
- [16] Xiao G. Bound of automorphisms of surfaces of general type. I // *Ann. of Math. (2)*. — 1994. — Vol. 139, no. 1. — P. 51–77. — URL: <http://dx.doi.org/10.2307/2946627>.
- [17] Xiao G. Bound of automorphisms of surfaces of general type. II // *J. Algebraic Geom.* — 1995. — Vol. 4, no. 4. — P. 701–793.
- [18] Hacon C. D., McKernan J., Xu C. On the birational automorphisms of varieties of general type // *Ann. of Math. (2)*. — 2013. — Vol. 177, no. 3. — P. 1077–1111. — URL: <http://dx.doi.org/10.4007/annals.2013.177.3.6>.
- [19] Alexeev V. Boundedness and  $K^2$  for log surfaces // *Internat. J. Math.* — 1994. — Vol. 5, no. 6. — P. 779–810.
- [20] Alexeev V., Mori S. Bounding singular surfaces of general type // *Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000)*. — Berlin : Springer, 2004. — P. 143–174.