Бирациональная геометрия

Ю. Г. Прохоров

1. Дифференциальные формы

Напомним, что касательное пространство Зарисского $T_{P,X}$ в точке P к многообразию X определяется как $T_{P,X} = (\mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}^2_{P,X})^\vee$. Таким образом, каждый росток функции $f \in \mathscr{O}_{P,X}$ определяет элемент двойственного пространства $T^\vee_{P,X}$, который мы обозначим через $\mathrm{d}_P f$. Соответственно, каждая регулярная функция $f \in \Bbbk[U]$ задает отображение $\mathrm{d}f : U \to \cup_{P\in U} T^\vee_{P,X}$ такое, что $\mathrm{d}f(P) = \mathrm{d}_P f \in T^\vee_{P,X}$.

Одномерной дифференциальной формой φ на X называется отображение $\varphi : X \to \cup_{P\in X} T^\vee_{P,X}$ такое, что

- $\varphi(P) \in T^\vee_{P,X}$ для любой точки $P \in X$;
- для любой точки $P \in X$ существует окрестность $P \in U \subset X$ и регулярные функции f_i, $g_i \in \Bbbk[U]$ такие, что ограничение $\varphi|_U$ записывается в виде $\varphi|_U = \sum g_i \mathrm{d}f_i$.

Аналогично, *r-мерной дифференциальной формой* φ на X называется отображение $\varphi : X \to \cup_{P\in X} \wedge^r T^\vee_{P,X}$ такое, что

- $\varphi(P) \in \wedge^r T^\vee_{P,X}$ для любой точки $P \in X$;
- для любой точки $P \in X$ существует окрестность $P \in U \subset X$ такая, что $\varphi|_U = \sum g_{i_1,\dots,i_r} \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r}$, f_{i_k}, $g_{i_1,\dots,i_r} \in \Bbbk[U]$.

Множество всех дифференциальных форм на X обозначается через $\Omega^r[X]$. Ясно, что $\Omega^r[X]$ – модуль над $\Bbbk[X]$ и сопоставление $U \longmapsto \Omega^r[U]$ является пучком $\mathscr{O}_X$-модулей. Имеются следующие естественные операции:

$$\Omega^r[X] \times \Omega^s[X] \longrightarrow \Omega^{r+s}[X], \quad (\varphi_r, \varphi_s) \longmapsto \varphi_r \wedge \varphi_s$$

$$\mathrm{d} : \Omega^r[X] \longrightarrow \Omega^{r+1}[X], \quad \varphi \longmapsto \mathrm{d}\varphi = \sum \mathrm{d}g_{i_1,\dots,i_r} \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r}$$

Пример. Пусть $X = \mathbb{A}^n_{x_1,\dots,x_n}$. Тогда $T_{P,X} \simeq \mathbb{A}^n$, $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}$ образуют базис $\Omega^r[X]$ над $\Bbbk[X]$.

Date: осенний семестр 2012 г.

Пример. Пусть $X = \mathbb{P}^n_{x_0,x_1,\dots,x_n}$. Рассмотрим аффинную карту $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ с координатами $y_i = x_i/x_0$. Пусть $\varphi \in \Omega^1[\mathbb{P}^n]$. Запишем $\varphi = \sum \varphi_i \mathrm{d}y_i$, $\varphi_i \in \Bbbk[U_0]$. Рассмотрим аффинную карту $U_j = \{x_j \neq 0\}$ с координатами $z_i = x_i/x_j$, $i \neq j$. Тогда $y_j = 1/z_0$ и $y_i = z_i/z_0$ $i \neq j$. Отсюда

$$\varphi = \sum_{i\neq j} \varphi_i(z) z_0^{-2}(z_0 \mathrm{d}z_i - z_i \mathrm{d}z_0) - \varphi_j(z) z_0^{-2} \mathrm{d}z_0 =$$
$$= z_0^{-2} \left(z_0 \sum_{i\neq j} \varphi_i(z) \mathrm{d}z_i - \varphi_j(z)(1 - \sum_{i\neq j} z_i) \mathrm{d}z_0 \right).$$

Эта форма регулярна тогда и только тогда, когда $\varphi_j = 0$.

Предложение 1.1. *Пусть $P \in X$ – неособая точка и $\dim X = n$. Тогда существует такая аффинная окрестность $P \in U \subset X$, что $\Omega^r[U]$ – свободный $\Bbbk[U]$-модуль ранга $\binom{n}{r}$.*

Доказательство. Докажем для $r = 1$. Мы можем считать, что X аффинно. Пусть

$$f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[x_1, \dots, x_N]$$

порождают идеал $X \subset \mathbb{A}^N$. Тогда

$$\mathrm{rk} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right\| = N - n.$$

Имеем также

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = 0, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Мы можем считать, что $x_1, \dots, x_n$ – система локальных параметров. Тогда все $\mathrm{d}x_j$ можно выразить через $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$ с коэффициентами – рациональными функциями, регулярными в некоторой окрестности P. Таким образом, для $\varphi \in \Omega[U]$ мы можем написать

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \mathrm{d}x_i, \quad \varphi_i \in \Bbbk[U].$$

Ясно, что $\mathrm{d}_P x_1, \dots, \mathrm{d}_P x_n$ линейно независимы в P. □

Рациональной r-мерной дифференциальной формой на X называется класс эквивалентности пар (U, φ), где $U \subset X$ – открытое подмножество, а $\varphi \in \Omega^r[U]$. Мы считаем, что $(U, \varphi) \sim (U', \varphi')$, если $\varphi|_{U\cap U'} = \varphi'|_{U\cap U'}$. Поскольку множество точек, где дифференциальная форма обращается в нуль замкнуто в топологии Зарисского, то это отношение эквивалентности корректно. Множество всех рациональных r-мерных дифференциальных форм на X мы будем обозначать через $\Omega^r(X)$.

Предложение 1.2. *Пусть* $\dim X = n$. *Тогда* $\Omega^r(X)$ *– векторное пространство над* $\Bbbk(X)$ *размерности* $\binom{n}{r}$. *Базисом* $\Omega^r(X)$ *над* $\Bbbk(X)$ *являются формы* $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}$, $i_1 < \cdots < i_r$, *где* $x_1, \ldots, x_n$ *– сепарабельный базис трансцендентности* $\Bbbk(X)/\Bbbk$.

Доказательство. Можно считать, что $X \subset \mathbb{A}^N_{y_1,\ldots,y_N}$ аффинно. Любой элемент $y \in \Bbbk(X)$ удовлетворяет соотношению $f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$, сепарабельному по y. В частности, мы имеем $f_i(y_i, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Отсюда

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = 0$$

и мы можем выразить $\mathrm{d}y_i$ через $\mathrm{d}x_j$. Существует открытое множество $U \subset X$ такое, что $\mathrm{d}_P x_j$ порождают $T^\vee_{P,X}$ в каждой точке $P \in U$. Поэтому $\mathrm{d}x_j$ образуют базис $\Omega^1[U]$ над $\Bbbk[U]$, а $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}$ образуют базис $\Omega^r[X]$ над $\Bbbk[U]$. □

Пусть $f : X \to Y$ – морфизм и $P \in X$. Имеется естественное линейное отображение $\mathrm{d}_P : T_{P,X} \to T_{f(P),Y}$. Оно индуцирует отображение $\mathrm{d}^\vee_P : T^\vee_{f(P),Y} \to T^\vee_{P,X}$, которое согласовано со взятием дифференциала. Мы получаем корректно определенное отображение

$$\wedge^r(\mathrm{d}f)^\vee = f^* : \Omega^r[Y] \to \Omega^r[X]$$

Если же $f : X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение, то имеется естественное отображение $f^* : \Omega^r(Y) \to \Omega^r(X)$.

Теорема 1.3. *Пусть* $f : X \dashrightarrow Y$ *– доминантное рациональное отображение и предположим, что расширение полей* $\Bbbk(X)/\Bbbk(Y)$ *сепарабельно порождено. Тогда* $f^* : \Omega^r(Y) \to \Omega^r(X)$ *– вложение.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ – сепарабельный базис трансцендентности $\Bbbk(X)/\Bbbk(Y)$ и пусть $y_1, \ldots, y_n$ – сепарабельный базис трансцендентности $\Bbbk(Y)/\Bbbk$. Тогда $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ – сепарабельный базис трансцендентности $\Bbbk(X)/\Bbbk$. Пусть $\varphi \in \Omega^r(Y)$. Запишем

$$\varphi = \sum \varphi_{i_1,\ldots,i_r}\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_r}$$

$$f^*\varphi = \sum f^*\varphi_{i_1,\ldots,i_r}\mathrm{d}f^*y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^*y_{i_r}$$

Так как $f^*y_{i_1}, \dots, f^*y_{i_n}$ – часть сепарабельного базиса трансцендентности $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$, то элементы $\mathrm{d}f^*y_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f^*y_{i_r}$ составляют часть базиса $\Omega^r(X)$ над $\Bbbk(X)$. Поэтому

$$f^*\varphi = 0 \iff f^*\varphi_{i_1,\dots,i_r} \iff \varphi_{i_1,\dots,i_r} \iff \varphi = 0.$$

$\square$

Пример. Рассмотрим морфизм $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $t \mapsto t^p$ над полем характеристики p. Тогда $f^*\mathrm{d}t = \mathrm{d}t^p = pt^{p-1}\mathrm{d}t = 0$.

Теорема 1.4. *Пусть $f : X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение неособых многообразий и предположим, что Y проективно. Тогда $f^*\Omega^r[Y] \subset \Omega^r[X]$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Omega^r[Y]$. Предположим, что $f^*\varphi \notin \Omega^r[X]$. Пусть $U \subset X$ – максимальное открутое подмножество, для которого отображения $f|_U : U \dashrightarrow Y$ является морфизмом и пусть $Z := X \setminus U$. Таким образом, $f^*\varphi \in \Omega^r[U]$. Поскольку X нормально, то $\operatorname{codim} Z \geq 2$ (см., напр., [Хар81, гл. V, лемма 5.1]). Пусть $P \in Z$. В некоторой малой аффинной окрестности $P \in V \subset X$ имеем

$$f^*\varphi = \sum \varphi_{i_1,\dots,i_r} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}$$

Функции $\varphi_{i_1,\dots,i_r}$ являются регулярными в точках $U \cap V = V \setminus Z$. С другой стороны, множество точек, в которых рациональная функция на нормальном проективном многообразии является нерегулярной, имеет коразмерность 1. Следовательно, $\varphi_{i_1,\dots,i_r}$ являются регулярными в P и поэтому форма $f^*\varphi$ регулярна в P. Это противоречит нашему предположению. $\square$

Следствие 1.5. *Если неособые проективные многообразия X и Y бирационально эквивалентны, то $\Omega^r[X] \simeq \Omega^r[Y]$.*

2. Канонический класс

Пусть X – неособое n-мерное многообразие и пусть ω – (ненулевая) рациональная дифференциальная форма на X старшей степени (т.е. степени n). Определим дивизор $K_X := \operatorname{div}(\omega)$. Если ω' – другая ненулевая рациональная дифференциальная форма старшей степени n, то $\omega' = \varphi\omega$ для некоторой ненулевой рациональной функции φ. Следовательно, $K'_X := \operatorname{div}(\omega') = \operatorname{div}(\varphi) + \operatorname{div}(\omega)$. Это означает, что $K'_X \sim K_X$.

Определение 2.1. Дивизор $K_X := \operatorname{div}(\omega)$ называется *каноническим дивизором* многообразия X. Поскольку он определен с точностью до линейной эквивалентности, то более правильно говорить о *каноническом классе*.

Ясно, что

$$\mathscr{L}(K_X) = \{\varphi \in \Bbbk(X)^* \mid K_X + \operatorname{div}(\varphi) \ge 0\} = \{\omega \mid \operatorname{div}(\omega) \ge 0\} = \Omega^n[X].$$

Пример. Вычислим канонический дивизор для $X = \mathbb{P}^n$. Пусть $x_0, \dots, x_n$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^n$. Рассмотрим аффинную карту $U_0 := \{x_0 \ne 0\}$. Функции $y_1 = x_1/x_0, \dots, y_n = x_n/x_0$ являются координатами в $U_0 \simeq \mathbb{A}^n$. Форма $\omega = \mathrm{d}y_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y_n$ регулярна в U_0 и $\operatorname{div}(\omega) = 0$ на U_0. Рассмотрим теперь карту $U_n := \{x_n \ne 0\}$. Координатами будут функции $z_0 = x_0/x_n, \dots, z_{n-1} = x_{n-1}/x_n$. Тогда

$$y_i = z_i/z_0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad y_n = 1/z_0.$$

Следовательно,

$$\omega = \mathrm{d}\frac{z_1}{z_0} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\frac{z_{n-1}}{z_0} = \pm \frac{1}{z_0^{n+1}} \mathrm{d}z_0 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z_{n-1}.$$

Отсюда $K_{\mathbb{P}_n} = -(n+1)H$, где H – гиперплоскость.

Пусть теперь X – неособое n-мерное многообразие и $Y \subset X$ – неособое подмногообразие. Пусть $P \in Y$ некоторая точка. В окрестности любой точки $P \in Y$ многобразие Y задается одним уравнением $f = 0$. Пусть $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}_{P,X}$ – локальные параметры в P. Тогда $\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_n$ порождают кокасательное пространство $T_{P,X}^{\vee}$ и мы можем записать

$$\mathrm{d}f = \sum \lambda_i \mathrm{d}f_i, \qquad \lambda_i \in \mathscr{O}_{P,X}.$$

Так как многообразие $Y = \{f = 0\}$ неособо в P, то $(\mathrm{d}f)_P \ne 0$. Следовательно, $\lambda_j(P) \ne 0$ для некоторого j. Рассмотрим рациональную дифференциальную форму на X

$$\omega = \frac{g}{f} \mathrm{d}f_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_n.$$

Для j таких, что и $\lambda_j(P) \ne 0$, то мы рассмотрим рациональные дифференциальные формы на Y

$$\sigma_j = (-1)^{j+1} \frac{g}{\lambda_j} \mathrm{d}f_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}f_j} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_n \Big|_Y$$

Так как $\sum \lambda_i \mathrm{d}f_i|_Y = 0$, то $\sigma_j = (-1)^{i+j} \sigma_j$.

Лемма 2.2. *Форма σ_j не зависит от j.*

Доказательство. Пусть $\lambda_i(P) \ne 0$ и $\lambda_j(P) \ne 0$. Умножая соотношение $\sum \lambda_i \mathrm{d}f_i|_Y = 0$ на

$$\mathrm{d}f_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}f_i} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}f_j} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_n,$$

получим $\sigma_i = \sigma_j$. □

Следствие 2.3 (формула присоединения)**.** $K_Y = (K_X + Y)|_Y$.

Доказательство. Имеем

$$K_X = \mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(g) - \mathrm{div}(f).$$

Отсюда $K_Y = \mathrm{div}(\sigma) = \mathrm{div}(g)$ и $K_Y - K_X|_Y = \mathrm{div}(f) = Y|_Y$. □

3. Размерность Кодаиры многообразия

Для неособого проективного многообразия положим

$$\mathrm{R}(X) := \mathrm{R}(X, K_X).$$

Эта алгебра называется *канонической алгеброй* многообразия X. Число $\kappa(X) := \kappa(X, K_X)$ называется *размерностью Кодаиры* многообразия X. Напомним, что пространства $H^0(X, mK_X)$ допускают следующие интерпретации:

- глобальные сечения пучка $\omega_X^{\otimes m}$, где ω_X – пучок дифференциальных форм старшей степени (сечения этого пучка называются плюридифференциальными формами);
- глобальные сечения линейного расслоения $\mathcal{K}_X^{\otimes m} = (\wedge^{\dim X} \mathcal{T}_X)^\vee$, где $\mathcal{T}_X$ – касательное расслоение.

Пример. (1) Если $X = \mathbb{P}^n$, то $K_X = -(n+1)H$, где H – класс гиперплоского сечения. Дивизор mK_X не может быть эффективным ни для какого положительного m. Следовательно, $H^0(X, mK_X) = 0$ при $m > 0$, $\mathrm{R}(X) = \Bbbk$ и $\kappa(X) = -\infty$.

(2) Пусть X – абелево многообразие. Тогда $K_X = 0$ и поэтому $H^0(X, mK_X) = \Bbbk$ при любом m. Следовательно, $\mathrm{R}(X) \simeq \Bbbk[t]$ и $\kappa(X) = 0$.

(3) Пусть X – неособая кривая рода g. Тогда $\deg K_X = 2g - 2$. По теореме Римана-Роха

$$\kappa(X) = \begin{cases} -\infty & \text{если } g = 0, \\ 0 & \text{если } g = 1, \\ 1 & \text{если } g > 1. \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\Psi : X \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение неособых проективных многообразий. Тогда Ψ индуцирует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{R}(X, K_X) \simeq \mathrm{R}(Y, K_Y).$$

Следствие 3.2. *Каноническая алгебра $\mathrm{R}(X, K_X)$ является бирациональным инвариантом в категории неособых проективных многообразий.*

Следствие 3.3. *Кодаирова размерность* $\kappa(X, K_X)$ *является бирациональным инвариантом в категории неособых проективных многообразий.*

Список литературы

[Хар81] Р. Хартсхорн. *Алгебраическая геометрия.* Мир, Москва, 1981.