Бирациональная геометрия

Ю. Г. Прохоров

1. Градуированные кольца

Пусть $R = \oplus_{d\geq 0} R_d$ – градуированная алгебра над полем $\Bbbk$ без делителей нуля. Мы считаем, что $R_0 = \Bbbk$. Положим $R_+ = \oplus_{d>0} R_d$. Это идеал в R. Обозначим через $R^{(n)}$ “прореженную” алгебру

$$R^{(n)} := \bigoplus_{d\geq 0} R_{nd}.$$

Теорема 1.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *кольцо R конечно порождено как R_0-алгебра;*
(2) *идеал R^+ конечно порожден как R-модуль;*
(3) *кольцо R нётерово.*

Доказательство. (3) $\Longrightarrow$ (2) следует из определения нётерова кольца.

(1) $\Longrightarrow$ (3) следует из теоремы Гильберта о базисе.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $a_1, \dots, a_n \in R^+$ – система порождающих как R-модуля. Можно считать, что эти элементы – однородные. Тогда $a_0 = 1, a_1, \dots, a_n \in R$ – система порождающих как R_0-алгебры. Действительно, пусть $b \in R$. Можно считать, что этот элемент однородный степени d и $d > 0$. Индукцией по d доказываем, что b выражается через $a_0 = 1, a_1, \dots, a_n$ как многочлен с коэффициентами в $R_0 = \Bbbk$. Пусть это верно для степеней $< d$. Так как $d > 0$, то $b \in R^+$ и по нашему предположению $b = \sum_{i=1}^n a_i c_i$, где $c_i \in R$. Тогда элементы $c_1, \dots, c_n$ однородные степеней $\deg c_i = d - \deg a_i < d$. По предположению индукции они выражаются через $a_0 = 1, a_1, \dots, a_n$ как многочлены с коэффициентами в $R_0 = \Bbbk$. □

Теорема 1.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *кольцо R конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра;*
(2) *кольцо $R^{(d)}$ конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра.*

Лемма 1.3. *Предположим, что кольцо R конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Тогда R – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль.*

Date: осенний семестр 2012 г.

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n \in R$ – система порождающих как $\Bbbk$-алгебры. Можно считать, что эти элементы – однородные. Мы утверждаем, что элементы вида

$$a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n}, \qquad 0 \le r_i < d$$

порождают R как $R^{(d)}$-модуль. Действительно, любой элемент $b \in R$ является линейной комбинацией элементов вида $a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}$.

Запишем $m_i = dq_i + r_i$, где $0 \le r_i \le d-1$. Тогда

$$a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} = (a_1^{q_1} \cdots a_n^{q_n})^d a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n}.$$

Значит $a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} \in a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n} \cdot R^{(d)}$. □

Доказательство теоремы 1.2. (1) $\Longrightarrow$ (2). По теореме 1.1 R^+ – конечно порожденный R-модуль, а R – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль. По лемме 1.3 R^+ является конечно порожденным $R^{(d)}$-модулем. С другой стороны, $(R^{(d)})^+$ выделяется в R^+ прямым слагаемым (как $R^{(d)}$-модуль), т.е. имеет место разложение $R^+ = (R^{(d)})^+ \oplus R'$. Поэтому $(R^{(d)})^+$ – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль. Далее снова применяем теорему 1.1.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Достаточно доказать, что R – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль. Для этого положим

$$R^{(d,k)} := \bigoplus_{m \equiv k \mod d} R_m.$$

Тогда $R^{(d,k)}$ является $R^{(d)}$-модулем. Ясно, что

$$R = \bigoplus_{k=0}^{d-1} R^{(d,k)}, \qquad R^{(d,0)} = R^{(d)}.$$

Мы утверждаем, что $R^{(d,k)}$ – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль. Это очевидно, если $R^{(d,k)} = 0$. Пусть $R^{(d,k)} \ne 0$ и пусть $0 \ne s \in R^{(d,k)}$. Рассмотрим гомоморфизм $R^{(d)}$-модулей

$$\phi := R^{(d,k)} \longrightarrow R^{(d)}, \qquad c \longmapsto c \cdot s^{d-1}.$$

Так как в R нет делителей нуля, то ϕ инъективен. Следовательно, $R^{(d,k)} \simeq \phi(R^{(d,k)})$ и $\phi(R^{(d,k)})$ – идеал в $R^{(d)}$. По теореме 1.1 и нашему предположению $R^{(d)}$ – нётерово кольцо. Следовательно, $R^{(d)}$-модуль $R^{(d,k)}$ конечно порожден, а поэтому то же самое верно и для R. □

Теорема 1.4. *Предположим, что кольцо R конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Тогда для некоторого d кольцо $R^{(d)}$ порождается своей компонентой степени* 1.

Лемма 1.5. *Предположим, что кольцо R конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Тогда существуют $M, N > 0$ такие, что для любого $n > N$ имеет место равенство $\langle R_M, R_n\rangle = R_{M+n}$.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m \in R$ – система порождающих как $\Bbbk$-алгебры. Можно считать, что эти элементы – однородные. Положим

$$d_i := \deg a_i, \qquad M := \operatorname{lcm}(d_1, \ldots, d_m), \qquad b_i := a_i^{M/d_i}.$$

Таким образом, $\deg b_i = M$, т.е. $b_i \in R_M$. и положим $N := mM$. Пусть $n > N$ и $f \in R_{M+n}$. Запишем

$$f = \sum \lambda_{l_1,\ldots,l_m} a_1^{l_1} \cdots a_m^{l_m}, \quad \lambda_{l_1,\ldots,l_m} \in \Bbbk,\ l_i = (M/d_i)q_i + r_i,\ 0 \le r_i < M/d_i.$$

Тогда

$$a_1^{l_1} \cdots a_m^{l_m} = b_1^{q_1} \cdots b_m^{q_m} \cdot a_1^{r_1} \cdots a_m^{r_m}. \tag{1.5.1}$$

Так как

$$\deg a_1^{r_1} \cdots a_m^{r_m} = \sum d_i r_i < nM = N < n < n + M = \deg f,$$

то в равенстве (1.5.1) член $b_1^{q_1} \cdots b_m^{q_m}$ непуст. Таким образом, $a_1^{l_1} \cdots a_m^{l_m} = \sum b_j c_j$, где $c_j \in R_n$ поскольку $b_j \in R_M$. Это означает, что $a_1^{l_1} \cdots a_m^{l_m} \in \langle R_M, R_n\rangle$, а значит и $f \in \langle R_M, R_n\rangle$. □

Доказательство теоремы 1.4. Возьмем M и N такими как в лемме 1.5. Тогда $\langle R_{lM}, R_M\rangle = R_{(l+1)M}$ для $l > N$. Заменяя R на $R^{(M)}$, мы получим, что $\langle R_l, R_1\rangle = R_{l+1}$ для $l > N$. Положим $d := N + 1$. Тогда $R_{dk+j+1} = \langle R_{dk+j},\ R_1\rangle$ для $k \ge 1$, $j \ge 0$. Следовательно,

$$R_{d(k+1)} = \langle R_{dk},\ \underbrace{R_1, \ldots, R_1}_{d}\rangle \subset \langle R_{dk},\ R_d\rangle \subset R_{d(k+1)}.$$

Отсюда $R_{d(k+1)} = \langle R_{dk},\ R_d\rangle$. Это означает, что компонента $R_d \subset R$ порождает кольцо $R^{(d)}$. □

Обозначим через K – поле частных кольца R, а $Q := R_{((0))}$ – подполе, состоящее из всех однородных элементов степени 0 в K.

Лемма 1.6. *$K \simeq Q(t)$.*

Доказательство. Можем считать, что существует однородный элемент $s \in K$ степени 1 (т.е. степени всех однородных элементов взаимно просты). Рассмотрим отображение

$$\begin{array}{rcl} Q[t] & \longrightarrow & K, \\ f(t) & \longmapsto & f(s). \end{array}$$

Из соображений степени получаем, что оно является вложением. Следовательно, продолжается до вложения полей $Q(t) \hookrightarrow K$. □

Определим *кодаирову размерность* алгебры R следующим образом:

$$\kappa(R) := \begin{cases} \operatorname{degtr}(Q) & \text{если } R \neq \Bbbk, \\ -\infty & \text{если } R = \Bbbk. \end{cases}$$

Замечание. Если $R \neq \Bbbk$, то $\kappa(R) = \operatorname{degtr} R - 1$ по лемме 1.6.

Замечание. $\kappa(R) = -\infty$ тогда и только тогда, когда $R_d = 0$ для всех d.

Предложение 1.7. *$\kappa(R) \leq 0$ тогда и только тогда, когда $\dim R_d \leq 1$ для всех d.*

Доказательство. $\kappa(R) \leq 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{degtr} R \leq 1$.

Предположим, что $\kappa(R) \leq 1$ и $\dim R_d > 1$ для некоторого d. Пусть $\dim R_d > 1$ и пусть $a, b \in R_d$ – линейно независимые элементы. По нашему предположению $\operatorname{degtr} R \leq 1$ и поэтому элементы a, b алгебраически зависимы. Существует ненулевой многочлен $f \in \Bbbk[x, y]$ такой, что $f(a, b) = 0$. Мы можем считать, что f однороден. Тогда он разлагается на линейные множители: $f = \prod(\alpha_i x + \beta_i y)$. Так как в R нет делителей нуля, то $\alpha_i a + \beta_i b = 0$ для некоторого i. Это противоречит линейной независимости a и b.

Обратно, предположим, что $\dim R_d \leq 1$ для всех d и $\kappa(R) \geq 2$. Существуют алгебраически независимые элементы $a, b \in R$. Разложим их в суммы однородных компонент: $a = \sum a_i$, $b = \sum b_j$. Все элементы a_i не могут быть алгебраическими над полем $\Bbbk(b)$. Значит некоторый a_i трансцендентен над $\Bbbk(b)$. Заменяя a на a_i, мы можем считать, что a однороден. Применяя те же соображения к b, получим, что оба элемента a и b однородны. Пусть d и e – их степени. Аналогичные рассуждения показывают, что a^e и b^d алгебраически независимы. Но тогда они линейно независимы в R_{de}. Противоречие. $\square$

Теорема 1.8. *Пусть $\kappa := \kappa(R) \geq 0$. Тогда существуют константы α, δ такие, что для всех $m \gg 0$ имеем*

$$\dim R_{m\delta} \geq \alpha m^{\kappa}.$$

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_{\kappa+1} \in R$ – алгебраически независимые элементы. Мы можем считать, что они однородные одной степени δ. Для $k_1, \ldots k_{\kappa+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таких, что $\sum k_i = \delta m$ элементы $a_1^{k_1} \cdots a_{\kappa+1}^{k_{\kappa+1}} \in R_{\delta m}$ линейно независимы. Поэтому

$$\dim R_{\delta m} \geq \frac{(\delta m + \kappa)!}{(\delta m)!\,\kappa!} = \frac{1}{\kappa!}(\delta m + 1) \cdots (\delta m + \kappa) \geq \operatorname{const} m^{\kappa}$$

при $m \gg 0$. $\square$

./pics/out0940.pdf

Теорема $\varkappa = \varkappa(R) \geq 0 \Rightarrow \exists \alpha, \beta, \delta$

$$\alpha m^{\varkappa} \leq \dim R_{\delta m} \leq \beta m^{\varkappa} \quad \forall m \gg 0$$

$$R' = k[a_1, \dots, a_{\varkappa+1}] \subset R$$

алгебр. расш. степени r (для полей)

Пример. Рассмотрим $\Bbbk[x, y]$ с градуировкой $\deg x = 1$, $\deg y = 0$ и рассмотрим *любую* возрастающую последовательность n_i. Пусть $R \subset \Bbbk[x, y]$ – подалгебра, порожденная элементами x^k, $x^k y$, $x^k y^2$, $\dots$, $x^k y^{n_k}$. Тогда $\dim R_k \geq n_k + 1$.

Положим
$$\mathrm{N}(R) := \{d \in \mathbb{N} \mid R_d \neq 0\}.$$
Ясно, что $\mathrm{N}(R)$ – полугруппа в $\mathbb{N}$ (по сложению). Положим также
$$\delta = \delta(R) := \gcd(\mathrm{N}(R)).$$
Тогда подгруппа в $\mathbb{Z}$, порожденная $\mathrm{N}(R)$, является главным идеалом $(\delta) \subset \mathbb{Z}$. Поэтому существует множество порождающих $n_i \in \mathrm{N}(R)$ таких, что $\delta = \sum n_i k_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}$, и $n_i \equiv 0 \mod \delta$.

Лемма 1.9. *Существует $l \in \mathbb{Z}$ такое, что*
$$\mathrm{N}(R) \cap \{x \mid x \geq l\} = (\delta) \cap \{x \mid x \geq l\}.$$

Доказательство. Мы можем считать, что $\delta > 0$. Разложим $\delta = \sum n_i k_i$ в положительную и отрицательную части: $\delta = \delta^+ - \delta^-$, где
$$\delta^+ = \sum_{n_i k_i > 0} n_i k_i \geq 0, \qquad \delta^- = -\sum_{n_i k_i \leq 0} n_i k_i \geq 0.$$
Тогда δ', $\delta'' \in \mathrm{N}(R)$. Так как $n_i \equiv 0 \mod \delta$, то δ', $\delta'' \equiv 0 \mod \delta$. Следовательно, $\delta' = (m+1)\delta$ и $\delta'' = m\delta$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Значит множество
$$\delta \cdot \{(m+1)x + my \mid x,\, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$
содержится в $\mathrm{N}(R)$. Пусть $z\delta \in (\delta)$. Запишем $z = mq + r$, где $0 \leq r \leq m - 1$. Тогда $z\delta = (m+1)r\delta + m(q-r)\delta \in \mathrm{N}(R)$ при $z \geq m^2 + m$. $\square$

2. О конечной порождённости дивизориальных алгебр

Пусть D – дивизор Картье на проективном многообразии X. Отождествим пространство глобальных сечений $H^0(X, nD)$ с подпространством $\mathscr{L}(nD)$ в поле рациональных функций $\Bbbk(X)$:
$$\mathscr{L}(nD) := \{\varphi \in \Bbbk(X)^* \mid nD + \mathrm{div}(\varphi) \geq 0\} \cup \{0\}.$$
Пусть
$$\mathrm{R}(X, D) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{L}(nD) \cdot t^n \subset \Bbbk(X)[t].$$
Тогда $\mathrm{R}(X, D)$ является градуированной алгеброй, изоморфной алгебре
$$\mathrm{R}(X, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathscr{O}_X(nD)).$$

Таким образом, $\mathrm{R}(X, D)$ рассматривается как подалгебра алгебры $K(X)[t]$, где каждое пространство $H^0(\mathscr{O}_X(nD))$ вложено в компоненту $K(X)t^n$.

Замечание. Можно также рассмотреть алгебру

$$\sum_{n \geq 0} \mathscr{L}(nD) \subset \Bbbk(X).$$

Но это приводит к совершенно другому объекту.

Одним из фундаментальных вопросов алгебраической геометрии является вопрос о конечной порождённости алгебры $\mathrm{R}(X, D)$.

Обозначим через $Q = \mathrm{Q}(X, D)$ подполе в поле частных алгебры $\mathrm{R}(X, D)$, состоящее из всех однородных элементов степени 0. По определению $\mathrm{Q}(X, D) \subset \Bbbk(X)$.

D-размерностью Иитаки (кодаировой размерностью пары (X, D)) называется число

$$\kappa(X, D) = \begin{cases} -\infty & \text{если } \mathrm{R}(X, D) = \Bbbk, \\ \operatorname{degtr} \mathrm{Q}(X, D) & \text{если } \mathrm{R}(X, D) \neq \Bbbk. \end{cases}$$

Замечание. (1) $\kappa(X, D) \leq \dim X$;
(2) $\kappa(X, D) = -\infty$ тогда и только тогда, когда $H^0(X, nD) = 0$ для всех $n > 0$;
(3) $\kappa(X, D) \leq 0$ тогда и только тогда, когда $\dim H^0(X, nD) \leq 1$ для всех $n > 0$ (см. предложение 1.7);
(4) $\kappa(X, D) \geq 1$ тогда и только тогда, когда $\dim H^0(X, nD) \geq 2$ для некоторого $n > 0$.

Пример. (1) Если D – дивизор кручения, то $\kappa(X, D) = 0$.

Предложение 2.1. *Пусть D – целый дивизор такой, что $\operatorname{Bs}|D| = \emptyset$. Тогда алгебра $\mathrm{R}(X, D)$ конечно порождена.*

Доказательство. Во-первых, докажем это для случая, когда D обилен. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – вложение соответствующее подходящей кратности $n_0 D$ дивизора D и пусть $\mathscr{J}_X \subset \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}$ – пучок идеалов. Из точной последовательности когерентных пучков

$$0 \longrightarrow \mathscr{J}_X(n) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(n) \longrightarrow \mathscr{O}_X(nn_0 D) \longrightarrow 0$$

и теоремы Серра об обращении в нуль получаем, что отображения $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(n)) \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_X(n_0 D))$ сюръективны при при $n \geq n_1$. Отсюда мы имеем сюръективное отображение $\mathrm{R}(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}(1))^{(n_1)} \to \mathrm{R}(X, D)^{(n_0 n_1)}$. Согласно теореме 1.2, это доказывает конечную порождённость $\mathrm{R}(X, D)$.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть $X \to \bar{X} \subset \mathbb{P}^N$ – морфизм, заданный линейной системой $|n_0 D|$, где $n_0 \gg 0$ и $\bar{X} = \varphi(X)$. Рассмотрим его разложение Штейна $X \xrightarrow{\varphi} X' \xrightarrow{\psi} \bar{X}$. Тогда дивизор $H = \psi^* \mathscr{O}_{\bar{X}}(1)$ обилен и $\mathrm{Mov}(nD) = \varphi^* H$. Так как $\varphi_* \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_{X'}$, то $\mathrm{R}(X, D)^{(n)} \simeq \mathrm{R}(X', H)$. Согласно сказанному выше, последняя алгебра конечно порождена. $\square$

Предложение 2.2. *Если дивизор A обилен, то* $\mathrm{Q}(X, A) = \Bbbk(X)$.

Доказательство. По предыдущему предложению алгебра $R = \mathrm{R}(X, A)$ конечно порождена. Так как $R^{(d)} \subset R$, то, заменяя A на dA, мы можем считать, что A очень обилен и R порождается своей компонентой степени 1 (см. теорему 1.4). Рассмотрим соответствующее вложение $X \subset \mathbb{P}^N$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X(n) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(n) \longrightarrow \mathscr{O}_X(n) \longrightarrow 0.$$

получаем гомоморфизм $\mathrm{R}(X, A) \to \mathrm{R}(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ градуированных колец. Так как вложение $X \subset \mathbb{P}^N$ задано полной линейной системой, то этот гомоморфизм сюръективен на компонентах степени 1. Так как $\mathrm{R}(X, A)$ порождается своей компонентой степени 1, то он сюръективен. Значит $\mathrm{R}(X, A) = \Bbbk[x_0, \ldots, x_N]/I(X)$, где $I(X)$ – однородный идеал X. Отсюда $\mathrm{Q}(X, A) = \Bbbk(X)$. $\square$

Теорема 2.3 (Асимптотическая теорема Римана-Роха)**.** *Пусть X – собственная N-мерная схема, $\mathscr{F}$ – когерентный пучок X и $\mathscr{L}$ – обратимый пучок на X. Тогда*

$$\dim H^i(X, \mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \mathscr{F}) = O(n^{N-1}), \quad i > 0,$$

$$\dim H^0(X, \mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \mathscr{F}) = \frac{\mathscr{L}^N \cdot \mathscr{F}}{N!} n^N + O(n^{N-1}),$$

где $O(n^{N-1})$ зависит от X, $\mathscr{F}$, $\mathscr{L}$.

3. Дивизоры на поверхности

Теорема 3.1 (теорема Ходжа об индексе)**.** *Пусть A – обильный дивизор на проективной поверхности X. Если для некоторого дивизора B мы имеем $A \cdot B = 0$, то $B^2 \le 0$ и $B^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $B \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $B^2 > 0$. Для $n \gg 0$ дивизор $nA + B$ обилен. Дивизор mB эффективен при $m \gg 0$ так как $B^2 > 0$. Но тогда $mB \cdot nA = mB \cdot (nA + B) > 0$. Противоречие. Следовательно, $B^2 \le 0$.

Пусть $B^2 = 0$ и $B \not\equiv 0$. Возьмем дивизор C такой, что $C \cdot B \neq 0$. Заменяя C на $C' = \alpha C + \beta A$ можно считать, что $C \cdot A = 0$. Таким образом, $A \cdot (aB + C) = 0$. По доказанному выше $0 \geq (aB + C)^2 = 2aB \cdot C + C^2$. Противоречие. □

Следствие 3.2. *Пусть A – дивизор на проективной поверхности X такой, что $A^2 > 0$. Если для некоторого дивизора B мы имеем $A \cdot B = 0$, то $B^2 \leq 0$ и $B^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $B \equiv 0$.*

Лемма 3.3. *Пусть M и $F = \sum \alpha_i F_i$ – дивизоры без общих компонент на поверхности Y такие, что $M \geq 0$, матрица пересечений $\|F_i \cdot F_j\|$ отрицательно определена и $(M + F) \cdot F_i \leq 0$ (соответственно $(M+F) \cdot F_i < 0$) для всех i. Тогда $F \geq 0$ (соответственно $\alpha_i > 0$ для всех i).*

Доказательство. Запишем $F = F_+ - F_-$, где F_+ и F_- – эффективные дивизоры без общих компонент. Предположим, что $F_- \neq 0$. Тогда $(F_-)^2 < 0$. Следовательно, $F_- \cdot F_i < 0$ для некоторой компоненты $F_i \subset \operatorname{Supp} F_-$. Отсюда

$$0 \geq F_i \cdot (M + F) = F_i \cdot M + F_i \cdot F_+ - F_i \cdot F_- > 0.$$

Противоречие. Если же $\alpha_i = 0$ для некоторого i, то $F_i \cdot (M + F) \geq 0$. Это доказывает утверждение. □

Лемма 3.4 (лемма Зарисского)**.** *Пусть $f : X \to C$ – проективный морфизм со связными слоями неособой поверхности на кривую и пусть $F = \sum m_i F_i = f^* o$ – схемный слой над точкой $o \in C$. Тогда матрица пересечений $\|F_i \cdot F_j\|$ отрицательно определена. Более того, если D – ненулевой дивизор такой, что $\operatorname{Supp}(D) \subset \operatorname{Supp}(F)$ и $D^2 \geq 0$, то $D^2 = 0$ и $D = tF$ для некоторого $t \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Мы можем считать, что поверхность X и кривая C проективны. Пусть L – общий геометрический слой моризма f.Так как F и L алгебраически эквивалентны и $\operatorname{Supp}(D) \cap L = \operatorname{Supp}(F) \cap L = \emptyset$, то $F^2 = L^2 = F \cdot L = 0$ и $D \cdot L = D \cdot F = 0$. По теореме Ходжа об индексе $D^2 \leq 0$. Это доказывает первое утверждение.

Предположим, что $D^2 = 0$. Распишем $D = D^+ - D^-$, где D^+ и D^- – эффективные дивизоры без общих компонент. Тогда $0 = D^2 = {D^+}^2 + {D^-}^2 - 2D^+ \cdot D^-$. В этой сумме все члены неположительны. Поэтому они все равны нулю. Заменяя D на D^+ или D^-, мы можем считать, что D эффективен. Далее, заменяя D на $D' = D - tF$, где $t > 0$, мы можем считать, что дивизор D является эффективным, но его коэффициент в некоторой компоненте F_i равен 0, т.е. $\operatorname{Supp}(D) \subsetneq \operatorname{Supp}(F)$.

Если $D \cdot F_i > 0$ для некоторого i, то $(D + tF_i)^2 = t(2D \cdot F_i + tF_i^2) > 0$ при $0 < t \ll 1$. Это противоречит доказанному выше. Значит

$D\cdot F_i \leq 0$ для всех i. Поскольку слой F связен, то $\mathrm{Supp}(D)$ содержит все компоненты F, т.е. $\mathrm{Supp}(D) = \mathrm{Supp}(F)$. Противоречие. $\square$

Теорема 3.5 (критерий обильности Накаи-Мойшезона)**.** *Пусть A – дивизор на проективной поверхности X. Дивизор A обилен тогда и только тогда, когда $A \cdot C \geq 0$ для любой кривой C и $A^2 > 0$.*

Определение 3.6. Дивизор P на неособом проективном многообразии называется *численно эффективным*, если $P\cdot C \geq 0$ для любой кривой C.

Например, если имеется сюръективный морфизм $f : X \to Y$ на неособую кривую Y, то любой схемный слой – численно эффективный, но не обильный дивизор.

Пример. Пусть D – численно эффективный дивизор на проективной поверхности такой, что $\kappa(X, D) = 1$. Тогда $D^2 = 0$. Заменяя D на nD, мы можем считать, что $\dim |D| > 0$. Запишем $|D| = F + |M|$. Тогда $D^2 = D \cdot F + D \cdot M = 0$. Так как в этой сумме оба члена неотрицательны, то $D \cdot F = D \cdot M = 0$. Далее $0 = D \cdot M = M^2 + M \cdot F$ и $0 = D \cdot F = M \cdot F + F^2$. Как и выше получаем $M^2 = M \cdot F = F^2 = 0$. В частности, отсюда получается, что $\mathrm{Bs}\,|M| = 0$. Тогда линейная система $|M|$ задает морфизм $\Phi_{|M|} : X \to \mathbb{P}^N$ и образ $\Phi_{|M|}(X)$ является кривой. Рассмотрим факторизацию Штейна $\Phi_{|M|} : X \xrightarrow{\phi} C \xrightarrow{\psi} \Phi_{|M|}(X)$. Здесь C – неособая кривая, ψ – конечный морфизм, а ϕ – морфизм со связными слоями. Тогда $M = \phi^*G$ для ненулевого эффективного дивизора G на C. Так как $M \cdot F = 0$, то F содержится в слоях. Так как $F^2 = 0$, то по лемме Зарисского $mF = \phi^*L$ для ненулевого эффективного дивизора L на C. Таким образом, $mD = f^*(mG + L)$. Отсюда следует, что $|nD|$ не имеет базисных точек для некоторого $n > 0$.

Следствие 3.7. *Пусть A – обильный дивизор на проективной поверхности X. Тогда для любого численно эффективного дивизора P на X дивизор $A + P$ также обилен.*

Определение 3.8. Дивизор D на проективной поверхности X называется *псевдоэффективным*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(1) существует обильный дивизор H такой, что дивизор $D+\varepsilon H$ эффективен для любого $\varepsilon > 0$;
(2) $D \cdot A \geq 0$ для любого обильного дивизора A на X;
(3) $D \cdot A \geq 0$ для любого численно эффективного дивизора A на X;

(4) класс дивизора D принадлежит замыканию конуса эффективных дивизоров (в численном смысле), т.е. существует последовательность эффективных дивизоров $D^{(n)}$ такая, что $\lim\left(D^{(n)} \cdot C\right) = D \cdot C$ для любой кривой C.

Легко видеть, что свойство псевдоэффективности дивизоров $\mathbb{Q}$-Картье замкнуто относительно взятия полных прообразов f^*.

Лемма 3.9. *Пусть $D \neq 0$ – псевдоэффективный дивизор и пусть $C_1, \ldots, C_n$ – кривые такие, что $D \cdot C_i < 0$. Тогда матрица пересечений $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно определена. Более того, существует лишь конечное число таких кривых.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно полуопределена. Предположим противное. Тогда существует дивизор $R = \sum \lambda_i C_i$ такой, что $R^2 > 0$. Мы можем считать, что $\lambda_i > 0$ для всех i. Действительно, запишем $R = R^+ - R^-$, где R^+ и R^- эффективные дивизоры без общих компонент. Тогда

$$0 < R^2 = (R^+)^2 + (R^-)^2 - 2R^+ \cdot R^- \leq (R^+)^2 + (R^-)^2.$$

По теореме Римана-Роха $h^0(X, nR) \geq R^2 n^2 + \cdots$ для $n \gg 0$. Поэтому $\dim |nR| \geq cR^2 n^2$ для $n \gg 0$. Запишем $|nR| = F + |M|$, где $F = \operatorname{Fix} |nR|$ и $M \neq 0$. Тогда M представляется в виде $M \sim \sum \mu_i C_i$, $\mu_i \geq 0$ для всех i. Поэтому $D \cdot M < 0$. Так как M подвижен, то он численно эффективен. Следовательно, $D \cdot M \geq 0$. Противоречие.

Таким образом, $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно полуопределена. Предположим, что $R^2 = 0$ для $R = \sum \lambda_i C_i \neq 0$. Снова мы можем считать, что $\lambda_i > 0$ для всех i. Далее $R \cdot C_i = 0$ для всех i. Действительно, если $R \cdot C_i \neq 0$, то полагая $R' = R + tC_i$, получим $R'^2 = (R + tC_i)^2 = t(2R \cdot C_i + tC_i^2) > 0$ для некоторого $0 < |t| \ll 1$. Это противоречит доказанному выше. Таким образом, R эффективен и $R \cdot C_i = 0$ для всех i. Поэтому R численно эффективен. Следовательно, $R \cdot D \geq 0$. Противоречие. □

4. Разложение Зарисского

Теорема 4.1 ([Zar62], [Fuj79])**.** *Пусть X – проективная поверхность и пусть D – псевдоэффективный дивизор на X. Тогда существует эффективный дивизор $N = N(D) = \sum a_i N_i$ на X такой, что*

(1) *дивизор $P := D - N$ численно эффективен;*
(2) *$N = 0$ или матрица $(N_i \cdot N_j)$ отрицательно определена;*
(3) *$(P \cdot N_i) = 0$ для всех i.*

Более того, если D является $\mathbb{Q}$-дивизором, то таковым же является и N. Дивизор N однозначно определяется классом численной эквивалентности дивизора D.

Разложение $D = N + P$, удовлетворяющее условиям (i) - (iii) теоремы называется *разложением Зарисского* дивизора D, дивизор P – его *положительной*, а N – *отрицательной* (или *исключительной*) частью.

Лемма 4.2. *Пусть $C_1, \dots, C_n$ – неприводимые кривые на проективной поверхности X такие, что матрица пересечений $Q := \|C_i \cdot C_j\|_{1 \le i,j \le n}$ имеет сигнатуру $(0, m, n-m)$ для некоторого $m < n$, а матрица пересечений $Q' := \|C_i \cdot C_j\|_{1 \le i,j \le m}$ отрицательно определена. Тогда ядро формы пересечения Q имеет базис $R_{m+1}, \dots, R_n$, состоящий из эффективных дивизоров. Более того, этот базис можно выбрать в виде $R_j = S_j + C_j$, где $S_j \ge 0$ – линейная комбинация $C_1, \dots, C_m$.*

Доказательство. Для каждого $j = m+1, \dots, n$ разложим $C_j = -S_j + R_j$, где $R_j \in \ker Q$, а S_j – линейная комбинация $C_1, \dots, C_m$. Тогда $R_{m+1}, \dots, R_n$ составляют базис $\ker Q$ и для $i = 1, \dots, m$ имеем $S_j \cdot C_i = C_j \cdot -C_i \le 0$. По лемме 3.3 дивизоры S_j эффективны. □

Лемма 4.3. *Пусть $C_1, \dots, C_n$ – неприводимые кривые и пусть D – псевдоэффективный дивизор на проективной поверхности X такие, что*

- *$D \cdot C_i \le 0$ для всех i;*
- *$D \cdot C_i < 0$ для всех $i > m$;*
- *матрица пересечений $Q' := \|C_i \cdot C_j\|_{1 \le i,j \le m}$ отрицательно определена.*

Тогда и матрица пересечений $Q := \|C_i \cdot C_j\|_{1 \le i,j \le n}$ отрицательно определена.

Доказательство. Сначала докажем, что матрица Q отрицательно полуопределена. Предположим, что $R^2 > 0$ для некоторого $0 \ne R = \sum \lambda_i R_i$. Мы можем считать, что $R > 0$. Так как $R^2 > 0$, то $aR = F + M$, где $F = \operatorname{Fix}|aR|$, $M = \operatorname{Mov}|nR|$, $M^2 > 0$. Тогда $F = \sum \nu_i C_i$, $\nu_i \ge 0$ и $M = \sum \mu_i C_i$, $\mu_i \ge 0$. Следовательно, $D \cdot M \le 0$. С другой стороны, $D \cdot M \ge 0$ поскольку D псевдоэффективен. Поэтому $D \cdot M = 0$ и $M = \sum_{i=1}^m \mu_i C_i$. Так как Q отрицательно определена, то $M = 0$.

Далее мы применяем лемму 4.2. Выберем базис $R_{m+1}, \dots, R_n$ пространства $\ker Q$, состоящий из эффективных дивизоров вида $R_j = S_j + C_j$. Тогда $D \cdot R_j < 0$. С другой стороны, $R_j \ge 0$ и тривиально пересекается со всеми своими компонентами. Следовательно,

R_j численно эффективен и поэтому $D \cdot R_j \geq 0$ (см. определение 3.8). Противоречие. $\square$

Доказательство теоремы. Существование. Будем работать с парами $(D, \{L_1, \ldots, L_m\})$, состоящими из псевдоэффективного дивизора D и набора кривых $\{L_1, \ldots, L_m\}$ таких, что матрица пересечений $\|L_i \cdot L_j\|$ отрицательно определена и $D \cdot L_i \leq 0$. Доказываем индукцией по $\rho(X) - m$. Если D численно эффективен, то мы полагаем $P = D$. В противном случае по лемме 3.9 существует конечное число кривых $C_1, \ldots, C_n$ таких, что $D \cdot C_i < 0$ и матрица пересечений $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно определена.

Поэтому существует единственный $\mathbb{Q}$-дивизор $R = \sum \lambda_i C_i$ такой, что $R \cdot C_i = D \cdot C_i$ для всех i. Так как $D \cdot C_i < 0$, то $R \geq 0$ по лемме 3.3. Положим $D' := D - R$. Тогда

$$D' \cdot C_i = 0 \qquad \text{для всех} \quad i.$$

Мы утверждаем, что дивизор D' псевдоэффективен. Действительно, пусть A – обильный дивизор. Снова существует единственный $\mathbb{Q}$-дивизор $B = \sum \mu_i C_i$ такой, что $B \cdot C_i = -A \cdot C_i < 0$ для всех i. Этот дивизор эффективен. Ясно, что $B \cdot R = -A \cdot R < 0$. Так как $(A + B) \cdot R = 0$, то дивизор $A + B$ численно эффективен. Следовательно, $D \cdot A \geq -D \cdot B$. Имеем

$$D' \cdot A = D \cdot A - R \cdot A = D \cdot A + R \cdot B \geq -D \cdot B + R \cdot B = (R - D) \cdot B = 0.$$

Это доказывает псевдоэффективность D'. По построению $D' \cdot C_i = 0$ для всех i. Имеем $D' \cdot L_i = D \cdot L_i - R \cdot L_i = -R \cdot L_i \leq 0$.

Далее положим $\{L'_1, \ldots, L'_{m+n}\} = \{L_1, \ldots, L_m\} \cup \{C_1, \ldots, C_n\}$. По лемме 4.3 матрица пересечений $\|L'_i \cdot L'_j\|$ отрицательно определена.

По предположению индукции для D' существует разложение Зарисского $D' = P' + N'$. Тогда $P' \cdot C_i \geq 0$, $N' \cdot C_i \leq 0$ для всех i. Но если $N' \cdot C_i < 0$, то C_i – компонента N'. Поэтому $P' \cdot C_i = 0$ и $D' \cdot C_i < 0$. Противоречие показывает, что $N' \cdot C_i = P' \cdot C_i = 0$ для всех i. Таким образом, C_i – не компонента N' для всех i. Иначе говоря, N' и R не имеют общих компонент и $N' \cdot R = P' \cdot R = 0$. Это означает, что $D = P' + (R + N')$ – разложение Зарисского для D.

Единственность. Пусть имеется два разложения Зарисского $D = P + N = P' + N'$ и пусть $N = \sum a_i N_i$. Тогда $P \cdot N_i = 0$, $P' \cdot N_i \geq 0$ для всех i. Поэтому $N \cdot N_i = D \cdot N_i \geq N' \cdot N_i$ и $(N' - N) \cdot N_i \leq 0$. Отсюда $N' \geq N$ и аналогично $N \geq N'$. Следовательно, $N = N'$. $\square$

Предложение 4.4. *Пусть X – поверхность и пусть D – псевдоэффективный дивизор на X. Пусть $D = N + P$ – разложение*

Зарисского. Тогда для любого численно эффективного дивизора L такого, что $L \le D$ имеем $L \le P$.

Доказательство. Запишем $N = \sum a_i N_i$. Пусть $L \le D$ и L численно эффективен. Для всех i имеем

$$N_i \cdot (P - L) = -N_i \cdot L \le 0.$$

Запишем

$$P - L = (D - L) - N = F^\sharp - N^\sharp,$$

где $F^\sharp$ и $N^\sharp$ – эффективные дивизоры без общих компонент. Так как $N^\sharp \le N$, то

$$0 \ge N^\sharp \cdot (P - L) = N^\sharp \cdot F^\sharp - N^{\sharp 2} \ge 0.$$

Откуда $N^{\sharp 2} = 0$, $N^\sharp = 0$ и $P - L \ge N$. □

Предложение 4.5. *Для разложения Зарисского $D = P + N$ имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{R}(X, D) \simeq \mathrm{R}(X, P). \tag{4.5.1}$$

Доказательство. Действительно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$H^0(\mathscr{O}_X(nP)) \subset H^0(\mathscr{O}_X(nD)) = H^0(\mathscr{O}_X(\mathrm{Mov}(nD))).$$

С другой стороны, дивизор $\mathrm{Mov}(nD)$ численно эффективен и по предложению 4.4 имеем $\mathrm{Mov}(nD) \le nP$. Откуда мы получаем обратное включение

$$H^0(\mathscr{O}_X(\mathrm{Mov}(nD))) \subset H^0(\mathscr{O}_X(nP)).$$

□

Таким образом, вопрос о конечной порождённости дивизориальной алгебры $\mathrm{R}(X, D)$ сводится к вопросу о конечной порождённости дивизориальной алгебры $\mathrm{R}(X, P)$ для численно эффективного дивизора P. Однако алгебра $\mathrm{R}(X, D)$ не всегда конечно порождена.

5. Следствия из разложения Зарисского

Объемные дивизоры.

Лемма 5.1 (лемма Кодаиры)**.** *Пусть D дивизор на неособой проективной поверхности X. Если $D^2 > 0$ и $D \cdot H > 0$ для некоторого обильного дивизора H, то для любого обильного дивизора A имеем $|nD - A| \neq \emptyset$ для всех $n \gg 0$.*

Доказательство. По теореме Римана-Роха $h^0(X, nD) \geq \operatorname{const} n^2$ для всех $n \gg 0$. Мы можем считать, что A очень обилен. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(nD - A) \longrightarrow \mathscr{O}_X(nD) \longrightarrow \mathscr{O}_A(nD) \longrightarrow 0$$

Получаем $H^0(X, nD - A) \neq 0$. □

Лемма 5.2. *Пусть D дивизор на неособой проективной поверхности X. Если $D^2 > 0$ и $D \cdot H > 0$ для некоторого обильного дивизора H, то существуют $\alpha, \beta, n_0 > 0$ такие, что $\alpha n^2 \leq h^0(X, nD) \leq \beta n^2$ для всех $n > n_0$.*

Доказательство. Неравенство $\alpha n^2 \leq h^0(X, nD)$ следует из леммы выше. Докажем $h^0(X, nD) \leq \beta n^2$. Запишем $D = P + N$ (разложение Зарисского). Тогда $P^2 > 0$ и мы можем считать, что P – целый эффективный дивизор. Более того, $h^0(X, nP) = h^0(X, nD)$. Дивизор $mP + A$ обилен. По теореме Серра об обращении в нуль $H^i(X, n(mP + A)) = 0 \quad$ для всех $i > 0$, для всех $n > n_0(m)$. Если $h^0(X, nP) \geq \beta n^{2+\epsilon}$, то

$$h^0(X, n(mP + A)) \geq \beta(nm)^{2+\epsilon}.$$

С другой стороны, по теореме Римана-Роха

$$h^0(X, n(mP + A)) = \frac{1}{2} n^2 (mP + A)^2 + \cdots$$

□

Предложение 5.3. *Пусть D численно эффективный дивизор на неособой проективной поверхности X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$D^2 > 0$ и $D \cdot A > 0$ для обильного дивизора A;*
(2) *для обильного дивизора A имеем $|nD - A| \neq \emptyset \quad$ для всех $n \gg 0$.*
(3) *$\kappa(X, D) = 2$;*
(4) *существуют $\alpha, \beta, n_0 > 0$ такие, что $\alpha n^2 \leq h^0(X, nD) \leq \beta n^2 \quad$ для всех $n > n_0$.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) Следует из леммы 5.1.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Следует из того, что $h^0(X, mnD) \geq h^0(X, m(nD - A) + mA) \geq h^0(X, mA)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Следует из предложения 5.6.

(4) $\Longrightarrow$ (3) Следует из леммы 5.2 и предложения 5.6 так как $\kappa(X, D) > 0$.

(1) $\Longrightarrow$ (4) Следует из леммы 5.2. □

Следствие 5.4. *Пусть D дивизор на неособой проективной поверхности X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *для обильного дивизора A имеем $|nD - A| \neq \emptyset$ для всех $n \gg 0$.*
(2) *$\kappa(X, D) = 2$;*
(3) *существуют $\alpha, \beta, n_0 > 0$ такие, что $\alpha n^2 \leq h^0(X, nD) \leq \beta n^2$ для всех $n > n_0$.*

Определение 5.5. Дивизор D, удовлетворяющий эквивалентным условиям следствия, называется *объемным.*

Дивизоры с $\kappa = 1$.

Предложение 5.6. *Пусть D численно эффективный дивизор на неособой проективной поверхности X такой, что $\kappa(X, D) > 0$. Если $D^2 = 0$, то $\operatorname{Bs}|nD| = \emptyset$, $n \gg 0$ и $\kappa(X, D) = 1$. В этом случае существуют $\alpha, \beta, n_0 > 0$ такие, что $\alpha n \leq h^0(X, nD) \leq \beta n$ для всех $n > n_0$.*

Доказательство. Предположим, что $D^2 = 0$. Запишем $|nD| = F + |M|$. Тогда $D \cdot (M + F) = 0$, $D \cdot M = D \cdot F = 0$, $M^2 = M \cdot F = F^2 = 0$. Отсюда $\operatorname{Bs}|M| = \emptyset$ и $|M|$ задает морфизм $f : X \to C$ на кривую. Мы можем считать, что C неособа и f имеет связные слои. Так как $M \cdot F = 0$, то F содержится в слоях. Так как $F^2 = 0$, то по лемме Зарисского 3.4 имеем $pF \sim qf^*(c)$, $c \in C$. Следовательно, $\operatorname{Bs}|nD| = \emptyset$, $n \gg 0$ и для некоторого $m > 0$ $mD = f^*A$, где A – обильный дивизор на C. Так как $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_C$, то по формуле проекции

$$
\begin{aligned}
H^0(X, \mathscr{O}_X(rmD)) &= H^0(X, f_*(f^*\mathscr{O}_C(rA) \otimes \mathscr{O}_X)) = \\
= H^0(X, \mathscr{O}_C(rA) \otimes f_*\mathscr{O}_X) &= H^0(X, \mathscr{O}_C(rA) \otimes f_*\mathscr{O}_X) = H^0(X, \mathscr{O}_C(rA)).
\end{aligned}
$$

□

Следствие 5.7. *Пусть D дивизор на неособой проективной поверхности X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\kappa(X, D) = 1$;*
(2) *существуют $\alpha, \beta, n_0 > 0$ такие, что $\alpha n \leq h^0(X, nD) \leq \beta n$ для всех $n > n_0$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение Зарисского $D = P + N$. Эквивалентность достаточно доказывать для P. Так как P не объёмен, то $P^2 = 0$. В обоих случаях $\kappa(X, P) > 0$. Далее мы можем применить предложение 5.6. □

Лемма 5.8. *Пусть D численно эффективный объемный дивизор на неособой проективной поверхности X и пусть $C_1, \dots, C_n$ – кривые такие, что $D \cdot C_i = 0$. Тогда матрица пересечений $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно определена. Более того, существует лишь конечное число таких кривых. Для некоторых $\delta_i > 0$ дивизор $D - \sum \delta_i C_i$ обилен.*

Доказательство. Пусть $F = \sum \delta_i C_i$ такой, что $F^2 \leq 0$. Запишем $F = F^+ - F^-$. Тогда

$$F^2 = (F^+)^2 + (F^-)^2 - 2F^+ \cdot F^- \geq (F^+)^2 + (F^-)^2.$$

Следовательно, мы можем считать, что F эффективен. По теореме Ходжа об индексе $F \equiv 0$. Противоречие.

Для доказательства последней части для обильного дивизора A решим систему уравнений $A \cdot C_j = C_j \cdot \sum \delta_i C_i$. Положим $N = \sum \delta_i C_i$. Тогда $N \cdot C_j > 0$. Так как D объёмен, то $D - \epsilon N \sim_{\mathbb{Q}} R$, где $R \geq 0$. Если $(D - \epsilon N) \cdot C \leq 0$ для некоторой кривой C, то $C \neq C_i$. Следовательно, C – компонента R и имеется лишь конечное число таких кривых. Возьмем $\epsilon > 0$ так, что $D \cdot C > \epsilon N \cdot C$. □

6. Разложение Зарисского и конечная порождённость дивизориальных алгебр

Предложение 6.1 ([Zar62]). *Пусть X – неособая поверхность и пусть D – численно эффективный объемный дивизор на X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *алгебра $\mathrm{R}(X, D)$ конечно порождена;*
(2) *$\mathrm{Fix}\,|nD| = \emptyset$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$;*
(3) *$\mathrm{Bs}\,|nD| = \emptyset$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Теорема. X неособая проект. поверхность

D — численно эффективный объемный див на X.

С. У. Э.

(1) $R(X, D)$ не явл. к.п.

(2) $\mathrm{Fix}|nD| \neq \emptyset \quad \forall n>0$

(3) D не явл. полуобильным.

(2) $\Rightarrow$ (3) очев

(1) $\Rightarrow$ (3) ясно

Док. (2) $\Rightarrow$ (1) Имеем

$$\frac{1}{n\cdot m}\mathrm{Fix}\,|nmD| \leq \frac{1}{n}\mathrm{Fix}\,|nD|$$

т.к. $|nmD| \supset m|nD|$

Лемма $\mathrm{Fix}\,|nD|$ ограничено при $n \to \infty$.

Док. $F \subset \mathrm{Fix}\,|nD|$ компонента

H очень обилен, $H - K_X - F$ обилен

$$h^0(F, \mathcal{O}_F(mD+H)) \geqslant \deg \mathcal{O}_F(mD+H) - p_a(F) + 1$$

$$= F\cdot(mD+H) - p_a(F) + 1 =$$

$$= F\cdot(mD+H) - \frac{(K_X+F)\cdot F}{2} - 1 + 1 \geqslant 0, \quad m \gg 0$$

$$H^1(X, mD+H-F) = 0$$

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X(mD+H-F)) \to H^0(\mathcal{O}_X(mD+H)) \to \underset{\neq 0}{H^0(\mathcal{O}_F(mD+H))} \to$$

$\Rightarrow F$ не явл. неп. компонентой $|mD+H|$, $m \gg 0$

$$aD \sim H + E$$

$$\mathrm{Fix}\,|(a+m)D| = \mathrm{Fix}\,|mD + H + E| \leqslant E \qquad \square$$

Доказательство. (3) $\Longrightarrow$ (2) очевидно. (3) $\Longrightarrow$ (1) доказано.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Мы можем считать, что $\operatorname{Fix}|D| = \emptyset$ и $D^2 > 0$. Таким образом, D численно эффективен и объёмен (см. предложение 5.3). Заменяя D на пропорциональный, мы можем считать, что $D = A + N$, где A – очень обильный дивизор, а $N = \sum n_i N_i$ – целый эффективный дивизор такой, что $D \cdot N_i = 0$. Тогда $\operatorname{Bs}|D| \subset \operatorname{Supp}(N)$. Пусть $P \in \operatorname{Bs}|D|$ и пусть $P \in N_i$. Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathscr{O}_X(nD - N_i)) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, \mathscr{O}_X(nD)) \xrightarrow{\beta} H^0(N_i, \mathscr{O}_{N_i}(nD))$$

Так как $\operatorname{Fix}|nD| = \emptyset$, то α не является изоморфизмом. С другой стороны, $\mathscr{O}_{N_i}(nD) \simeq \mathscr{O}_{N_i}$ и поэтому $\dim H^0(N_i, \mathscr{O}_{N_i}(nD)) = 1$. Следовательно, β сюръективно. Ненулевое сечение $\mathscr{O}_{N_i}(nD) \simeq \mathscr{O}_{N_i}$ дает нам сечение $H^0(X, \mathscr{O}_X(nD))$, которое не обращается в нуль в P.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Предположим, что алгебра $\mathrm{R}(X, D)$ порождена конечным числом (однородных) элементов $u_1, \dots, u_r$ и $\operatorname{Fix}|nD| \neq \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 6.2. *Пусть D – численно эффективный объемный дивизор. Тогда кратности компонент $\operatorname{Fix}|nD|$ ограничены при $n \to \infty$.*

Доказательство. Мы можем считать, что $\dim|D| > 0$. Пусть E_i – неподвижные компоненты $|D|$. Выберем очень обильный дивизор H такой, что дивизоры $H - K_X - E_i$ обильны для всех E_i и $H^1(\mathscr{O}_X(D + H - E_i)) = 0$ (теорема Серра). По теореме Римана-Роха

$$h^0(E_i, \mathscr{O}_{E_i}(D + H)) \geq (mD + H) \cdot E_i - p_a(E_i) + 1 > 0.$$

Так как $H^1(\mathscr{O}_X(mD + H - E_i)) = 0$, то из точной последовательности

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_X(mD + H - E_i)) \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_X(mD + H)) \\ \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_{E_i}(mD + H)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

получаем, что E_i не является неподвижной компонентой линейной системы $|mD + H|$. Следовательно, линейная система $|mD + H|$ не имеет неподвижных компонент при $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Наконец, так как D объёмен, то для некоторого $a \in \mathbb{N}$ имеем $aD \sim H + F$, где F – эффективный дивизор. Поэтому дивизор

$$\operatorname{Fix}|(a + m)D| = \operatorname{Fix}|F + H + mD|$$

ограничен дивизором F. $\square$

Пусть $d_i = \deg u_i$ и $d := \max\{d_1, \dots, d_r\}$. Тогда векторное пространство $H^0(\mathscr{O}_X(nD))$ порождается мономами вида

$$u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} \cdots u_r^{\nu_r},$$

где

$$\nu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \sum_{i=1}^{r} d_i \nu_i = n.$$

Поэтому

$$\operatorname{Fix}|nD| \geq \operatorname{Min}\left\{ \sum_{i=1}^{r} \nu_i \operatorname{Fix}|d_i D| \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r} d_i \nu_i = n \right\}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d!}{k} \operatorname{Fix}|kD| \geq \operatorname{Fix}|d!D| \neq 0$$

для всех $k = 1, \ldots, d$. Таким образом, дивизоры

$$\operatorname{Fix}|d_1 D|, \ldots, \operatorname{Fix}|d_r D|$$

имеют по крайней мере одну общую компоненту, что и дает нам противоречие. □

./pics/out0942.pdf

Пусть $R(X,D)$ к.и.
порождается $s_i \in H^0(X, d_i D)$

$H^0(X, nD)$ порождается мономами

$$s_1^{k_1} \cdots s_m^{k_m}, \quad \sum k_i d_i = n$$

$$\mathrm{Fix}\,|nD| = \mathrm{Min}\left(\mathrm{div}\,(s_1^{k_1} \cdots s_m^{k_m}) + nD\right) =$$

$$= \mathrm{Min}\Big($$

$|A| + |B| \subset |A+B|$

$A + (f)$

$B + (g)$

$A + B + (f \cdot g)$

$C \quad D \quad H_{ij} \quad j \geq N$

$1 \quad\quad 0 \quad\quad |iC + jD|$

$$\| $$

$$|iC + (j-1)D| + |D|$$

$$|(i-1)C + jD| + C$$

$(f, g) \quad f\,g$

$(f', g') \quad f'\,g'$

$(f+f', g+g') \quad (f+f')(g+g')$

$$0 \to \mathcal{O}_X((i-1)C + jD) \to \mathcal{O}_X(iC + jD) \to \mathcal{O}_C(\underline{iC + jD}) \to 0$$

$\mathcal{O}_C(iC + jD) \quad iC + jD$

$H^1(\mathcal{O}_X((i-1)C + jD)) \quad iC + jD \quad D$

$$0 \to \mathcal{O}_C(iC + (j-1)D) \to \mathcal{O}_C(iC + jD) \to \mathcal{O}_{D \cap C}(iC + jD) \to 0$$

$\mathcal{C}$

$f \quad \underline{\mathcal{O}_C(D)} \quad f \quad \mathcal{O}_C(f)|_C \geq 0$

./pics/out0943.pdf

<u>Теорема</u> D дивизор на поверхности т.ч. $\dim|D|>0$ и $|D|$ не имеет неп. компонент $\Longrightarrow$ $Bs\,|D|=\emptyset$.

<u>Док.</u> A очень обильный. <u>$A-K_X$ обилен</u>

$|nD+mA|$

<u>Лемма</u> $\forall n\ \exists m_0$ т.ч. $Bs\,|nD+mA|=0$ $\forall m>m_0$.

<u>Док.</u> Одно из опред. обильности.

A обильный пучок, если $\forall\ \mathcal{F}$ $\mathcal{F}\otimes A^{\otimes m}$ пор. гл. сеч. $m\gg 0$

т.е. $Bs\,|nD+m_0A|=0 \Longrightarrow Bs\,|nD+mA|=0$. $\square$

Зафиксируем n и пусть $m>0$ минимальное т.ч. $Bs\,|nD+mA|=\emptyset$.

$$0\to \mathcal{O}_X(nD+(m-1)A)\to \mathcal{O}_X(nD+mA)\to \mathcal{O}_A(nD+mA)\to 0$$

$A-K_X$ обилен

./pics/out0944.pdf

A обильн.

$\forall n \ \exists \ \cancel{m} \ m_0(n)$ т.ч. $\forall m \geq m_0$

$$h^0(m(n\Theta + A)) = 0$$

$$\Longrightarrow \dim|m(n\Theta+A)| \leq \frac{m^2(n\Theta+A)^2}{2}(1+\delta)$$

$$\geq$$

$\dim|mn\Theta|$ Пусть

$$\geq$$

$$C(nm)^{2+\varepsilon}$$

$$C n^{2+\varepsilon} \cdot m^{\varepsilon} \leq \frac{(n\Theta+A)^2}{2}(1+\delta)$$

Противоречие.

$P > 0$

Лемма P nef. Эквивалентно

(1) $P^2 > 0$

(2) $\varkappa(X,P)=2$

(3) $h^0(X,nP) \sim cn^2$

Pf (2) $\Rightarrow$ (1) ~~Если P^2~~

$|P| \neq 0 \Rightarrow P^2 \geqslant 0$

Если $P^2=0$, то как выше получим $\varkappa=1$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Иначе $\varkappa \leq 1 \Rightarrow P^2=0$

(3) $\Rightarrow$ (2) Иначе $\varkappa \leq 1 \Rightarrow$ плохо растёт

(1),(2) $\Rightarrow$ (3)

$$0 \to \mathcal{O}(nD-A) \to \mathcal{O}(nD) \to \mathcal{O}_A(nD) \to 0$$

$h^0(nD) \geqslant \frac{D^2}{2}n^2$ $\forall$ алгебр. из Р-Р.

$h^0(\underbrace{nD+A}_{\text{обильн}}) \geqslant \frac{D^2 n^2}{2}$

Кодаира

A-K обильн.

$c(nm)^{2+\varepsilon}$

$\wedge$

$|nmD|$

$\leq \frac{D^2}{2}n^2m^2 + 2\frac{AD}{2}nm^2 + \frac{A^2}{2}m^2$

$nD+mA$

$\forall n\ \exists m$

$\frac{\mathcal{O}(nD+mA)}{h^0} \to \mathcal{O}(nD+mA)$

$m(nD+A)$ $\quad \frac{(nD+A)^2}{2}m^2$ $\quad n$

$m \geqslant m(n)$

Из предложений 6.1, 1.7 и 5.6 получаем следующий критерий.

Теорема 6.3 ([Zar62])**.** *Пусть X – поверхность и пусть D – эффективный по модулю $\mathbb{Q}$-линейной эквивалентности $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X. Тогда алгебра $\mathrm{R}(X, D)$ не является конечно порожденной, если и только если $\kappa(X, D) = 2$ и линейная система $|nP|$ имеет неподвижные компоненты для любого $n > 0$.*

Пример (Зарисский)**.** Рассмотрим неособую кубическую кривую $C \subset \mathbb{P}^2$. Выберем 12 точек $P_1, \dots, P_{12} \in C$ таким образом, что дивизор $\mathscr{O}_C(4) - \sum P_i$ не является кручением в $\mathrm{Pic}(C)$. Пусть $\sigma\colon X \to \mathbb{P}^2$ – раздутие точек $P_1, \dots, P_{12}$ и пусть $E_1, \dots, E_{12}$ – соответствующие исключительные дивизоры. Положим $D := \sigma^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(4) - \sum E_i$. Нетрудно показать, что дивизор D эффективен, численно эффективен и объёмен. Следовательно, в разложении Зарисского мы имеем $N = 0$. Пусть $\widetilde{C} := \sigma^{-1}(C)$ – собственный прообраз кривой C. Тогда $D \cdot \widetilde{C} = 0$. Более того, $\widetilde{C}$ – неподвижная компонента линейной системы $|nD|$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, иначе

$$nD|_{\widetilde{C}} = n\left(\mathscr{O}_C(4) - \sum P_i\right) \sim 0.$$

Поэтому D удовлетворяет условиям теоремы 6.3 и алгебра $\mathrm{R}(X, D)$ не является конечно порожденной.

Список литературы

[Fuj79] Takao Fujita. On Zariski problem. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 55(3):106–110, 1979.

[Zar62] Oscar Zariski. The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. *Ann. of Math. (2)*, 76:560–615, 1962.