Задачи

(1) Рассмотрим многообразие $X := \{x_1x_2 - x_3x_4 = 0\} \subset \mathbb{A}^4$ и рациональное отображение $f : X \dashrightarrow \mathbb{A}^1$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto x_1/x_3$. Докажите, что X нормально и f не определено только в начале координат.

(2) (теорема чистоты ван дер Вардена) Пусть $f : X \to Y$ – бирациональный морфизм, пусть $P \in X$ и пусть $Q := f(P)$. Предположим, что точка $Q \in Y$ неособа и является фундаментальной точкой для f^{-1}. Докажите, что в исключительном множестве f существует компонента коразмерности 1, т.е. существует неприводимое подмногообразие $D \subset X$ коразмерности 1 такое, что $\operatorname{codim} f(D) \geq 2$. *Указание.* Используйте то, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{Q,Y}$ является факториальным кольцом.

(3) Рассмотрим вырожденную квадрику $Q = \{xy - zt = 0\} \subset \mathbb{A}^4$. Докажите, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{0,Q}$ не является факториальным. Пусть $f : \tilde{Q} \to Q$ – раздутие плоскости $\{x = z = 0\}$. Докажите, что исключительное множество является кривой, изоморфной $\mathbb{P}^1$.

(4) (Лемма Нишимуры.) Пусть $f : X \dashrightarrow Y$ – рациональное отображение многообразий над (любым) полем $\Bbbk$, где многообразие Y проективно. Предположим, что X имеет неособую $\Bbbk$-точку. Тогда Y имеет $\Bbbk$-точку. *Указание.* Индукция по размерности.

(5) Приведите пример, показывающий, что в предыдущей задаче условие неособости точки необходимо.

(6) Докажите, что неособая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^n$ над (любым) полем $\Bbbk$ рациональна тогда и только тогда, когда она имеет $\Bbbk$-точку.

(7) Докажите, что если кубическая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ над полем $\Bbbk$ имеет особую двойную точку, определенную над $\Bbbk$, то она рациональна.

(8) Докажите, что если кубическая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ содержит пару непересекающихся подпространств $\mathbb{P}^n$, определенных над $\Bbbk$, то она рациональна. Приведите примеры таких гиперповерхностей.

(9) Докажите, что неособое пересечение двух квадрик $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^{n+2}$ размерности ≥ 3 над алгебраически замкнутым полем рационально. *Указание.* Спроектируйте из точки. Воспользуйтесь задачей (7) и теоремой Лефшеца о гиперплоском сечении.

(10) Пусть $L, M \subset \mathbb{P}^3$ – пара пересекающихся прямых. Рассмотрим раздутия $B_L\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$, $B_M\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ и $B_LB_M\mathbb{P}^3 \to B_M\mathbb{P}^3$ прямой L, прямой M и собственного прообраза прямой L. Имеется

отображение $f : B_L B_M \mathbb{P}^3 \dashrightarrow B_L \mathbb{P}^3$. Покажите, что f не является морфизмом, однако f^{-1} не стягивает дивизоров. Разложите f в композицию раздутий и обратных к ним отображений.

(11) Пусть $P \in L \subset \mathbb{P}^3$ – точка на прямой. Рассмотрим раздутие $f : B_L \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ прямой L и пусть $C := f^{-1}(P)$. Докажите, что имеется естественный изоморфизм $B_C B_L \mathbb{P}^3 \simeq B_L B_P \mathbb{P}^3$.

(12) Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ – неприводимая кривая с единственной особой точкой, которая является обыкновенной двойной точкой или простым каспом. Докажите, что раздутие $B_C \mathbb{P}^3$ имеет единственную особую точку P, раздутие которой $B_P B_C \mathbb{P}^3$ неособо. Докажите, что морфизм $B_P B_C \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ не может быть разложен в композицию раздутий с гладкими центрами.

(13) Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – квадрика, заданная уравнением $x_1x_2 - x_3x_4 = 0$. Рассмотрим плоскости $\Pi_1 := \{x_1 = x_3 = 0\}$ и $\Pi_2 := \{x_1 = x_4 = 0\}$. Пусть $f_i : X_i \to X$ – раздутие Π_i. Докажите, что X_i неособо, исключительное множество f_i – неособая рациональная кривая, многообразия X_i изоморфны, но композиция $f_1 \circ f_2^{-1} : X_1 \dashrightarrow X_2$ не является изоморфизмом.

(14) Пусть $Q \subset \mathbb{A}^N$ – неприводимая квадрика, заданная однородным уравнением ранга r. Вычислите $\mathrm{Cl}(Q)$ и $\mathrm{Pic}(Q)$.

(15) Пусть $Q \subset \mathbb{P}^N$ – неприводимая квадрика, заданная однородным уравнением ранга r. Вычислите $\mathrm{Cl}(Q)$ и $\mathrm{Pic}(Q)$.

(16) Пусть $X = \mathrm{Gr}(n,k)$ – многообразие Грассмана. Докажите, что $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ и $K_X = -nH$, где H – положительная образующая $\mathrm{Pic}(X)$.

(17) Докажите, что $\Omega^r[\mathbb{P}^n] = 0$ при $r > 0$.

(18) Докажите, что поверхность $\{x_0^{p+1}+x_1^{p+1}+x_2^{p+1}+x_3^{p+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ унирациональна, но не рациональна. *Указание.* Для доказательства унирациональности преобразуйте уравнение к следующему (аффинному) виду $x^p y + y^p x = z^p + z$ и примените накрытие $(x,t,z) \mapsto (x, y = t^p, z)$.

(19) Докажите, что $K_X = 0$ для неособой аффинной гиперповерхности.

(20) Опишите каноническое кольцо $R(K_X, X)$ неособой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^n$.

(21) Пусть $\kappa(X,D) \geq 0$. Докажите, что существуют $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $H^0(X, nD) \neq 0$ для $n \geq n_1 \iff n \equiv 0 \mod n_0$.

(22) Пусть $\kappa(X,D) = 0$. Докажите, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $H^0(X, nD) \neq 0 \iff n \equiv 0 \mod n_0$.

(23) [3], [4] Пусть E – эллиптическая кривая без комплексного умножения и пусть $X = E \times E$. Опишите замыкание конуса эффективных дивизоров на X.

(24) Пусть $f : X \to Y$ – проективный бирациональный морфизм, где X – неособая, а Y – нормальная поверхности. Пусть $E = \sum E_i$ – исключительный дивизор. Докажите, что матрица $\|F_i \cdot F_j\|$ отрицательно определена. В частности, F_i линейно независимы в $N^1(X)$.

(25) (Лемма Зарисского) Пусть $f : X \to C$ – морфизм со связными слоями, где X – неособая поверхность, а C – неособая кривая. Пусть $F = \sum a_i F_i = f^*(P)$ – схемный слой. Докажите, что матрица $\|F_i \cdot F_j\|$ отрицательно полуопределена. Более того, F_i линейно независимы в $N^1(X)$, $(\sum b_i F_i)^2 \le 0$ для любых b_i и $(\sum b_i F_i)^2 = 0 \iff p \sum b_i F_i = qF$ для некоторых p, $q \in \mathbb{Z}$.

(26) Докажите, что группа автоморфизмов поверхности общего типа конечна.

(27) Пусть X – поверхность общего типа. Докажите, что существует n_0 такое, что для *любого* $n > n_0$ линейная система $|nK_X|$ не имеет базисных точек.

(28) Пусть X – поверхность общего типа. Докажите, что X не может содержать алгебраического семейства эллиптических кривых.

(29) Показать, что на нерациональной поверхности число (-1)-кривых конечно.

(30) Предположим, что на минимальной линейчатой поверхности X над эллиптической кривой существуют два непересекающихся сечения C_1 и C_2. Докажите, что $-K_X = C_1 + C_2$. *Указание.* Используйте точную последовательность вырезания для $\mathrm{Pic}(X)$.

(31) Предположим, что на минимальной линейчатой поверхности X существуют три непересекающихся сечения. Докажите, что X является произведением. *Указание.* Используйте точную последовательность вырезания для $\mathrm{Pic}(X)$.

(32) Пусть X – минимальная линейчатая поверхность над эллиптической кривой C. Предположим, что на X также имеется структура эллиптического расслоения. Докажите, что $X \simeq (C \times \mathbb{P}^1)/G$, где G – группа, действующая сдвигами на C

(33) Докажите, что минимальная линейчатая поверхность содержит не более одной кривой с отрицательным индексом самопересечения.

(34) Классифицировать биэллиптические поверхности. Доказать, что на биэллиптической поверхности X имеет место следующее: $q(X) = 1$, $p_g(X) = 0$, $nK_X \sim 0$ для некоторого $n \in \{2, 3, 4, 6\}$. (Напомним, что биэллиптическая поверхность – это фактор произведения двух эллиптических кривых $E_1 \times E_2$ по конечной группе G, которая действует на E_1 сдвигами, а на E_2 – не только сдвигами.)

(35) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть $f\colon X \to Y$ конечный морфизм степени 2. Докажите, что поверхность Y особа.

(36) Пусть $K3$ поверхность X представляется в виде двулистного накрытия $X \to Y$ некоторой неособой поверхности Y. Каков может быть бирациональный тип Y? Приведите примеры.

(37) Как устроено отображение Альбанезе для биэллиптической поверхности?

(38) Пусть A – абелева поверхность и пусть $f\colon A \to Z$ – сюръективный морфизм на кривую со связными слоями. Показать, что f – эллиптическое расслоение без кратных и особых слоев и Z – эллиптическая кривая.

(39) Пусть A – абелева поверхность и пусть $f\colon A \to X$ – сюръективный морфизм на (неособую) поверхность. Каков может быть бирациональный тип X?

(40) Пусть X – поверхность такая, что антиканоническая линейная система $|-K_X|$ непуста. В каких случаях кривая $D \in |-K_X|$ может быть несвязна?

(41) Пусть C – кривая рода 2. Найдите кодаирову размерность симметрического квадрата S^2C.

(42) Пусть $X \to C$ – линейчатая поверхность над кривой рода > 0. Докажите, что структура линейчатой поверхности единственна.

(43) Найдите все поверхности типа К3, являющиеся полными пересечениями в грассманианах.

(44) Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ поверхность неотрицательной кодаировой размерности. Докажите, что группа ее проективных автоморфизмов конечна.

(45) Опишите алгебру $R(X, K_X)$ для поверхностей кодаировой размерности 0.

(46) Опишите компоненту $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$, содержащую линейные вложения.

(47) Докажите, что семейство прямых на неособой кубической гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^4$ имеет размерность 2.

(48) Докажите, что семейство прямых на неособой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^4$ степени 4 имеет размерность 2.

(49) Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ неособая гиперповерхность степени $d > n$. Докажите, что существует счетное количество подмногообразий $Y_i \subsetneq X$ такое, что $X \setminus \cup Y_i$ не содержит рациональных кривых.

(50) Пусть $f : X \to Y$ – собственный бирациональный морфизм и Y многообразие неособо. Докажите, что для любой точки $y \in Y$ слой $f^{-1}(y)$ или является точкой или содержит рациональную кривую.