

Осенний семестр, 2015 г.  
Задачи по курсу “Классическая алгебраическая геометрия”  
Ю.Г.Прохоров

- (1) Докажите, что семейство прямых на трехмерной quadric  $Q \subset \mathbb{P}^4$  параметризуется проективным пространством  $\mathbb{P}^3$ .
- (2) Когда грассманиан  $\text{Gr}(k, n)$  изоморфен полному пересечению (в некотором проективном пространстве  $\mathbb{P}^N$ )?
- (3) Опишите компоненту схемы Гильберта, параметризующую прямые в грассманиане  $\text{Gr}(2, n)$  (с обоснованием).
- (4) Докажите, что общее полное пересечение трех quadric в  $\mathbb{P}^5$  не содержит прямых.
- (5) Докажите, что общее полное пересечение quadric и кубики в  $\mathbb{P}^4$  не содержит прямых.
- (6) Докажите, что общая quartic в  $\mathbb{P}^3$  не содержит прямых.
- (7) Докажите, что любая 2-плоскость в грассманиане  $\text{Gr}(2, n)$  является многообразием Шуберта типа  $\sigma_{n-2, n-4}$  или  $\sigma_{n-3, n-3}$ .
- (8) Вычислите ранг группы  $H^2(X, \mathbb{Z})$  для неособой quintic  $X = X_5 \subset \mathbb{P}^3$ .
- (9) Пусть  $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$  – неособое полное пересечение двух quadric. Опишите многообразие, параметризующее коники на  $X$ . Докажите, что это многообразие четырехмерно.
- (10) Пусть  $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$  – неособое полное пересечение двух quadric и пусть  $C \subset X$  невырожденная коника. Докажите, что существует неособое гиперплоское сечение, проходящее через  $C$ . Найдите возможности для нормального пучка  $C$  в  $X$ .
- (11) Вычислите нормальное расслоение прямой в неособой трехмерной quadric.
- (12) Пусть  $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$  – неособая кубика. Докажите, что  $X$  содержит двумерное семейство прямых. Какое может быть нормальное расслоение прямой в  $X$ ?
- (13) Пусть  $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$  – неособое полное пересечение трех quadric. Докажите, что  $X$  содержит прямую. *Указание.* Воспользуйтесь исчислением Шуберта.
- (14) Пусть  $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$  – неособое полное пересечение трех quadric. Докажите, что  $X$  содержит одномерное семейство прямых. *Указание.* Найдите возможности для нормального пучка и воспользуйтесь теорией деформации.

- (15) Пусть  $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$  – общее полное пересечение трех квадратик. Вычислите степень линейчатой поверхности, заметаемой прямыми на  $X$ . *Указание.* Воспользуйтесь исчислением Шуберта.
- (16) Пусть  $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$  – неособая кватрика. Предположим, что  $X$  содержит прямую (это верно для неособой кватрики). Докажите, что  $X$  содержит одномерное семейство прямых. *Указание.* Найдите возможности для нормального пучка и воспользуйтесь теорией деформации.
- (17) Пусть  $X = X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$  – неособое полное пересечение квадрики и кубики. Предположим, что  $X$  содержит прямую (это верно для неособого пересечения квадрики и кубики). Докажите, что  $X$  содержит одномерное семейство прямых. *Указание.* Найдите возможности для нормального пучка и воспользуйтесь теорией деформации.
- (18) Пусть  $X = X_3 \subset \mathbb{P}^5$  – достаточно общая (неособая) кубика. Докажите, что  $X$  не содержит плоскостей.
- (19) Вычислите ранг группы  $H^3(X, \mathbb{Z})$  для неособой кватрики  $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ .
- (20) Вычислите ранг группы  $H^3(X, \mathbb{Z})$  для неособого полного пересечения трех квадратик  $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$ .
- (21) Вычислите ранг группы  $H^4(X, \mathbb{Z})$  для неособой кубики  $X = X_3 \subset \mathbb{P}^5$ .
- (22) Пусть  $X := \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^6$  – линейное сечение грассманиана  $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$  общим подпространством коразмерности 3. Докажите, что  $X$  содержит двумерное семейство прямых.
- (23) Пусть  $X := \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^7$  – линейное сечение грассманиана  $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$  общим подпространством коразмерности 2. Опишите конфигурацию плоскостей на  $X$ .
- (24) Пусть  $X := \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^7$  – линейное сечение грассманиана  $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$  общим подпространством коразмерности 2. Вычислите ранг группы  $H^4(X, \mathbb{Z})$  и докажите, что эта группа порождается классами плоскостей.
- (25) Докажите, что на абелевой поверхности  $A = E \times E$  имеется бесконечно много главных поляризаций.
- (26) Докажите, что существует кватрика  $S = S_4 \subset \mathbb{P}^3$  с 16 особыми точками, не содержащая прямых.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харрис Д. Алгебраическая геометрия. Начальный курс. — Москва: МЦНМО, 2006.
- [2] Хартсторн Р. Алгебраическая геометрия. — Москва: Мир, 1981.

- [3] *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. — II изд. — Москва: Наука, 1988. — Т. I, II.
- [4] *Гриффитс Ф., Харрис Д.* Принципы алгебраической геометрии. — Москва: Мир, 1982. — Т. 1, 2.