

Весенний семестр, 2016 г.
Задачи по курсу “Классическая алгебраическая геометрия”
Ю.Г.Прохоров, К.А. Шрамов

- (1) Докажите, что канонический образ кривой рода 5 не является пересечением трех квадрик тогда и только тогда, когда кривая гиперэллиптическая или тригональная. Что высекают квадрики, проходящие через каноническую тригональную кривую рода 5?
- (2) Докажите, что общая кривая рода 5 не имеет автоморфизмов. Каков максимальный порядок группы автоморфизмов кривой рода 5 в гиперэллиптическом, тригональном, и общем случае?
- (3) Каковы могут быть особенности кривой Гессе для нетригональной канонической кривой рода 5?
- (4) Может ли каноническая кривая $C = C_8 \subset \mathbb{P}^5$ рода 5 содержаться в (антиканонической) поверхности дель Пеццо $S = S_5 \subset \mathbb{P}^5$?
- (5) Пусть $X = X_8 \subset \mathbb{P}^6$ – неособое пересечение трех квадрик. Вычислите $H^3(X, \mathbb{Z})$.
- (6) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – неособая кубическая гиперповерхность и пусть $P \in X$ – точка, через которую проходит лишь конечное число прямых. Докажите, что с $P \in X$ связан линк Саркисова $X \leftarrow \tilde{X} \dashrightarrow X' \rightarrow Y$. Опишите подробно этот линк.
- (7) Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^5$ – неособое пересечение двух квадрик. Докажите, что с любой точкой $P \in X$ связан линк Саркисова. Опишите подробно этот линк.
- (8) Пусть $X = X_5 \subset \mathbb{P}^6$ – многообразие Фано степени 5 индекса 2. Докажите, что с любой точкой $P \in X$ связан линк Саркисова. Опишите подробно этот линк.
- (9) Пусть $X = X_8 \subset \mathbb{P}^6$ – неособое пересечение трех квадрик. Докажите, что с прямой $L \in X$ связан линк Саркисова. Опишите подробно этот линк.
- (10) Пусть $X = X_6 \subset \mathbb{P}^5$ – неособое пересечение квадрики и кубики. Докажите, что с прямой $L \in X$ связан линк Саркисова. Опишите подробно этот линк.
- (11) Проверьте, что линейная система квадрик, проходящих через 7 общих точек в \mathbb{P}^3 , задает эллиптическое расслоение, и опишите кривую, которая параметризует особые слои этого расслоения.

- (12) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ — неособая кубическая поверхность. Выберем точку P на X . Докажите, что с P связана бирациональная инволюция поверхности X . Как она устроена, если точка P не лежит на прямых на X ? Если точка P лежит на единственной прямой на X ? Если точка P является точкой пересечения двух прямых на X ?
- (13) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ — неособая кубическая поверхность. Выберем точку P на X . Опишите бирациональную инволюцию, связанную с парой общих точек на X .
- (14) Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ — кватрика с обыкновенной двойной особой точкой P . Предположим, что ранг группы классов дивизоров Вейля на X равен 1. Докажите, что с P связан линк Саркисова. Опишите подробно этот линк.
- (15) Пусть $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ — многообразие Фано степени 5 индекса 2. Докажите, что группа автоморфизмов многообразия X изоморфна группе $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{k})$. (Указание: воспользуйтесь тем, что существует гладкое $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{k})$ -инвариантное сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 5)$ подпространством коразмерности 3, а также описанием прямых на X .)
- (16) Пусть $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ — многообразие Фано степени 5 индекса 2. Докажите, что неприводимые коники на X параметризуются открытым подмножеством в \mathbb{P}^4 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Тюрин А. Н.* О пересечении квадрик // *Успехи мат. наук.* — 1975. — Т. 30, № 6. — С. 51–99.
- [2] *Исковских В. А.* Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано. — Изд-во МГУ, 1988.
- [3] *Iskovskikh V. A., Prokhorov Y.* Fano varieties. Algebraic geometry V. — Berlin: Springer, 1999. — Vol. 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.*