Весенний семестр, 2014 г.
Задачи по курсу "**Когомологии в алгебраической геометрии**"
Ю.Г.Прохоров

(1) Пусть
$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$
– центральное расширение, соответствующее тривиальному элементу $H^2(G, Z)$. Докажите, что $\hat{G}$ – полупрямое произведение и "дополнительные" подгруппы G в $\hat{G} = Z \rtimes G$ описываются группой $H^1(G, Z)$. Приведите примеры.

(2) Вычислите $H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^*)$ и постройте явно центральные простые алгебры (скрещенные произведения).

(3) Пусть G – группа и пусть
$$1 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 1$$
– точная последовательность G-модулей. Докажите точность последовательности
$$H^1(G, M) \longrightarrow H^1(G, M'') \longrightarrow H^2(G, M').$$

(4) Докажите, что над кольцом главных идеалов модуль проективен тогда и только тогда, когда он свободен.

(5) Приведите пример непроективного модуля.

(6) Приведите пример неинъективного модуля.

(7) Приведите пример точной последовательности модулей
$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$
такой, что последовательность
$$0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$$
не является точной для некоторого N.

В следующих задачах при вычислении когомологий можно пользоваться следующим фактом:

Теорема. *Пусть X – алгебраическое многообразие и пусть $\mathscr{F}$ – квазикогерентный пучок на X. Пусть U – открытое аффинное покрытие. Тогда $\check{H}^q(U, \mathscr{F}) \simeq H^q(X, \mathscr{F})$.*

(8) Вычислите $H^q(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n})$.

(9) Вычислите $H^q(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n})$.

(10) Рассмотрим открытое подмножество аффиной плоскости $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Вычислите $H^1(X, \mathscr{O}_X)$. *Указание.* $\oplus_{i,j} \Bbbk \cdot (x^i y^j)$.

(11) Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ – кривая, заданная (однородным) уравнением $f(x, y, z) = 0$ степени d. Докажите, что $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ – конечномерное пространство размерности $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. *Указание.* X можно покрыть двумя открытыми аффинными множествами.
(12) Вычислите $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}^*_{\mathbb{P}^1})$ (пучок $\mathscr{O}^*_X$ не является квазикогерентным!).
(13) Докажите, что модуль над кольцом главных идеалов является инъективным тогда и только тогда, когда он делим.
(14) Докажите, что прямое произведение модулей инъективно тогда и только тогда, когда инъективен каждый сомножитель.
(15) Докажите, что модуль N является инъективным тогда и только тогда, когда он выделяется прямым слагаемым в любом модуле $M \supset N$.
(16) Вычислите $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}, A)$.
(17) Вычислите $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
(18) Вычислите $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.
(19) Пусть S^1 – окружность (с хаусдорфовой топологией). Вычислите $H^1(S^1, \mathbb{Z})$.
(20) Пусть S^1 – окружность (с хаусдорфовой топологией). Вычислите $H^1(S^1, \mathscr{C}^\infty)$, где $\mathscr{C}^\infty$ – пучок дифференцируемых функций.
(21) Пусть $P, Q \in \mathbb{A}^1$ – две различные точки и пусть $U := \mathbb{A}^1 \setminus \{P, Q\}$. Докажите, что $H^1(\mathbb{A}^1, \mathbb{Z}_U) \neq 0$.
(22) Обозначим через $\mathscr{K}_X$ постоянный пучок поля рациональных функций $\Bbbk(X)$ на многообразии (приведенной неприводимой схеме) X. Докажите, что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathbb{P}^1}/\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$$

является плоской резольвентой. Выведите отсюда, что $H^i(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$ при $i > 0$.

Список литературы

[AM03] М. Атья and И. Макдональд. *Введение в коммутативную алгебру*, volume 4 of *XX век – Мат. и мех.* Факториал Пресс, Москва, 2003.
[Хар81] Р. Хартсхорн. *Алгебраическая геометрия.* Мир, Москва, 1981.
[Шаф88] И. Р. Шафаревич. *Основы алгебраической геометрии*, volume I, II. Наука, Москва, II edition, 1988.