Весенний семестр, 2014 г.
Задачи по курсу “**Алгебраические кривые** ”
Ю.Г.Прохоров
27 апреля 2015 г.

(1) Пусть $X = \{xy - z^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^3$ – аффинный квадратичный конус и пусть $L = \{x = z = 0\}$ – прямая на нем. Докажите, что дивизор L не является локально главным.
(2) Пусть $X = \{xy - zt = 0\} \subset \mathbb{A}^4$ – аффинный квадратичный конус и пусть $L = \{x = z = 0\}$ – плоскость на нем. Докажите, что дивизор L не является локально главным.
(3) Пусть X – неособое аффинное многообразие. Докажите, что $\mathrm{Cl}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда кольцо $\Bbbk[X]$ факториально.
(4) Рассмотрим квадратичный конус $X = \{xy - z^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^3$. Докажите, что X – нормальное многообразие. Докажите, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{0,X}$ не является факториальным.
(5) Рассмотрим квадратичный конус $X = \{xy - zt = 0\} \subset \mathbb{A}^4$. Докажите, что X – нормальное многообразие. Докажите, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{0,X}$ не является факториальным.
(6) Рассмотрим квадратичный конус $X = \{x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^n$, $n \geq 5$. Докажите, что X – нормальное многообразие. Докажите, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{0,X}$ является факториальным.
(7) Докажите, что любая неприводимая квадратичная гиперповерхность является нормальным многообразием.
(8) Опишите фактормногообразие $\mathbb{A}^2/G$, где G – группа, порожденная $\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, ζ_n – корень степени n из 1.
(9) Опишите фактормногообразие $\mathbb{A}^2/G$, где G – циклическая группа, порожденная $\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n \end{pmatrix}$, ζ_n – корень степени n из 1.
(10) Постройте нормализацию плоской кривой $y^2 - x^3 = 0$.
(11) Опишите дивизоры на произведении проективных пространств $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.
(12) Найдите однородный идеал образа n-кратного отображения Веронезе $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$. Докажите, что это отображение является вложением.
(13) Докажите, что идеал $(2, 1 + \sqrt{-1})$ в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}$ является обратимым, но не является главным.

(14) Найдите однородный идеал образа 2-кратного отображения Веронезе $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$. Докажите, что это отображение является вложением.

(15) Найдите однородный идеал образа отображения $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$, заданного линейной системой коник, проходящих через заданную фиксированную точку. Докажите, что это отображение не является регулярным.

(16) Докажите, что существует четырехмерная линейная система $\mathcal{M} \subset |2L|$ коник на $\mathbb{P}^2$, не имеющая базисных точек. Найдите однородный идеал образа соответствующего отображения $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$. Докажите, что это отображение является вложением.

(17) Найдите однородный идеал образа отображения Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$. Докажите, что это отображение является вложением.

(18) Докажите, что $\Omega[\mathbb{A}^n]$ – свободный $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$-модуль и найдите его базис.

(19) Пусть $Z = X \times Y$. Докажите, что $K_Z = p_1^* K_X + p_2^* K_Y$, где p_i – проекции.

(20) Докажите, что любая кривая рода 2 является гиперэллиптической.

(21) Вычислите род плоской кривой степени d.

(22) Пусть X – эллиптическая кривая и пусть D – дивизор степени 4 на X. Докажите, что линейная система $|D|$ задает вложение в $\mathbb{P}^3$. Приведите пример такого вложения (пересечение двух квадрик) с обоснованием.

(23) Докажите, что неособая плоская кривая не может иметь род 2.

(24) Воспользуйтесь теоремой Римана-Роха для доказательства существования группового закона на эллиптической кривой.

Список литературы

[1] *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. — II изд. — Москва: Наука, 1988. — Т. I, II.

Дополнительная литература

[2] *Гриффитс Ф., Харрис Д.* Принципы алгебраической геометрии. — Москва: Мир, 1982. — Т. 1, 2.

[3] *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. — Москва: Мир, 1981.