Осенний семестр, 2014 г.
Задачи по курсу “**Алгебраические кривые** ”
Ю.Г.Прохоров
15 декабря 2014 г.

(1) Рассмотрим подмножество $X \subset \mathbb{A}^3$, заданное параметрически:
$$x_1 = t^3, \quad x_2 = t^4, \quad x_4 = t^5.$$
Докажите, что X – неприводимое аффинное многообразие. Докажите, что $I(X)$ не может быть порожден двумя элементами.

(2) Пусть $X \subset \mathbb{A}^3$ – объединение трех координатных осей. Докажите, что идеал $I(X)$ не может быть порожден двумя элементами.

(3) Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $Z(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(Z(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $Z(J)$ двумя уравнениями?

(4) Пусть $J = (xy, (x - y)z) \subset \Bbbk[x, y, z]$ Опишите $Z(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(Z(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $Z(J)$ двумя уравнениями?

(5) Пусть $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2) \subset \Bbbk[x, y, z]$ Опишите $Z(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(Z(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $Z(J)$ двумя уравнениями?

(6) Пусть $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]$ Опишите $Z(J) \subset \mathbb{A}^2$ и $I(Z(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$.

(7) (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность $Z(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает сюръективную проекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

(8) Пусть многочлен f обращается в нуль в каждой точке гиперповерхности $Z(g) \subset \mathbb{A}^n$. Покажите, что каждый неприводимый сомножитель многочлена g делит f.

(9) Пусть $X \subset \mathbb{A}^2$ – объединение конечного множества точек. Докажите, что идеал $I(X)$ может быть порожден двумя элементами.

(10) Разложите замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{A}^3$, заданное уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ на неприводимые компоненты.

(11) Приведите пример неприводимого многочлена $f \in \mathbb{R}[x, y]$, множество нулей $Z(f)$ которого приводимо.

(12) Разложите замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{A}^3$, заданное уравнениями $y^2+xz = 0$, $z^2+y^3 = 0$ на неприводимые компоненты.

(13) Разложите замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{A}^3$, заданное уравнениями $x^2+yz=0$, $xz+x=0$ на неприводимые компоненты.
(14) Существует ли бесконечное поле, конечно порождённое как $\mathbb{Z}$-алгебра?
(15) Докажите, что любая конечно порожденная алгебра над $\Bbbk$ изоморфна алгебре регулярных функций $\Bbbk[X]$ некоторого аффинного многообразия X.
(16) Докажите, что любое конечно порожденное над $\Bbbk$ поле $\mathbb{K}$ изоморфно полю рациональных функций $\Bbbk(X)$ некоторого аффинного многообразия X.
(17) Пусть I и J – идеалы кольца R. Докажите, что $I \cap J \supset I \cdot J$. В каком случае $I \cap J = I \cdot J$?
(18) Пусть $\Bbbk = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Рассмотрим подкольцо $R \subset \mathbb{C}(t)$ кольца рациональных функций, состоящее из функций, чья область определения содержит единичную окружность $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Является ли R нётеровым?
(19) Является ли нётеровым кольцо $C(0,1)$ непрерывных функций на интервале $(0,1)$?
(20) Является ли нётеровым кольцо: а) $R[[t]]$, где R нётерово б) сходящихся всюду в $\mathbb{C}$ рядов $f \in \mathbb{C}[[z]]$ в) рядов $f \in \mathbb{C}[[z]]$ ненулевого радиуса сходимости г) $\{p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$ при $|z| \leq 1\}$ д*) подалгебра $R \subset \Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ конечной коразмерности (как векторное пространство).
(21) Является ли нётеровым кольцо $D^\infty(-1,1)$ бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(-1,1)$?
(22) Пусть R – кольцо кольцо без делителей нуля целозамкнутое в своем поле частных $\mathbb{K}$. Покажите, что а) произведение двух приведённых многочленов из $\mathbb{K}[x]$ лежит в $R[x]$ тогда и только тогда, когда оба множителя лежат в $R[x]$ б) если элемент b какой-либо $\mathbb{K}$-алгебры Q цел над R, то его минимальный многочлен над $\mathbb{K}$ лежит в $R[x]$ (т. е. является заодно и уравнением целой зависимости).
(23) Всякий ли простой идеал кольца непрерывных функций $C[0,1]$ максимален?
(24) Цело ли кольцо вещественных непрерывных функций $C[0,1]$ на отрезке $[0,1]$ над подкольцом $\{f \mid f(0) = f(1)\}$?
(25) Цело ли кольцо вещественных непрерывных функций на $\mathbb{R}^2$ над подкольцом $\{f \mid f(1,0) = f(0,1)\}$?
(26) Цело ли кольцо вещественных дифференцируемых функций $D[-1,+1]$ на отрезке $[-1,1]$ над подкольцом $\{f \mid f'(0) = 0\}$?

(27) Пусть кольцо R не имеет делителей нуля и целозамкнуто в своём поле частных. Покажите, что кольцо многочленов $R[t]$ удовлетворяет этим же свойствам.

(28) Пусть $S \supset R$ – кольца и S цело над R. Покажите, что любой гомоморфизм $R \to \mathbb{k}$ в алгебраически замкнутое поле $\mathbb{k}$ продолжается до гомоморфизма $B \to \mathbb{k}$.

(29) Покажите, что факториальное кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

(30) Найдите максимальное множество точек кривой $X \subset \mathbb{A}^2$, заданной уравнением $y^2 - x^2 - x^3 = 0$, в которых рациональная функция $f = y/x$ будет регулярной. Ответ обоснуйте.

(31) Найдите максимальное множество точек кривой $X \subset \mathbb{A}^2$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, в которых рациональная функция $f = (1-y)/x$ будет регулярной. Ответ обоснуйте.

(32) Пусть R – нётерово кольцо. Докажите, что в нем любой элемент может быть разложен (возможно, неоднозначно) в конечное произведение неразложимых.

(33) Рассмотрим плоскую кривую X, заданную уравнением $x^2 - y^3 = 0$ в $\mathbb{A}^2$. Опишите локальное кольцо $\mathscr{O}_{P,X}$, где $P = (0,0)$. Докажите, что это кольцо не факториально (т.е. в нем не имеет место однозначность разложения на неприводимые множители).

(34) Рассмотрим плоскую кривую X, заданную уравнением $x^3 + x + y^2 = 0$ в $\mathbb{A}^2$. Опишите локальное кольцо $\mathscr{O}_{P,X}$, где $P = (0,0)$. Докажите, что это кольцо не факториально.

(35) Факториально ли локальное кольцо начала координат квадратичного конуса $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ в $\mathbb{A}^3$?

(36) Рассмотрим квадратичную поверхность $X \subset \mathbb{A}^3$, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Докажите, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{P,X}$, где P – начало координат, не факториально.

(37) Рассмотрим квадратичную гиперповерхность $X \subset \mathbb{A}^4$, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$. Докажите, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{P,X}$, где P – начало координат, не факториально.

(38) Рассмотрим квадратичную гиперповерхность $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$, заданную уравнением $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0$, $n \geq 4$. Докажите, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{P,X}$, где P – начало координат, факториально.

(39) Рассмотрим гиперповерхность $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$, заданную уравнением $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0$, $n \geq 4$. Докажите, что локальное кольцо $\mathscr{O}_{P,X}$, где P – начало координат, целозамкнуто.

(40) Пусть X – неприводимое аффинное многообразие. Покажите, что алгебра $\mathbb{k}[X]$ факториальна тогда и только тогда, когда

любое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 (т.е размерности $\dim X - 1$) в X имеет вид $Z(f)$ для некоторого $f \in \Bbbk[X]$.

(41) Приведите пример неприводимого аффинного многообразия X с нефакториальной алгеброй $\Bbbk[X]$.

(42) Пусть X – неприводимое аффинное многообразие. Покажите, что алгебра $\Bbbk[X]$ факториальна тогда и только тогда, когда любой неразложимый элемент $f \in \Bbbk[X]$ порождает простой идеал.

(43) Докажите, что кольцо $\Bbbk[x, y]/(y^2 - x^3 - x)$ целозамкнуто.

(44) Докажите, что кольцо $\Bbbk[x, y]/(y^2-x^3-x)$ не факториально, но все локальные кольца кривой $y^2 - x^3 - x = 0$ факториальны.

(45) Покажите, что в нётеровом локальном кольце $\mathscr{O}$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ имеет место равенство $\cap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n = 0$.

(46) Докажите, что алгебраически замкнутое поле не имеет нетривиальных дискретных нормирований.

(47) Докажите, что конечное поле не имеет нетривиальных дискретных нормирований.

(48) Опишите все дискретные нормирования поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

(49) Опишите все дискретные нормирования $v : \Bbbk(t)^* \to \mathbb{Z}$ поля рациональных дробей $\Bbbk(t)$, которые тривиальны на $\Bbbk$ (т.е. $v(\Bbbk^*) = 0$).

(50) При каких значениях параметра λ кубическая кривая $x_0^3+x_1^3+x_2^3 + \lambda x_0x_1x_2 = 0$ в $\mathbb{P}^2$ а) является неприводимой, б) является неособой.

(51) При каких значениях параметра λ кубическая кривая $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \lambda(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 0$ в $\mathbb{P}^2$ а) является неприводимой, б) является неособой.

(52) При каких значениях параметра λ поверхность $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \lambda x_0x_1x_2x_3 = 0$ в $\mathbb{P}^3$ является особой?

(53) Найдите все особые точки поверхности $x_1x_2 + x_0x_2 + x_0x_1 - x_0x_1x_2x_3 = 0$ в $\mathbb{P}^3$.

(54) При каких условиях многообразие в $\mathbb{P}^n$, заданное $\sum x_i^2 = \sum \lambda_i x_i^2 = 0$ особо?