Осенний семестр, 2013 г.
Задачи по курсу “**Ведение в алгебраическую геометрию** ”
Ю.Г.Прохоров

Все кольца считаются ассоциативными, коммутативными и содержащими единичный элемент 1. Все гомоморфизмы колец переводят единичный элемент в единичный. $\mathfrak{r}(R)$ обозначает радикал (нильрадикал) кольца $R$.

(1) Рассмотрим кривую $X \subset \mathbb{A}^3$, заданную параметрически:
$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$
Покажите, что $I(X)$ – простой идеал в $k[x, y, z]$. Опишите его образующие.

(2) Рассмотрим кривую $X \subset \mathbb{A}^3$, заданную параметрически:
$$x = t^3, \qquad y = t^4, \qquad z = t^5.$$
Покажите, что $I(X)$ – простой идеал в $k[x, y, z]$, который не может быть порожден двумя элементами.

(3) Рассмотрим кривую $X \subset \mathbb{A}^3$, заданную параметрически:
$$x = t^3, \qquad y = t^{2m-3}, \qquad z = t^m,$$
где $m \equiv 1 \mod 3$. Найдите систему порождающих идеала $I(X)$, состоящую из минимального числа элементов.

(4) Докажите, что алгебраическое множество, заданное двумя уравнениями $x^2 - yz = 0$, $xz - x = 0$ приводимо. Найдите его неприводимые компоненты.

(5) Найдите все особые точки многообразия, заданного в $\mathbb{A}^3$ уравнением
$$y^4 - xz^3 - 4xyz^2 - 2xy^2z + x^2z^2 = 0.$$

(6) Отождествим пространство $\mathbb{A}^6$ с пространством симметрических матриц размера $3\times3$ и рассмотрим подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^6$, заданное уравнением $\det(x) = 0$. Опишите особые точки $X$.

(7) Рассмотрим морфизм $f : \mathbb{A}^1 \to X \subset \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$, где $X \subset \mathbb{A}^2$ задано уравнением $x^3 - y^2 = 0$. Докажите, что $f$ является гомеоморфизмом, но не является изоморфизмом (обратное отображение нерегулярно).

(8) Изоморфно ли многообразие $xy - 1 = 0$ в $\mathbb{A}^2$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1$?

(9) Докажите, что открытое подмножество $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{A}^2$ не изоморфно никакому аффинному многообразию.

(10) Докажите, что любой автоморфизм (т.е. изоморфизм с собой) аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ имеет вид $x \mapsto ax + b$, $a$, $b \in \Bbbk$, $a \neq 0$. Покажите, что аналогичное утверждение не верно для аффинной плоскости: отображение $(x, y) \mapsto (x, y+f(x))$ является автоморфизмом $\mathbb{A}^2$ для любого многочлена $f$.

(11) Рассмотрим морфизм
$$f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2, \qquad (x, y) \mapsto (x, xy).$$
Опишите его образ. Будет ли это а) замкнутое, б) открытое подмножество в $\mathbb{A}^2$.

(12) Рассмотрим морфизм
$$f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (x, xy, xyz).$$
Опишите его образ. Будет ли это а) замкнутое, б) открытое подмножество в $\mathbb{A}^3$.

(13) (*Отображение Фробениуса.*) Пусть основное поле $\Bbbk$ имеет характеристику $p > 0$ и пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ – многообразие, заданное уравнениями с коэффициентам из конечного подполя $\Bbbk_0 \subset \Bbbk$, $\Bbbk_0 \simeq \mathbb{F}_q$. Рассмотрим отображение
$$\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^q, \ldots, x_n^q).$$
Докажите, что $\varphi$ биективно отображает $X$ в себя и неподвижные точки $\varphi$ – это в точности точки, координаты которых принадлежат $\mathbb{F}_q$. На примерах покажите, что обратное отображение нерегулярно.

(14) Опишите схему $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (как топологическое пространство).

(15) Опишите (как топологическое пространство) схему $\mathrm{Spec}(\Bbbk[G])$, где $\Bbbk$ – поле, а $\Bbbk[G]$ – групповая алгебра конечной циклической группы.

(16) Опишите (как топологическое пространство) схему $\mathrm{Spec}(\Bbbk[G])$, где $\Bbbk$ – поле, а $\Bbbk[G]$ – групповая алгебра бесконечной циклической группы.

(17) Когда пространство $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ гомеоморфно $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$?

(18) Пусть $A$ – конечная абелева группа и пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле. Опишите схему $\mathrm{Spec}(\Bbbk[A])$, где $\Bbbk[A]$ – групповая алгебра.

(19) Докажите, что неприводимая аффинная схема содержит единственную общую точку. Верно ли это для произвольных нетеровых топологических пространств?

(20) Пусть $f : R \to S$ – гомоморфизм колец. Верно ли, что $f^* : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ переводит замкнутые точки в замкнутые?

(21) Пусть $R$ – кольцо и пусть $R[[x]]$ – кольцо формальных степенных рядов над $R$. Докажите, что отображение

$$f^* : \mathrm{Spec}(R[[x]]) \to \mathrm{Spec}(R)$$

сюръективно.

(22) Пусть $f : R \to S$ – сюръективный гомоморфизм колец. Докажите, что отображение $f^* : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ является гомеоморфизмом на свой образ. Опишите этот образ.

(23) Пусть $f : R \to S$ – инъективный гомоморфизм колец. Докажите, что образ отображения $f^* : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ плотен в $\mathrm{Spec}(R)$. Верно ли обратное утверждение?

(24) Пусть кольцо $R$ является конечно порожденной алгеброй над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Докажите, что множество замкнутых точек плотно в $\mathrm{Spec}(R)$. Остается ли верным это утверждение для алгебраически незамкнутых полей?

(25) Пусть $S \subset R$ – мультипликативное подмножество. Когда образ отображения $\mathrm{Spec}(S^{-1}R) \to \mathrm{Spec}(R)$ плотен?

(26) Пусть $R$ – кольцо. Докажите, что в $\mathrm{Spec}(R[x])$ множество замкнутых точек плотно.

(27) Пусть $R$ – кольцо такое, что любой идеал, не содержащийся в $\mathfrak{r}(R)$, содержит идемпотент (элемент $a$ такой, что $a^2 = a$). Докажите, что в $\mathrm{Spec}(R)$ множество замкнутых точек плотно.

(28) Пусть $R$ – кольцо, у которого любой элемент удовлетворяет условию $a^n = a$, $n = n(a)$. Докажите, что в $\mathrm{Spec}(R)$ все точки замкнуты.

(29) Докажите, что любое замкнутое неприводимое подмножество $Y \subset \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ размерности $n-1$ имеет вид $V(f)$, где $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ – неприводимый многочлен.

(30) Кольцо $R$ называется *булевым*, если $a^2 = a$ $\forall a \in R$. Докажите, что все точки спектра булева кольца $R$ замкнуты и сам спектр является хаусдорфовым пространством.

(31) Докажите, что пространство $\mathrm{Spec}(R)$ несвязно тогда и только тогда, когда $R$ представляется в виде нетривиального прямого произведения $R = R_1 \times R_2$.

(32) Пусть $R$ – кольцо без делителей нуля с единственным ненулевым простым идеалом $\mathfrak{p}$. Пусть $K$ – поле частных $R$ и пусть $R' := (R/\mathfrak{p}) \oplus K$. Опишите схемы $\mathrm{Spec}(R)$ и $\mathrm{Spec}(R')$. Докажите, что естественный гомоморфизм $f : R \to R'$ индуцирует биективное отображение $f^* : \mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$, которое не является гомеоморфизмом. Приведите примеры таких колец $R$.

(33) Опишите образ $f^* : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}[i]$ – кольцо целых гауссовых чисел.
(34) Пусть $R := C([a,b])$ – кольцо непрерывных функций на (замкнутом) отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Опишите максимальные идеалы в $R$. Докажите, что подпространство $\mathrm{Spec}^{\mathrm{m}}(R) \subset \mathrm{Spec}(R)$, образованное максимальными идеалами, гомеоморфно $[a,b]$.
(35) Приведите пример нeнётерова кольца $R$, у которого топологическое пространство схемы $\mathrm{Spec}(R)$ нётерово.
(36) Какова размерность схемы $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$? Ответ обоснуйте.
(37) Опишите схему $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}} \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ (как топологическое пространство).
(38) Опишите схему $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ (как топологическое пространство).
(39) Может ли структурный пучок $\mathscr{O}_X$ на аффинной схеме $X$ быть постоянным пучком? В каких случаях?
(40) Опишите структурный пучок $\mathscr{O}_X$ на схеме $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.
(41) Опишите структурный пучок $\mathscr{O}_X$ на схеме $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
(42) Опишите структурный пучок $\mathscr{O}_X$ на схеме $X = \mathrm{Spec}(\Bbbk[x])$, где $\Bbbk$ – произвольное поле.
(43) Опишите структурный пучок $\mathscr{O}_X$ на схеме
$$X = \mathrm{Spec}(\Bbbk[x]/(x^n - 1)),$$
где $\Bbbk$ – произвольное поле.
(44) Рассмотрим окольцованное пространство $([a,b], C^\infty)$, состоящее их отрезка $[a,b]$ вещественной прямой (с обычной топологией) и пучка колец $C^\infty$ дифференцируемых функций на нем. Является ли оно аффинной схемой? *Указание.* Рассмотрите $I_c = \{f \mid f^{(n)}(c) = 0, \quad \forall n\}$

## Список литературы


[1] *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. — Москва: Факториал Пресс, 2003. — Т. 4 из *XX век – Мат. и мех.*
[2] *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия. — Москва: Мир, 1979. — Т. 1.
[3] *Мамфорд Д.* Красная книга о многообразиях и схемах. — Москва: МЦМНО, 2007. — С. 296.
[4] *Манин Ю. И.* Лекции по алгебраической геометрии 1966 – 1968. — Москва: Изд-во МГУ, 1968.
[5] *Харрис Д.* Алгебраическая геометрия. Начальный курс. — Москва: МЦНМО, 2006.
[6] *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. — Москва: Мир, 1981.
[7] *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. — II изд. — Москва: Наука, 1988. — Т. I, II.