2017/2018 учебный год, весна
курс “Промежуточный якобиан алгебраических многообразий”.
Задачи

I. Комплексные торы.

1. Приведите пример простого комплексного тора, т. е. тора не имеющего нетривиальных комплексных подторов.

2. Докажите, что любой комплексный тор имеет не более чем счетное число комплексных подторов.

3. Пусть A – простое абелево многообразие, т. е. A не имеет нетривиальных абелевых подмногообразий. Докажите, что любой эффективный дивизор является обильным.

4. Пусть X – комплексный тор и пусть $\mathscr{M}(X)$ – его поле мероморфных функций. Покажите, что имеется голоморфное отображение $f : X \to A$ со связными слоями на абелево многообразие индуцирующее изоморфизм $f^* : \mathscr{M}(A) \to \mathscr{M}(X)$. В частности, если степень трансцендентности поля $\mathscr{M}(X)$ максимальна, то X – абелево многообразие.

5. Приведите примеры комплексных торов размерности 2, у которых степень трансцендентности поля мероморфных функций $\mathscr{M}(X)$ равна 0, 1 и 2.

II. Якобианы кривых и многообразия Прима.

6. Пусть C – гладкая проективная кривая рода 3. Зафиксируем точку $x_0 \in C$ и рассмотрим отображение

$$\Psi : S^3C \longrightarrow J(C), \quad x_1 + x_2 + x_3 \longmapsto [x_1 + x_2 + x_3 - 3x_0].$$

Докажите, что Ψ – раздутие $J(C)$ вдоль неособой кривой. Поясните, что это за кривая.

7. Пусть C - гиперэллиптическая кривая рода 3. Исследуйте особенности тэта-дивизора $\Theta \subset J(C)$.

8. Пусть C - гиперэллиптическая кривая рода 2, заданная уравнением $y^2 = x^6 - 1$. Вычислите матрицу периодов.

9. Опишите тэта-характеристики и двойные неразветвленные накрытия гиперэллиптической кривой. Какие тэта-характеристики являются четными?

10. Опишите тэта-характеристики негиперэллиптической кривой рода 3.

11. В каком случае кривая C рода 4 имеет тэта-характеристику ξ с $h^0(C, \mathscr{O}_C(\xi)) > 1$?

12. Пусть C – гиперэллиптическая кривая и $\tilde{C} \to C$ – неразветвленное двулистное накрытие. В каком случае многообразие Прима $\mathrm{Pr}(\tilde{C}/C)$ является якобианом кривой?

13. Пусть C – негиперэллиптическая кривая рода 3 и $\tilde{C} \to C$ – неразветвленное двулистное накрытие. Покажите, что многообразие Прима $\mathrm{Pr}(\tilde{C}/C)$ является якобианом кривой.

III. Промежуточные якобианы и расслоения на коники.

14. Вычислите промежуточный якобиан неособого пересечения двух квадрик $X = X_{2\cdot 2} \subset \mathbb{P}^5$.

15. Рассмотрим кубическую гиперповерхность $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$, заданную уравнением $x_1^3 = f(x_2, \dots, x_5)$. Используя действие группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ умножениями на $\exp(2\pi i/3)$ на первую координату, докажите, что промежуточный якобиан $J(X)$ не является якобианом кривой.

16. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}^3$ – гладкая кривая степени 7 и рода 5. Покажите, что Γ является проекцией канонической кривой из точки. Покажите, что линейная система кубик, проходящих через Γ задает стандартное расслоение на коники $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ на раздутии $X \to \mathbb{P}^3$ вдоль Γ. Вычислите степень дискриминантной кривой.

17. Пусть $Y = Y_{2\cdot 3} \subset \mathbb{P}^5$ – пересечение квадрики и кубики. Предположим, что Y содержит плоскость $\Pi = \mathbb{P}^2$ и многообразие Y достаточно общее с таким свойством. Покажите, что проекция из Π индуцирует стандартное расслоение на коники над $\mathbb{P}^2$. Вычислите степень дискриминантной кривой.

18. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^4$ – гиперповерхность степени 4, особая вдоль прямой l. Предположим, что Y является общей с данным свойством. Покажите, что проекция из l индуцирует стандартное расслоение на коники над $\mathbb{P}^2$. Вычислите степень дискриминантной кривой.

19. Пусть $\varphi : Y \to \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие, разветвленное над поверхностью $B \subset \mathbb{P}^3$ степени 4. Предположим, что B особо и его особое множество состоит из единственной обыкновенной двойной точки Q. Покажите, что проекция из Q индуцирует стандартное расслоение на коники над $\mathbb{P}^2$. Вычислите степень дискриминантной кривой.

20. Пусть $X \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$ – общее пересечение двух дивизоров бистепени $(1,1)$ и $(2,1)$. Покажите, что проекция второй множитель индуцирует стандартное расслоение на коники. Вычислите степень дискриминантной кривой.