2018/2019 учебный год, осень

курс “Программа минимальных моделей ”

Задачи

(для оценки “5” нужно решить 5 задач с разных страниц).

(1) Постройте явно миниальное разрешение дювалевской особенности $x^2 + y^3 + z^5 = 0$. Докажите, что она каноническая.

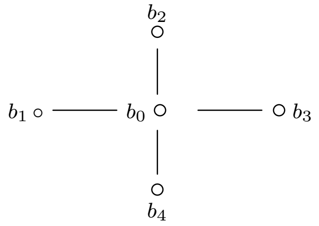
(2) Рассмотрим гиперповерхность X в $\mathbb{C}^4$, заданную уравнением $xy = z^2 t^2$. Покажите, что раздутие начала координат приводит к многообразию $\tilde{X}$, особенности которого “аналогичны” особенностям исходного (т.е. в некоторой аффинной карте $\tilde{X}$ изоморфно исходному многообразию).

(3) Рассмотрим вложение Сегре $\varphi \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^{ab-1}$ при помощи линейной системы типа (a, b). Пусть $X \subset \mathbb{P}^{ab+a+b}$ – конус над $\varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$. Докажите, что многообразие X является $\mathbb{Q}$-горенштейновым тогда и только тогда, когда $a = b$.

(4) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – конус над неособой кубической кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ и пусть $D = L_1 - L_2$ – разность двух образующих конуса таких, что ограничение $D|_C$ – элемент бесконечного порядка в $\mathrm{Pic}(C)$. Докажите, что D не является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье. Это показывает, что двумерные особенности необязательно $\mathbb{Q}$-факториальны.

(5) Приведите пример двумерной нормальной особенности, не являющейся $\mathbb{Q}$-горенштейновой. *Указание*: Рассмотрите конус над гладкой кривой $C \subset \mathbb{P}^n$ рода $g > 1$, гиперплоское сечение которой не пропорционально K_C.

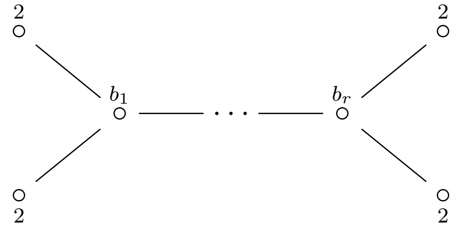
(6) Вычислите дискрепантности двумерной особенности, имеющей следующий двойственный граф минимального разрешения:



(все компоненты исключительного дивизора – неособые рациональные кривые, пересекающиеся трансверсально). Когда эта особенность логканонична?

(7) Пусть (X, P) двумерная нормальная особенность такая, что ее исключительный дивизор имеет простые нормальные пересечения и все его компоненты – неособые рациональные кривые, образующие следующий двойственный граф, где $b_i \geq 2$ для всех i и $b_j \geq 3$ по крайней мере для одного j (случай $r = 1$ не исключается):

(1)



Докажите, что особенность (X, P) является логканонической. Вычислите дискрепантности.

(8) Докажите, что двумерная рациональная особенность факториальна тогда и только тогда, когда она является дювалевской особенностью типа E_8. *Указание*: для этой особенности $\det \|E_i \cdot E_j\| = 1$.

(9) Пусть (X, P) – нетораческая логтерминальная особенность. Докажите, что либо дискрепантности исключительных дивизоров минимального разрешения $\leq -1/2$, либо все они равны 0.

(10) Докажите, что исключительный дивизор минимального разрешения гиперповерхностной особенности

$$x^2 + y^3 + z^7 = 0$$

– рациональная кривая арифметического рода 1 с простой каспидальной точкой.

(11) Пусть $G \subset GL_2(\mathbb{C})$ – конечная подгруппа, не содержащая отражений. Докажите, что группа классов дивизоров Вейля фактормногообразия $\mathbb{C}^2/G$ естественно изоморфна $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

(12) Докажите, что пара $(\mathbb{C}^3, \{x^2 - y^2 z = 0\})$ логканонична, а пара $(\mathbb{C}^3, \{(x^2 - y^2 z)(y + z) = 0\})$ – нет.

(13) Пусть $S \subset \mathbb{P}^n$ – проективно нормальная абелева поверхность и пусть $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$ – конус над S. В этом случае X – нормальное многообразие, ср. [3, гл. 2, §5, упр. 5.14]. Докажите, что K_X – дивизор Картье, но X не является многообразием Коэна-Маколея. *Указание*: Покажите, что через вершину конуса нельзя провести гиперплоское сечение, являющееся нормальной поверхностью.

(14) `Максимальное разрешение.` Разрешение особенностей $f\colon \tilde{X} \to X$ с исключительным дивизором $\sum E_i$ называется *максимальным*, если $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum \alpha_i E_i$, где $\alpha_i < 0$ и для любого проективного бирационального морфизма $g\colon Y \to \tilde{X}$ мы можем записать $K_Y = (f \circ g)^* K_X + \sum \beta_j F_j$, где $\sum F_j$ – $f \circ g$-исключительный дивизор и $\beta_j \geq 0$ для некоторого j. Докажите, что двумерная логтерминальная неканоническая особенность имеет единственное максимальное разрешение.

(15) Пусть $f\colon X = \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to C$ – геометрически линейчатая поверхность с инвариантом n. Пусть Σ и F – ее минимальное сечение и слой, соответственно. (Таким образом, $\Sigma^2 = -n$). Пусть $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ – экстремальный луч, отличный от $\mathbb{R}_+[F]$. Докажите, что

(a) если $n \leq 0$, то $R^2 = 0$ и $R = \mathbb{R}_+[\Sigma + \frac{n}{2}F]$;

(b) если $n > 0$, то $R^2 < 0$ и $R = \mathbb{R}_+[\Sigma]$.

В частности, поверхность X содержит не более одной кривой с отрицательным индексом самопересечения. Более того, при $n > 0$ луч R стягиваем.

(16) Предположим, что связная разрешимая линейная алгебраическая группа действует на X с конечным числом орбит. Показать, что $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ – полиэдральный конус, натянутый на классы замыканий одномерных орбит. *Указание*: Используйте теорему Бореля о неподвижной точке

(17) Докажите, что на поверхности дель Пеццо степени $2 \leq d \leq 7$ любой эффективный дивизор является *целочисленной* линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами классов прямых. Когда это нарушается на поверхности дель Пеццо степени 1?

(18) Пусть X – поверхность с дювалевскими особенностями и пусть $f\colon X \to Y$ – бирациональное стягивание K-отрицательного экстремального луча R и пусть C – исключительный дивизор. Пусть $\mu\colon \tilde{X} \to X$ – минимальное разрешение. Докажите, что точка $f(C) \in Y$ неособа. Какие особенности может иметь поверхность X на кривой C? Опишите двойственный граф минимального разрешения.

(19) Пусть X – поверхность с дювалевскими особенностями и пусть $f\colon X \to Y$ – стягивание K-отрицательного экстремального луча, где Y – кривая. Какие особенности может иметь поверхность X на вырожденном слое $C \subset X$? Опишите двойственный граф минимального разрешения.

(20) Пусть $(X, B = \sum b_i B_i)$ – проективная логканоническая пара. Предположим, что поверхность X неособа и $b_i \leq 1/3$ для всех i. Докажите, что при применении $K + B$-программы минимальных моделей мы получим поверхности с лишь дювалевскими особенностями.

(21) Пусть (X, B) – логповерхность дель Пеццо, т.е. логканоническая пара такая, что дивизор $-(K_X + B)$ обилен. Докажите, что поверхность X или рациональна или бирационально эквивалентна линейчатой поверхности над эллиптической кривой. Когда имеет место второй случай?

(22) Пусть X – неособая проективная поверхность такая, что $\rho(X) = 2$ и $H^2(X, \mathscr{O}_X) = 0$. Докажите, что экстремальные лучи порождаются классами целых дивизоров (не утверждается, что они эффективны).

(23) Пусть X – поверхность, полученная из $\mathbb{P}^2$ раздутием трех различных точек. Опишите конус Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

(24) Пусть $\pi : X \to B$ – линейчатая поверхность над кривой рода g и пусть R – экстремальный (необязательно K–отрицательный) луч на X такой, что $R^2 < 0$. Докажите, что R порождается классом некоторого сечения. *Указание*: См. [3, Гл. 5, предл. 2.21].

(25) Пусть $C \subset X$ – неприводимая кривая. Если $C^2 \leq 0$, то класс $[C]$ лежит на границе $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Если $C^2 < 0$, то $[C]$ порождает экстремальный луч.

(26) Пусть $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ – экстремальный луч. Следующие условия эквивалентны:
  (a) $R^2 < 0$,
  (b) $R \cdot C < 0$ для некоторой кривой C,
  (c) $R^2 < 0$ и R порожден классом (неприводимой) кривой.

(27) Пусть $X \ni o$ – особенность типа $cE7$ заданная

$$(x^2 + y^3 + yg_3(z,t) + h_5(z,t) = 0) \subset \mathbb{C}4,$$

где g_3 и h_5 не имеют общих множителей. Покажите, что X имеет изолированную особую точку в начале координат, а ее взвешенное раздутие $Y \to X$ с весами $(3, 2, 1, 1)$ имеет только терминальные особенности. Выведите отсюда, что само X имеет терминальную особенность.

(28) Разберите подробно пример поверхности с бесконечным числом (-1)-кривых. Как этот пример согласуется с теоремой о конусе?

(29) Докажите, что на нерациональной поверхности число (-1)-кривых конечно.

(30) Пусть $S \subset \mathbb{P}^4$ – конус над рациональной скрученной кубической кривой и пусть $f : X \to \mathbb{P}^4$ – раздутие S. Покажите, что многообразие X неособо и f – стягивание экстремального луча. Какие слои имеет морфизм f?

(31) Пусть X – неособое трехмерное многообрзие и пусть $C \subset X$ –кривая, являющаяся локально полным пересечением. При каких условиях раздутие C имеет терминальные особенности?

(32) Пусть X – проективное многообразие с каноническими особенностями, для которого K_X численно эффективен. Пусть $f : X \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение на проективное многообразие с каноническими особенностями. Докажите, что исключительное множество $\mathrm{Exc}(f)$ имеет коразмерность ≥ 2 в X.

Список литературы

[1] Клеменс Х., Коллар Я., Мори С. Многомерная комплексная геометрия. — Москва : Мир, 1993.

[2] Прохоров Ю. Г. Особенности алгебраических многообразий. — Москва : МЦНМО, 2009. — С. 128.

[3] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — Москва : Мир, 1981.