Программа минимальных моделей
2018/2019 учебный год, весна
Задачи*

(1) Пусть $(Z \ni o)$ – трехмерная терминальная гиперповерхностная особенность $x_1x_2+x_3^2+x_4^{2n}=0$. Докажите, что существует флопповое стягивание $(X \supset C) \to (Z \ni o)$, где многообразие X неособо. Сколько компонент имеет центральная кривая C?

(2) Пусть $(Z \ni o)$ – трехмерная терминальная гиперповерхностная особенность $x_1x_2 + x_3^2 + x_4^{2n+1} = 0$. Докажите, что не существует флопповых стягиваний $(X \supset C) \to (Z \ni o)$, где многообразие X неособо.

(3) Пусть $(X \supset C) \to (Z \ni o)$ – трехмерное терминальное флипповое стягивание. Предположим, что $2K_X$ – дивизор Картье. Докажите, что кривая C неприводима.

(4) Пусть $(X \supset C) \to (Z \ni o)$ – трехмерное терминальное флипповое стягивание с неприводимой центральной кривой C. Предположим, что X имеет на C две особенности индексов m_1 и m_2. Докажите, что $m_1 \neq m_2$.

(5) Пусть $(X \supset C) \to (Z \ni o)$ – трехмерное терминальное флипповое стягивание. Докажите, что пара (Z, B) терминальна для некоторой границы B, но особенность $(Z \ni o)$ не может быть терминальной.

(6) Пусть $(X \supset C) \dashrightarrow (X' \supset C')$ – трехмерный терминальный флип. Докажите, что число компонент флипповой кривой C больше или равно числу компонент C'.

(7) Пусть $(Z \ni o)$ – изолированная трехмерная нормальная особенность, не являющаяся $\mathbb{Q}$-горенштейновой, и пусть B – граница на Z такая, что пара (Z, B) терминальна. Докажите, что существует терминальное флипповое стягивание $(X \supset C) \to (Z \ni o)$ (можно пользоваться логПММ в полной общности).

(8) Вычислите сложность Шокурова трехмерной терминальной факторособенности типа $\frac{1}{m}(1, -1, a)$.

(9) Рассмотрим терминальную особенность

$$\{x_1x_2 + \phi(x_3^m, x_4) = 0\}/\boldsymbol{\mu}_m(1, -1, a, 0).$$

Сколько имеется исключительных дивизоров с дискрепантностью $1/m$?

(10) Пусть $X \subset \mathbb{P}^6$ – конус над многообразием Сегре $Y = Y_3 \subset \mathbb{P}^5$. Докажите, что вершина конуса имеет два малых разрешения и они связаны флипом.

(11) Пусть V – неособое четырехмерное многообразие, пусть $\subset V$ – неособая кривая и пусть $S \subset V$ – неособая поверхность. Предположим, что S и C пересекаются трансверсально в одной точке. Пусть $\hat{V} \to V$ – раздутие C и пусть $\tilde{V} \to \hat{V}$ – раздутие собственного прообраза поверхности S. Докажите, что на $\tilde{V}$ имеется флипповое стягивание и постройте соответствующий флип.

---

*Для положительной оценки нужно решить пять задач