Проблемы рациональности

Осенний семестр, 2016 г.

Список задач

(1) Докажите, что (геометрически) неприводимая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ над полем $\Bbbk$ является $\Bbbk$-рациональной тогда и только тогда, когда она имеет *гладкую* $\Bbbk$-точку.

(2) Докажите, что гладкая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ над полем $\Bbbk$ является $\Bbbk$-рациональной тогда и только тогда, когда $Q(\mathbb{K}) \neq 0$ для некоторого конечного расширения $\mathbb{K}/\Bbbk$ нечетной степени.

(3) Докажите, что кубическая поверхность вида $x_0^3+x_1^3-x_0x_1^2+3(x_2^3+x_3^3-x_2x_3^2)=0$ не является унирациональной над $\mathbb{Q}$.

(4) Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – неособое пересечение двух квадрик над алгебраически замкнутым полем. Докажите, что X содержит прямую.

(5) Дайте элементарное доказательство того, что поверхность $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ рациональна (проекция из точки приводит к кубической поверхности).

(6) Пусть $\mathbb{K}/\Bbbk$ – расширение Галуа. Докажите, что $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\Bbbk), GL_n(\mathbb{K}))=0$.

(7) Пусть $\mathbb{K}/\Bbbk$ – расширение Галуа. Докажите, что $H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\Bbbk), \mathbb{K})=0$.

(8) Опишите все формы пары точек.

(9) Докажите, что поле рациональных функций $\Bbbk(X)$ на многообразии Севери-Брауэра X является полем разложения соответствующей алгебры A.

(10) Докажите, что на кубической поверхности[1] любая кривая линейно эквивалентна линейной комбинации прямых с *положительными* коэффициентами.

(11) Докажите, что если кубической поверхности над полем $\Bbbk$ имеется $\Bbbk'$-точка для некоторого квадратичного расширения $\Bbbk'/\Bbbk$, то на ней имеется и $\Bbbk'$-точка.

(12) Докажите, что на вещественная кубическая поверхность унирациональна со степенью унирациональности 2.

(13) Докажите, что на нерациональной вещественной кубической поверхности имеется ровно три прямые, определенные над $\mathbb{R}$.

(14) Постройте примеры вещественных кубических поверхностей, содержащих ровно 7, 15 и 27 прямых. *Указание.* Используйте конструкцию раздутия плоскости в шести точках

[1] Все кубические поверхности считаются неособыми

(15) Докажите, что для нерациональной вещественной кубической поверхности X выполнено $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) = 3$.

(16) Докажите, что вещественная кубическая поверхность $\mathbb{R}$-рациональна тогда и только тогда, когда $X(\mathbb{R})$ связно.

(17) Докажите, что группа Пикара кубической поверхности $a_0x_0^3+a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3 = 0$ над полем $\Bbbk$ имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ элемент $x_{\sigma(0)}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}^{-1}x_{\sigma(3)}^{-1}$ не является кубом.

(18) Докажите, что на кубической поверхности X над полем $\Bbbk$ существует ровно одна прямая, определенная над $\Bbbk$, то $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) = 2$.

(19) Опишите прямые на кубике $X \subset \mathbb{P}^3$, заданной уравнением $x_0^3 = f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

(20) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – кубическая поверхность над полем $\Bbbk$. Предположим, что $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) = 1$ и $\operatorname{Gal}(\bar{\Bbbk}/\Bbbk) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Докажите, что $H^1(\operatorname{Gal}(\bar{\Bbbk}/\Bbbk), \operatorname{Pic}(\bar{X}))$ – произведение двух циклических групп порядка 3.

(21) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – нерациональная кубическая поверхность над $\mathbb{R}$. Вычислите $H^1(\operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \operatorname{Pic}(\bar{X}))$.

(22) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – кубическая поверхность над полем $\Bbbk$ с $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) = 1$. Предположим, что образ $\operatorname{Gal}(\bar{\Bbbk}/\Bbbk)$ в автоморфизмах решетки $\operatorname{Pic}(\bar{X})$ – циклическая группа. Какие значения может принимать ее порядок?

(23) Опишите дивизор ветвления инволюции Гейзера над полем характеристики 2. Покажите, что соответствующее двулистное накрытие является сепарабельным морфизмом.