Осенний семестр, 2013 г.
Задачи по курсу "**Рациональные поверхности** "
Ю.Г.Прохоров
27 декабря 2013 г.

(1) Докажите, что поверхности $\mathbb{F}_n$ и $\mathbb{F}_m$ (над $\mathbb{C}$) гомеоморфны тогда и только тогда, когда $n \equiv m \mod 2$.
(2) Задайте поверхность дель Пеццо X степени 6 уравнением в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и найдите все прямые на X.
(3) Докажите, что поверхность дель Пеццо степени 5 является дивизором бистепени $(1, 2)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.
(4) Пусть X – гладкий дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо. Какова ее степень?
(5) Докажите, что на поверхности дель Пеццо степени $2 \le d \le 7$ любой эффективный дивизор является *целочисленной* линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами классов прямых. Когда это нарушается на поверхности дель Пеццо степени 1?
(6) Пусть $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ – различные квадрики. Докажите, что поверхность $Q_1 \cap Q_2$ неособа (и является поверхностью дель Пеццо степени 4) тогда и только тогда, когда пучок $\langle Q_1,\ Q_2 \rangle$ содержит ровно 5 вырожденных квадрик.
(7) Докажите, что поверхности дель Пеццо описываются неприводимым семейством. Найдите размерность этого семейства.
(8) Покажите, что любая поверхность дель Пеццо $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ степени 4 (неоднозначно) представляется в виде двулистного накрытия $\pi : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Каков дивизор ветвления этого накрытия? Как интерпретируются прямые на X в таком представлении?
(9) Найдите число прямых на поверхности дель Пеццо степени 1 (можно использовать свойства системы корней E_8).
(10) Найдите число различных пучков коник на поверхности дель Пеццо степени $d = 1,\ 2,\ 3$.
(11) Найдите число различных пучков коник на поверхности дель Пеццо степени $d \ge 4$.
(12) ($\Bbbk = \mathbb{C}$) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 1. Предположим, что антиканонический пучок не содержит каспидальных кривых. Вычислите количество особых элементов $D \in |-K_X|$.

(13) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени ≤ 2 и пусть L, $L' \subset X$ – прямые. Какие значения может принимать индекс пересечения $L \cdot L'$? *Указание.* Воспользуйтесь **??**(ii) и **??**(ii).

(14) Докажите, что поверхность дель Пеццо степени 7 имеет $\mathbb{k}$-точку для любого поля $\mathbb{k}$.

(15) Выведите критерий Клеймана из критерия Накаи-Мойшезона в случае поверхностей.

(16) Пусть $\pi : X \to B$ – G-минимальное расслоение на коники. Докажите, что инвариантный конус Мори порождается двумя лучами $R_1 = \mathbb{R}_+[F]$, $R_2 = \mathbb{R}_+[C]$, где F – слой π, а C – эффективный дивизор такой, что $C^2 \leq 0$.

(17) Могут ли все слои расслоения на коники ($\operatorname{char} \mathbb{k} = 2$) быть особыми?

(18) Пусть E – эллиптическая кривая и пусть $\mathscr{E}$ – векторное расслоение ранга 2 на E, являющееся нетривиальным расширением

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0.$$

(см. [**Хартсхорн**, гл. V, §2]). Рассмотрим линейчатую поверхность $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$. Пусть F – ее слой, а C – сечение, соответствующее точной последовательности выше. Докажите, что конус Мори порождается двумя лучами $R_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}[F]$ и $R_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$, но для луча R_2 не существует стягивания.

(19) Пусть X – поверхность такая, что $-K_X \cdot C > 0$ для любой кривой C. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо. *Указание.* Нетривиальный случай, когда $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$ – линейчатая поверхность над эллиптической кривой, соответствующая неразложимому векторному расслоению $\mathscr{E}$ с $c_1(\mathscr{E}) = 1$. В этом случае нужно доказать, что $H^0(S^2\mathscr{E}(-\mathrm{pt})) \neq 0$.

(20) Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – поверхность дель Пеццо степени 4. Как описываются пучки коник на X в терминах квадратичных уравнений, задающих X?

(21) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 1 или 2 и пусть G – группа ее автоморфизмов, содержащая инволюцию Бертини β, если $K_X^2 = 1$, и инволюцию Гейзера γ, если $K_X^2 = 2$. Докажите, что тогда X является G-минимальной.

(22) Пусть $\pi : X \to B \simeq \mathbb{P}^1$ – (необязательно минимальное) расслоение на коники над алгебраически замкнутым полем. Рассмотрим два (необязательно G-инвариантных) сечения $C, C' \subset X$. Докажите, что $C^2 + C'^2 + 8 = 2C \cdot C' + K_X^2 + r$, где r – число компонент вырожденных слоев, которые пересекают как C, так и C'.

(23) Пусть $\pi : X \to B$ – G-минимальное расслоение на коники с $K_X^2 = 4$ над рациональной кривой. Докажите, что выполняется одно из следующих:
 (a) $-K_X$ обилен и X имеет две структуры расслоения на коники,
 (b) $-K_X$ численно эффективен и на $\bar{X}$ имеются два непересекающихся геометрических сечения C_1, C_2 с $C_i^2 = -2$.

(24) Пусть $\pi : X \to B$ – G-минимальное расслоение на коники с $K_X^2 = 2$ над рациональной кривой. Докажите, что выполняется одно из следующих:
 (a) $-K_X$ обилен и X имеет две структуры расслоения на коники,
 (b) $-K_X$ численно эффективен и имеется геометрически неприводимое 2-сечение $C \subset X$ такое, что $C^2 = -2$,
 (c) $-K_X$ численно эффективен и на $\bar{X}$ имеются два пересекающихся геометрических сечения C_1, C_2 таких, что $C_i^2 = -2$ и $C_1 \cdot C_2 = 1$,
 (d) на $\bar{X}$ имеются два непересекающихся геометрических сечения C_1, C_2 таких, что $K_X \cdot C_i = 1$ и $C_i^2 = -3$.

(25) Пусть $\pi : X \to B$ – G-минимальное расслоение на коники с $K_X^2 = 1$ над рациональной кривой. Докажите, что выполняется одно из следующих:
 (a) $-K_X$ обилен и X имеет две структуры расслоения на коники,
 (b) имеется геометрически неприводимое 2-сечение $C \subset X$ такое, что $K_X \cdot C = 1$, $C^2 = -3$.

(26) Является ли G-минимальной кубическая поверхность Ферма $x_0^3 + \cdots + x_3^3 = 0$ (над алгебраически замкнутым полем), где G – полная группа автоморфизмов?

(27) Рассмотрим кубическую поверхность X, заданную уравнениями
$$x_0^3 + \cdots + x_4^3 = x_0 + \cdots + x_4 = 0.$$
Пусть G – ее полная группа автоморфизмов. Является ли X G-минимальной?

(28) Найдите группу автоморфизмов кубической поверхности Ферма над полем характеристики 2. Является ли эта поверхность G-минимальной?

(29) Найдите группу автоморфизмов поверхности дель Пеццо степени 2, заданной уравнением $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^2 = 0$ в $\mathbb{P}(1,1,1,2)$ над полем характеристики 3. Является ли эта поверхность G-минимальной?

(30) Пусть X – рациональная поверхность над $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Предположим, что X относительно минимальна. Докажите, что имеет место одно из следующих.

   (a) Имеется структура расслоения на коники $f : X \to B$. Если морфизм f не является геометрически гладким, то все вырожденные слои определены над $\mathbb{R}$ и $B \simeq \mathbb{P}^1$.

   (b) X – поверхность дель Пеццо степени 1, 2, 8 или 9. В случае $K_X^2 = 9$ имеем $X \simeq \mathbb{P}^2$. В случае $K_X^2 = 8$ X – квадрика в $\mathbb{P}^3$, имеющая $\mathbb{R}$-точку.

(31) Приведите примеры поверхностей дель Пеццо степени 2, 4, 8 над полем $\mathbb{R}$, не имеющих $\mathbb{R}$-точек.

(32) Докажите геометрический аналог леммы Нишимуры: пусть поле алгебраически замкнуто, пусть G – конечная *абелева* группа $\mathbb{k}$ и пусть $f : X \dashrightarrow Y$ – G-эквивариантное рациональное отображение. Предположим, что X неособо, а Y проективно. Если X имеет G-точку, то и Y имеет G-точку.

(33) Пусть T – двумерный алгебраический тор (групповая схема над полем $\mathbb{k}$ такая, что $T \otimes \bar{\mathbb{k}} \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m},\bar{\mathbb{k}}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m},\bar{\mathbb{k}}}$). Докажите, что T является $\mathbb{k}$-рациональным. *Указание.* Рассмотрите компактификацию $V \supset T$ и примените к ней программу минимальных моделей.

(34) Пусть X – компактификация главного однородного пространства U двумерного алгебраического тора T. Докажите, что X бирационально изоморфно поверхности дель Пеццо степени 6, 8 или 9.

(35) Пусть X – кубическая поверхность над полем $\mathbb{k}$ с $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) = 2$ или 3. Докажите, что X имеет $\mathbb{k}$-точку.

(36) Пусть X – кубическая поверхность над полем $\mathbb{k}$ типа c_1 с $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) \geq 4$. Докажите, что X $\mathbb{k}$-рациональна. Верно ли то же самое для $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) = 3$?

(37) Может ли кубическая поверхность над $\mathbb{Q}$ содержать ровно одну рациональную точку? *Указание.* Рассмотрите возможности для касательного гиперплоского сечения T_O в этой точке. Для общей прямой $L \subset \mathbb{P}^3$, проходящей через O и определенной над $\mathbb{Q}$, геометрические точки пересечения $P, Q \in X \cap L = \{O, P, Q\}$ сопряжены над квадратичным расширением $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$. Общая плоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$, проходящая через $L \otimes \mathbb{K}$ высекает на T_P дивизор $2O + P'$, а сопряженная с Π – дивизор $2O + Q'$. Точки P' и Q' также сопряжены.

(38) Докажите, что все рациональные точки на кубике Ферма над полем $\mathbb{F}_4$ лежат на прямых. Для каких полей $\mathbb{F}_{2^n}$ верно то же самое?

(39) Пусть $\pi : X \to B$ – G-минимальное расслоение на коники. Докажите, что на X любой линк Саркисова типа II сохраняет значение K_X^2.

(40) Пусть $\pi : X \to B$ – G-минимальное расслоение на коники. Предположим, что на X имеется линк Саркисова типа IV. Докажите, что $K_X^2 = 1$, 2, 4 или 8. Как устроены отображения π и π' в этих случаях?

(41) Докажите, что любое квадратичное преобразование Кремоны в некоторых координатах может быть приведено к одному из следующих форм:

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \begin{cases} (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1), \\ (x_0x_2 : x_1x_2 : x_0^2), \\ (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 + x_0x_2). \end{cases}$$

(42) Докажите, что любое квадратичное преобразование Кремоны является преобразованием де Жонкьера.

(43) Найдите минимальную модель X, на которой квадратичная инволюция

$$\tau : (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$$

действует бирегулярно.

(44) Разложите квадратичное преобразование

$$(x, y) \longrightarrow (x, y + x^2)$$

в композицию проективных преобразований и стандартных квадратичных инволюций.

(45) Обязательно ли кубическое отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ является преобразованием де Жонкъера?

(46) Докажите, что при общем выборе пучка $\mathcal{P}$ в примере Нагаты группа $\mathbb{Z}^8 \subset \mathrm{Cr}_2(\Bbbk)$ *бирегулярно* действует на поверхности X. Какие условия общности следует наложить? Покажите, что на X существует бесконечно много (-1)-кривых (и, таким образом, отрицательная часть конуса Мори не является полиэдральной).