Проблемы рациональности

Весенний семестр, 2017 г.

Список задач

(1) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – неособая кубическая поверхность, проходящая через точку $P = (1 : 0 : 0 : 0)$, и пусть $\tilde{X} \to X$ – раздутие P. Предположим, что через P не проходит прямых на X. Найдите способ, как по уравнению $f(x_0, \dots, x_3) = 0$ поверхности $X \subset \mathbb{P}^3$ можно задать $\tilde{X}$ уравнением в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$.

(2) Пусть $X = X_2 \subset \mathbb{P}^3$ – квадрика с $\rho(X) = 1$. Рассмотрим неособый дивизор $Y \subset X \times \mathbb{P}^1$ бистепени $(1, 1)$. В каком случае проекции $X \leftarrow Y \to \mathbb{P}^1$ индуцируют линк Саркисова? Опишите этот линк.

(3) Рассмотрим неособое пересечение $Y \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ двух дивизоров бистепени $(1, 1)$. Покажите, что проекции $\mathbb{P}^2 \leftarrow Y \to \mathbb{P}^2$ индуцируют линк Саркисова и опишите этот линк.

(4) Пусть X – минимальная (т.е. с $\rho(X) = 1$) поверхность дель Пеццо степени $d < 8$ над $\mathbb{R}$. Перечислите все возможные линки Саркисова, начинающиеся с X.

(5) Пусть X – минимальная поверхность дель Пеццо степени $d < 3$ над полем $\Bbbk$. Перечислите все возможные линки Саркисова, начинающиеся с X.

(6) Пусть $\pi : X \to B$ – минимальное (т.е. с $\rho(X) = 2$) расслоение на коники с $K_X^2 = 4$. В каком случае X не является поверхностью дель Пеццо? Дайте полный ответ и приведите примеры.

(7) Пусть X – кубическая поверхность с $\rho(X) = 2$, содержащая прямую. Пусть P – точка на этой прямой. Проекция из P индуцирует бирациональную инволюцию на X. Разложите эту инволюцию в композицию линков.

(8) Пусть X – кубическая поверхность с $\rho(X) = 2$, содержащая конику. Пусть P_1, P_2 – точка на этой конике. Проекция из P_1, P_2 индуцирует бирациональную инволюцию на X. Разложите эту инволюцию в композицию линков.

(9) Рассмотрим поверхность дель Пеццо $X \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ степени 2 над полем $\mathbb{F}_3$, заданную уравнением

$$y^2 + (x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^3 x_3 - x_2 x_3^3 = 0.$$

Докажите, что $\operatorname{rk} \operatorname{Pic}(X) = 1$ и опишите $\operatorname{Bir}(X)$.

(10) Рассмотрим поверхность дель Пеццо $X \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ степени 2 над полем $\mathbb{F}_3$, заданную уравнением

$$y^2 + x_1^4 + x_2^3 x_3 - x_2 x_3^3 = 0.$$

Докажите, что $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) = 1$ и опишите $\operatorname{Bir}(X)$.

(11) Рассмотрим кубическую поверхность $X \subset \mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$

$$x_1^3 + x_1^2 x_0 + x_1(x_0^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3) + x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_3^3 = 0$$

Вычислите $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)$.

(12) Рассмотрим кубическую поверхность $X \subset \mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$

$$x_2(x_0^2 + x_0 x_2 + x_2^2) + x_3(x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2) + x_2^2 x_3 = 0$$

Вычислите $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)$.