Тр. МИ
299

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В.А.СТЕКЛОВА

РАЗБОРОВ Александр Александрович

О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ В СВОБОДНОЙ ГРУППЕ

01.01.06 - математическая логика, алгебра
и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук
профессор С.И.Адян

БИБЛИОТЕКА
ордена Ленина
Математического ин-та
Академии наук СССР

Москва - 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

По-видимому, следующие два вопроса впервые были поставлены А.Тарским:

Проблема I. Будет ли элементарная теория свободной неабелевой группы разрешимой?

Проблема 2. Совпадают ли элементарные теории свободных неабелевых групп различных конечных рангов?

Обе эти проблемы встречаются в различных списках открытых задач математической логики и теории групп /см., например, [4], стр. 570, проблема 3; [5], вопр. I.29; [8], вопр. 76/.

Наиболее сильные частичные результаты по второй проблеме были получены Ю.И.Мерзляковым [16], который доказал совпадение позитивных теорий свободных неабелевых групп и Сасердотом [28], доказавшим аналогичное утверждение для $\forall\exists$ -фрагментов элементарной теории.

При исследовании первой проблемы наибольшее внимание привлёк её частный случай о разрешимости позитивного $\exists$ -фрагмента элементарной теории свободных групп и о строении множеств, определимых позитивными $\exists$ -формулами. Эти вопросы эквивалентны вопросам о существовании алгоритма, распознающего разрешимость систем уравнений в свободной группе и об описании множества всех решений /или, как иногда говорят, о б щ е г о р е ш е н и я / таких систем.

До недавнего времени в этом направлении были известны лишь частичные результаты. Линдон [22] и Линдон, Шютценберже [25] исследовали уравнение $x^m y^n z^p = 1$ $(m,n,p \geq 2)$ и доказали, что все его решения содержатся в некоторой циклической подгруппе. Линдон [23,24] рассмотрел уравнения с одной неизвестной и доказал алгоритмическую разрешимость вопроса о существовании решения у такого уравнения. В этих работах Линдон, кроме того, ввёл понятие параметрического слова и показал, что общее решение уравнений с одной неизвестной описывается конечным множеством параметрических слов. Этот результат впоследствии был усилен А.А.Лоренцом [9], доказавшим, что при описании общего решения систем уравнений с одной неизвестной достаточно ограничиться параметрическими словами вида

$$AB^{\mu}C, \tag{0.1}$$

где μ - параметр, принимающий значения из множества целых чисел. А.И.Мальцев [15] изучил уравнение, которое после незначительной модификации можно записать в виде

$$[x,y]=[a,b] \tag{0.2}$$

и описал общее решение этого уравнения. Ю.И.Хмелевский [20] построил алгоритм, распознающий разрешимость и дал описание общего решения для систем, у которых каждое уравнение содержит не более двух неизвестных и имеет один из следующих видов: $\varphi(x_i, a_1, \ldots, a_\omega) = \psi(x_j, a_1, \ldots, a_\omega)$ или $W(x_i, x_j) = A$, где слово W не содержит коэффициентов. Для описания общего решения таких систем в работе [20] была введена специальная функция, получившая впоследствии название функции Нильсена-Хмелевского /функция Нильсена-Хмелевского некоторым естественным образом параметризует решения уравнения (0.2) /. Ю.И.Ожигов [17] привёл алгоритм и получил описание общего решения для произвольных уравнений с двумя неизвестными. Его описание использует параметрические слова Линдона и функцию Нильсена-Хмелевского.

Наиболее существенный прогресс в исследовании систем уравнений в свободной группе был достигнут Г.С.Маканиным в [12,13]. В этих работах был впервые построен алгоритм, распознающий разрешимость произвольных систем уравнений в свободной группе. Для этого Г.С.Маканин усовершенствовал метод обобщённых уравнений, введённый им в более ранних работах [10,11] для решения похожих задач в свободных полугруппах. В настоящее время метод обобщённых уравнений является, по-видимому, единственным методом, позволяющим доказывать нетривиальные утверждения о произвольных системах уравнений в свободной группе. Отметим также, что в работе [13] впервые получены ответы на некоторые частные случаи проблемы 1. А именно, в этой работе была доказана разрешимость позитивной теории свободной неабелевой группы и разрешимость $\exists$-фрагмента элементарной теории. В недавней работе [14] Г.С.Маканин усилил последний результат, доказав разрешимость фрагмента, состоящего из формул, кванторная приставка которых имеет вид $\forall\exists\exists\ldots\exists$.

Развивая метод обобщённых уравнений, автор в работе [18] для произвольной системы уравнений в свободной группе построил некоторое описание общего решения с одним дополнительным ограничением /ограничение на вхождения подслов вида P^J в компоненты решения; J - произвольно, но фиксировано/. Из этого описания в работе [18] сравнительно просто был получен алгоритм, вычисляющий максимальный возможный ранг подгруппы, порождённой компонентами некоторого её решения. Последняя задача, известная как проблема ранга/см. [5], вопр. 6.25/ была ранее решена лишь в одном частном случае /см. [7], §7 гл.1/. Аналогичная проблема ранга для полугрупп была ранее решена Г.С.Маканиным [11].

В заключение этого краткого обзора упомянем два отрицательных результата, касающихся возможности описания общего решения. Аппель 21 построил пример уравнения, для описания общего решения которого недостаточно параметрических слов Линдона. Наконец, автор 19 получил один общий результат, из котрого вытекает, что для любого конечного семейства параметрических функций

/типа параметрических слов Линдона или функции Нильсена-Хмелевского/ найдётся g такое, что общее решение уравнения

$$[x_1, x_2]\cdot[x_3, x_4]\cdot\ldots\cdot[x_{2g-1}, x_{2g}]=1 \quad (0.3)$$

не описывается с помощью данных параметрических функций и операции суперпозиции. Этот результат не включён в данную диссертацию из-за ограничения на объём.

Основное содержание настоящей диссертации составляют результаты работы [18]. Описание общего решения, полученное в настоящей диссертации, основано на следующем, хорошо известном замечании.

Обозначим для данной системы уравнений $\bar{\varphi}$ через $H(\bar{\varphi})$ конечно-определённую группу, множеством образующих которой служат неизвестные и коэффициенты системы $\bar{\varphi}$, а определяющими соотношениями служат уравнения системы $\bar{\varphi}$. Пусть F_1 - свободная группа, в которой ищутся решения. Тогда решения системы $\bar{\varphi}$ взаимно-однозначно представляются гомоморфизмами $H(\bar{\varphi})\to F_1$, отображающими коэффициенты в себя. Рассмотрение групп $H(\bar{\varphi})$ позволяет интерпретировать элементарные преобразования обобщённых уравнений как гомоморфизмы соответствующих групп. Средством порождения новых решений из уже имеющихся служат автоморфизмы групп $H(\bar{\varphi})$: если $\sigma: H(\bar{\varphi})\to H(\bar{\varphi})$ - автоморфизм, то с его помощью из решения $\pi: H(\bar{\varphi})\to F_1$ получается новое решение $\pi\sigma: H(\bar{\varphi})\to F_1$, а если $P \subseteq Aut(H(\bar{\varphi}))$, то πP задаёт целую серию новых решений.

ПРИМЕР I. Если система φ состоит из единственного уравнения $[A^{-1}xC^{-1}, B]=1$, то она обладает очевидным решением $X_0 = AC$. Подстановка $x\mapsto xC^{-1}BC$, как легко видеть, определяет автоморфизм σ группы $H(\varphi)$.

Действуя автоморфизмом σ^{μ} на решение X_0, мы получаем решение $X_{\mu} = AB^{\mu}C$. Таким образом, параметрические слова Линдона вида (0.1) соответствуют циклической группе автоморфизмов, порождённой элементом σ.

ПРИМЕР 2. Если σ - автоморфизм свободной группы $\langle x, y \rangle$, стабилизирующий коммутатор $[x, y]$, то он индуцирует автоморфизм группы уравнения (0.2). Действуя стабилизатором коммутатора $[x, y]$ на тривиальное решение $X = a$, $Y = b$ уравнения (0.2), мы получаем в точности решения, описываемые функцией Нильсена-Хмелевского. При этом числовые параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ в её определении задают разложение $\sigma = \tau_1^{\lambda_1} \tau_2^{\lambda_2} \tau_1^{\lambda_3} \ldots \tau_{\varepsilon}^{\lambda_k}$ рассматриваемого автоморфизма в произведение двух порождающих автоморфизмов τ_1 и τ_2.

Отклоняясь несколько в сторону, отметим, что аналоги проблем Тарского для свободных полугрупп легко решаются отрицательно: для проблемы 2 это очевидно, а для проблемы I доказано в работе Куайна [27]. Вопрос о причинах такого разительного отличия в свойствах свободных групп и полугрупп представляется достаточно интересным. В связи с этим отметим, что при интерпретации элементарных преобразований обобщённых уравнений гомоморфизмами групп в большинстве случаев получаются изоморфизмы и, в частности, эти преобразования почти всегда обратимы. В случае же свободных полугрупп это не так и вся рассматриваемая в настоящей работе теория не имеет естественного полугруппового аналога.

В [18] введено понятие фундаментальной последовательности, состоящей из конечнопорождённых групп автоморфизмов некоторых групп типа $H(\bar{\Psi})$ и связывающих их гомоморфизмов и с помощью этого понятия описано общее решение /с указанным выше ограничением на вхождения подслов P^{j} / произвольной системы уравнений в свободной группе. После появления работы В.С.Губы [3], в которой доказана некоторая "теорема компактности" для систем уравнений в свободной группе, стало возможным усилить результаты из [18] в двух направлениях. Во-первых, снято ограничение на вхождения подслов P^1. Во-вторых, построен некоторый список "канонических" групп автоморфизмов, которых достаточно для описания общего решения. Это улучшенное описание общего решения и является основным результатом настоящей диссертации. Кроме того, на его основе построен алгоритм, вычисляющий ранг бескоэффициентных уравнений в свободной группе.

В §I гл.I мы вводим определение фундаментальной последовательности, приводим список канонических групп автоморфизмов и формулируем основной результат. Отметим, что мы заменяем описанные выше группы $H(\bar{\varphi})$ на некоторые их факторгруппы $G(\bar{\varphi})$, более удобные для дальнейшего и доказываем два важных свойства таких групп /леммы I.I,I.2/. Канонические группы автоморфизмов соответствуют системам уравнений из следующего списка: тривиальные системы /т.е. системы, вообще не содержащие уравнений/, уравнения вида $q(\bar{x})=1$, где q - слово вида (0.3) или вида $x_1^2 x_2^2 \dots x_g^2=1$ и уравнения вида

$$\prod_{i=1}^{n}(w_i^{-1}a_i w_i)\,q(\bar{v})=\prod_{i=1}^{n}(b_i^{-1}a_i b_i)\,q(\bar{c}). \quad (0.4)$$

Заметим, что уравнения примеров I,2 с точностью до изоморфизма являются первыми членами $w^{-1}aw=b^{-1}ab$ и $[v_1,v_2]=[c_1,c_2]$ серии (0.4) .

В §2 гл.I в предположении истинности основного результата строится алгоритм, вычисляющий ранг произвольной бескоэффициентной системы уравнений в свободной группе. Приводимое здесь доказательство является упрощённым вариантом доказательства из §9 работы [18] .

Оставшаяся часть диссертации посвящена доказательству основного результата. В §3 гл.I мы приводим определение обобщённого уравнения, совпадающее с введённым в §§2,10 работы [18]. Это определение проще исходного определения Г.С.Маканина [12] за счёт ограничения на возможные вхождения коэффициентов: в отличие от работы [12], где коэффициенты играют значительную роль, в настоящей работе их роль сведена к минимуму. Простая лемма 1.5, редуцирующая системы уравнений в свободной группе к обобщённым уравнениям, фактически была доказана в [12], однако интерпретация этого перехода с помощью связывающих гомоморфизмов впервые появилась в [18].

Материал главы II является подготовительным для главы III. В §I гл.II мы описываем элементарные преобразования обобщённых уравнений. Список нужных нам преобразований взят из работы [18] и получен модификацией и сокращением аналогичного списка из [12]. В конце этого параграфа вводится важное понятие решения, минимального относительно данной группы автоморфизмов и доказывается, что элементарные преобразования в ряде случаев сохраняют это свойство /лемма 2.1/.

В §§2-4 гл.II обобщённым уравнениям специального вида ставятся в соответствие некоторые канонические группы автоморфизмов. Доказательство леммы 2.8 получено переработкой доказательства леммы 5.1 [18]. Рассуждения §4 гл.II заменяют известную лемму Булитко [2], используемую во всех более ранних работах.

В §I гл.III из элементарных преобразований конструируется некоторое /вообще говоря, бесконечное/ дерево $T(\Omega)$ и изучается структура бесконечных путей в этом дереве /лемма 3.2/. Фрагмент дерева $T(\Omega)$, состоящий из главных рёбер, является основой также и для работ [12,18].

В §2 гл. III показывается, что "уменьшив" предварительно решение обобщённого уравнения до минимального относительно группы автоморфизмов, построенной из заготовок §§2-4 гл.II, его можно "преобразовать" вдоль дерева $T(\Omega)$ таким образом, что при этом мы всё время будем находиться в вершинах фиксированного <u>конечного</u> поддерева $T_0(\Omega)$, которое эффективно выделяется в $T(\Omega)$. Отличительной особенностью этого параграфа по сравнению с аналогичными рассмотрениями в [12,13,18] является отсутствие утомительных рекурсивных определений, характерных для последних работ. Вместо них мы пользуемся понятием запрещённого пути, которое определяется в этом же параграфе.

В §3 гл.III мы итерируем построения §§1,2 гл.III; конечность числа шагов этой итерации вытекает из работы В.С.Губы [3]. После этого мы завершаем доказательство основного результата, сформулированного в §1 гл.I.

В диссертации используется большое число вспомогательных понятий, поэтому мы сочли целесообразным снабдить её указателем обозначений.

ГЛАВА I. Основные результаты.

В §I этой главы изучается взаимосвязь между решениями систем уравнений в свободной группе и некоторыми гомоморфизмами и приводится описание общего решения системы уравнений в свободной группе. В §2 на основании этого описания строится алгоритм, вычисляющий ранг бескоэффициентных систем уравнений. В §3 начинается доказательство основного результата §I: мы вводим понятие обобщённого уравнения и показываем, каким образом системы уравнений в свободной группе редуцируются к обобщённым уравнениям.

§I. Основные понятия. Формулировка теоремы об описании общего решения.

Зафиксируем два групповых алфавита: счётный алфавит неизвестных $\Sigma_0 = \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, \ldots\}$ и конечный алфавит коэффициентов $\Sigma_1 = \{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \ldots, a_\omega^{\pm 1}\}$ $(\omega \geq 2)$. Системой уравнений в свободной группе с неизвестными $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ и коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_\omega$ назовём систему равенств вида

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, a_1, \ldots, a_\omega) = 1, \\ &\varphi_2(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, a_1, \ldots, a_\omega) = 1, \\ &\quad\cdots \\ &\varphi_m(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, a_1, \ldots, a_\omega) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ - слова в алфавите $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$, в которые могут входить лишь неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$. Подчеркнём, что список неизвестных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ является составной частью определения системы уравнений, так что системы, полученные друг из друга удалением или добавлением фиктивных неизвестных, считаются различными.

Для сокращения записи далее последовательности однотипных букв изображаются одной буквой того же типа с чертой наверху. Пример: $\overline{\varphi} = \varphi_1, \ldots, \varphi_m$; $\overline{X} = X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$. При рассмотрении различных последовательностей используются верхние индексы: $\overline{\varphi}^{(i)} = \varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{m_i}^{(i)}$; $\overline{H}^{(k)} = H_1^{(k)}, \ldots, H_{\rho}^{(k)}$ и.т.д.

Решением системы (I.I) называется набор несократимых слов

$$\overline{X} = X_{i_1}, \ldots, X_{i_n} \tag{1.2}$$

в алфавите Σ_1, обращающий свободно в единицу левые части всех уравнений системы (I.I).

Введённые понятия допускают хорошо известную /см., например, [7], с.97/ алгебраическую интерпретацию. Обозначим через F_1 свободную группу с базисом $a_1, \ldots, a_\omega$. Если $\overline{\varphi} = 1$ – система уравнений с неизвестными $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, то через $F(\overline{\varphi})$ обозначим свободную группу с базисом $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, a_1, \ldots, a_\omega$. Любой список слов (1.2) индуцирует гомоморфизм $F(\overline{\varphi}) \to F_1$, который мы будем обозначать через $\hat{\hat{\pi}}_{\overline{X}}$; этот гомоморфизм задаётся действием на свободные образующие следующим образом: $\hat{\hat{\pi}}_{\overline{X}}(a_i) = a_i$; $\hat{\hat{\pi}}_{\overline{X}}(x_{i_k}) = X_{i_k}$. Ясно, что вектор $\overline{X}$ является решением системы (I.I) тогда и только тогда, когда $\hat{\hat{\pi}}_{\overline{X}}(\varphi_i) = 1$ $(1 \le i \le m)$. Обозначим через $H(\overline{\varphi})$ конечно-определённую группу, ассоциированную с системой $\overline{\varphi} = 1$ с множеством неизвестных $\bar{x}$:

$$H(\bar{\varphi}) \rightleftharpoons \langle \bar{x}, \bar{a} \parallel \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{a}) = 1 \rangle . \qquad (1.3)$$

Из вышесказанного вытекает, что $\bar{X}$ является решением системы $\bar{\varphi} = 1$ тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\hat{\hat{\pi}}_{\bar{X}} : F(\bar{\varphi}) \to F_1$ индуцирует естественным образом гомоморфизм $H(\bar{\varphi}) \to F_1$, который мы будем обозначать через $\hat{\pi}_{\bar{X}}$.
Обратно, если $\hat{\pi} : H(\bar{\varphi}) \to F_1$ - произвольный гомоморфизм, для которого $\hat{\pi}(\bar{a}) = \bar{a}$, то вектор $\hat{\pi}(\bar{x})$ служит решением системы $\bar{\varphi} = 1$ /через $\bar{a}$ и $\bar{x}$ мы здесь обозначаем естественные образы элементов $F(\bar{\varphi})$ в $H(\bar{\varphi})$ /. Таким образом, множество решений системы $\bar{\varphi} = 1$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множествами всех гомоморфизмов $\hat{\pi}$ из $H(\bar{\varphi})$ в F_1, обладающих свойством $\hat{\pi}(\bar{a}) = \bar{a}$.

Нам бы хотелось, чтобы в группе $H(\bar{\varphi})$ была разрешима проблема равенства слов, а также, чтобы выполнялось условие максимальности для нормальных подгрупп. К сожалению, ни то, ни другое, вообще говоря, неверно для конечно-определённых групп. Однако оба свойства становятся справедливыми для конечно-порождённых групп, которые аппроксимируются свободными группами.

Назовём группу G с отмеченными элементами $a_1, \ldots, a_\omega$ *свободно аппроксимируемой*, если для любого $g \in G$, отличного от единицы, существует гомоморфизм $\pi : G \to F_1$ такой, что $\pi(\bar{a}) = \bar{a}$ и $\pi(g) \neq 1$.

ЛЕММА 1.1. Пусть дана бесконечная последовательность

$$G_1 \xrightarrow{\pi_1} G_2 \xrightarrow{\pi_2} \ldots \xrightarrow{\pi_{r-1}} G_r \xrightarrow{\pi_r} \ldots$$

конечнопорождённых свободно аппроксимируемых групп и <u>сюрьективных</u> гомоморфизмов. Тогда почти все гомоморфизмы в этой последовательности являются изоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ - конечное семейство порождающих группы G_1. Рассмотрим /возможно, бесконечную/ систему уравнений в свободной группе

$$\{\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1 \mid \exists r\,(\pi_r \ldots \pi_1(\varphi(g_1, \ldots, g_n)) = 1)\}. \quad (1.4)$$

Согласно теореме В.С.Губы [3], существует конечная подсистема $\varphi_1(\bar{x}) = 1, \varphi_2(\bar{x}) = 1, \ldots, \varphi_m(\bar{x}) = 1$ системы (I.4), эквивалентная (I.4). Пусть r_0 - такое число, что $\pi_{r_0}\pi_{r_0-1}\ldots\pi_1(\varphi_i(\bar{g})) = 1 \; (1 \le i \le m)$. Мы утверждаем, что π_r является изоморфизмом при $r \ge r_0$.

Так как π_r сюрьективен по условию, то достаточно проверить, что π_r иньективен. Пусть $g \in G_r$; $\pi_r(g) = 1$. Выберем $g' \in G_1$ такой, что $\pi_{r-1}\ldots\pi_1(g') = g$ и запишем $g' = \varphi(g_1, \ldots, g_n)$. Тогда $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1$ является уравнением системы (I.4) и, следовательно, для любых $X_1, \ldots, X_n \in F_1$ справедлива импликация

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} \varphi_i(X_1, \ldots, X_n) = 1 \Rightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n) = 1. \quad (1.5)$$

Допустим теперь, что $g \ne 1$. Так как G_r свободно аппроксимируема, существует гомоморфизм $\pi : G_r \to F_1$ такой, что $\pi(g) \ne 1$. Пусть $X_j = \pi\pi_{r-1}\ldots\pi_1(g_j) \; (1 \le j \le n)$. Тогда для любого $1 \le i \le m$ имеем $\varphi_i(\bar{X}) = \pi\pi_{r-1}\ldots\pi_1(\varphi_i(\bar{g})) = 1$, так как $r \ge r_0$, однако $\varphi(\bar{X}) = \pi\pi_{r-1}\ldots\pi_1(g') = \pi(g) \ne 1$. Полученное противоречие с (I.5) показывает, что $g = 1$. Лемма I.I доказана.

Пусть теперь H - произвольная группа с отмеченными элементами $a_1,\ldots,a_\omega$ и $S(H)$ - пересечение ядер всевозможных гомоморфизмов $\hat{\pi}: H \to F_1$ таких, что $\hat{\pi}(\bar{a}) = \bar{a}$. Очевидно, факторгруппа $H/S(H)$ свободно аппроксимируема; мы будем обозначать её через $F_r(H)$.

ЛЕММА I.2. Существует алгоритм, который по любому конечному представлению

$$H = \langle g_1,\ldots,g_n,a_1,\ldots,a_\omega \parallel \varphi_1(g_1,\ldots,a_\omega) = \ldots = \varphi_m(g_1,\ldots,a_\omega) = 1\rangle$$

и любому слову $\psi(g_1,\ldots,g_n,a_1,\ldots,a_\omega)$ определяет, равен ли единице естественный образ элемента ψ в группе $F_r(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ элемента ψ в группе $F_r(H)$ равен единице в том и только том случае, когда в свободной группе F_1 выполнена формула

$$\forall \bar{x} \left(\mathop{\&}_{i=1}^{m} \varphi_i(\bar{x},\bar{a}) = 1 \Rightarrow \psi(\bar{x},\bar{a}) = 1 \right).$$

Выполнимость этой формулы алгоритмически проверяется на основании работы Г.С.Маканина [I3]. Тем самым лемма I.2 доказана.

Заметим, что F_r является функтором из категории групп в категорию свободно аппроксимируемых групп с отмеченными элементами $a_1,\ldots,a_\omega$. В частности, всякий гомоморфизм $\hat{\pi}: H_1 \to H_2$ индуцирует гомоморфизм $F_r(\hat{\pi}): F_r(H_1) \to F_r(H_2)$, который является изоморфизмом, если $\hat{\pi}$ - изоморфизм.

Положим теперь для любой системы уравнений $\bar{\varphi} = 1$

$$G(\bar{\varphi}) \rightleftharpoons F_r(H(\bar{\varphi})).$$

Так как $F_r(F_1) = F_1$, то F_r ставит в соответствие гомоморфизмам вида $\hat{\pi}_{\bar{X}}: H(\bar{\varphi}) \to F_1$ / $\bar{X}$ - решение системы $\bar{\varphi} = 1$ / гомоморфизмы вида $\pi_{\bar{X}} = F_r(\hat{\pi}_{\bar{X}}): G(\bar{\varphi}) \to F_1$

такие, что $\pi_{\bar{x}}(\bar{a})=\bar{a}$ /в левой части под $\bar{a}$ понимается канонический образ элементов a_i в группе $G(\bar{\varphi})$ /. Более того, это соответствие является взаимно-однозначным. Итак, множество всех гомоморфизмов $\pi: G(\bar{\varphi})\to F_1$, обладающих свойством $\pi(\bar{a})=\bar{a}$, находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством решений системы $\bar{\varphi}=1$; при этом решению X соответствует гомоморфизм $\pi_{\bar{x}}=F_2(\hat{\pi}_{\bar{x}})$.

Всюду в дальнейшем под гомоморфизмами групп F_1, $F(\bar{\varphi})$, $H(\bar{\varphi})$, $G(\bar{\varphi})$ друг в друга всегда будут пониматься "отмеченные" гомоморфизмы, переводящие элементы $a_1,\dots,a_\omega$ в себя: при этом в случае групп $H(\bar{\varphi})$, $G(\bar{\varphi})$ под a_i понимается его образ при отображениях $F(\bar{\varphi})\to H(\bar{\varphi})$, $F(\bar{\varphi})\to G(\bar{\varphi})$ соответственно.

С учётом только что сделанного замечания, задача описания общего решения системы (1.1) эквивалентна задаче описания гомоморфизмов $G(\bar{\varphi})\to F_1$. Для решения последней задачи введём понятие фундаментальной последовательности.

Фундаментальной последовательностью длины n для системы уравнений $\bar{\varphi}=1$ назовём тройку $(\mathfrak{M}, Hom, Aut)$, где:

$\mathfrak{M}$ - это n систем уравнений $\bar{\varphi}^{(1)}=1,\dots,\bar{\varphi}^{(n)}=1$, причём $\bar{\varphi}^{(1)}$ совпадает с $\bar{\varphi}$, а $\bar{\varphi}^{(n)}$ - тривиальная система, состоящая из пустого списка уравнений /для такой системы, очевидно, $F(\bar{\varphi}^{(n)})=H(\bar{\varphi}^{(n)})=G(\bar{\varphi}^{(n)})$ - свободная группа с образующими $\bar{a},\bar{x}^{(n)}$, где $\bar{x}^{(n)}$ - список неизвестных системы $\bar{\varphi}^{(n)}$ /;

Hom - набор из $(n-1)$-го гомоморфизма $\pi_1,\dots,\pi_{n-1}$ вида $\pi_i: G(\bar{\varphi}^{(i)})\to G(\bar{\varphi}^{(i+1)})$ $(1\le i\le n-1)$;

Aut - это n конечнопорождённых групп автоморфизмов $P_1, \ldots, P_n$ групп $G(\bar{\varphi}^{(1)}), \ldots, G(\bar{\varphi}^{(n)})$ соответственно.

Фундаментальная последовательность $\Phi = (\mathfrak{M}, Hom, Aut)$ считается эффективно заданной, если указаны системы из $\mathfrak{M}$, гомоморфизмы из Hom, а также конечные семейства образующих групп автоморфизмов из Aut; при этом задать эффективно гомоморфизм $G(\bar{\varphi}) \to G(\bar{\psi})$ - это значит указать действием на свободные образующие некоторый гомоморфизм $F(\bar{\varphi}) \to F(\bar{\psi})$, которым он индуцируется.

Если Φ - некоторая фундаментальная последовательность длины n для системы $\bar{\varphi} = 1$, $\pi : G(\bar{\varphi}^{(n)}) \to F_1'$ - гомоморфизм свободных групп, а $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ - автоморфизмы из групп $P_1, P_2, \ldots, P_n$ соответственно, то композиция

$$\left.\begin{array}{l} G(\bar{\varphi}) \xrightarrow{\sigma_1} G(\bar{\varphi}) \xrightarrow{\pi_1} G(\bar{\varphi}^{(2)}) \xrightarrow{\sigma_2} G(\bar{\varphi}^{(2)}) \longrightarrow \ldots \\ \ldots \xrightarrow{\pi_{n-1}} G(\bar{\varphi}^{(n)}) \xrightarrow{\sigma_n} G(\bar{\varphi}^{(n)}) \xrightarrow{\pi} F_1' \end{array}\right\} \quad (1.6)$$

равна $\pi_{\bar{X}}$ для некоторого решения $\bar{X}$ системы $\bar{\varphi} = 1$. Будем говорить, что Φ описывает решение $\bar{X}$ системы $\bar{\varphi} = 1$, если гомоморфизм $\pi_{\bar{X}}$ представляется в виде (1.6) при некотором выборе $\pi, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

Фактически при описании общего решения системы уравнений с помощью фундаментальных последовательностей можно ограничиться группами автоморфизмов весьма специального вида, которые сейчас будут определены.

Предположим, что список неизвестных $\bar{x}$ системы $\bar{\varphi} = 1$ некоторым образом разбит на две группы $\bar{y}$ и $\bar{z}$ и, аналогично, список уравнений $\bar{\varphi}$ разбит на две группы $\bar{\Theta}$ и $\bar{\psi}$:

$$\bar{x} = \bar{y} \cup \bar{z}; \; \bar{\varphi} = \bar{\Theta} \cup \bar{\psi}; \; \bar{y} \cap \bar{z} = \emptyset; \; \bar{\Theta} \cap \bar{\psi} = \emptyset. \quad (1.7)$$

Допустим, что неизвестные $\bar{y}$ не входят в уравнения $\bar{\Psi}$, а уравнения $\bar{\Theta}$ имеют один из следующих трёх типов.

ТИП I. Список $\bar{\Theta}$ пуст.

ТИП 2. Список $\bar{\Theta}$ состоит из единственного уравнения $q(\bar{y})=1$ /за одним исключением, которое будет описано ниже/, в которое входят все неизвестные из списка $\bar{y}$, причём $q \doteq y_1^2 y_2^2 \ldots y_g^2$ или $q \doteq [y_1, y_2][y_3, y_4] \ldots [y_{2g-1}, y_{2g}]$.

Исключение, о котором говорилось выше, состоит в том, что если $q \doteq [y_1, y_2]$, то мы разрешаем входить в список $\bar{\Theta}$, помимо уравнения $[y_1, y_2]=1$, одной или нескольким парам уравнений вида

$$[y_1, U(\bar{z},\bar{a})] = [y_2, U(\bar{z},\bar{a})] = 1. \qquad (1.8)$$

ТИП 3. Список неизвестных $\bar{y}$ можно разбить на три группы $\bar{y} = u_1, \ldots, u_n, \bar{v}, w_1, \ldots, w_n$ так, что $\bar{\Theta}$ состоит /за одним исключением/ из уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} & u_i = U_i(\bar{z},\bar{a}) \ (1 \le i \le n), \\ & \prod_{i=1}^{n} (w_i^{-1} u_i w_i) \cdot q(\bar{v}) = U_0(\bar{z},\bar{a}) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.9)$$

где слова $U_0, U_1, \ldots, U_n$ произвольны, а слово $q(\bar{v})$ либо пустое, либо такое же, как в предыдущем случае, причём в q входят все неизвестные списка $\bar{v}$.

Исключение состоит в том, что если $n=q=1$, т.е. система (I.9) приобретает вид $u = U_1(\bar{z},\bar{a})$; $w^{-1}uw = U_0(\bar{z},\bar{a})$, мы разрешаем входить в список $\bar{\Theta}$, помимо этих уравнений, одной или нескольким парам уравнений вида

$$w^{-1} U(\bar{z},\bar{a}) w = V(\bar{z},\bar{a}); \ [u, U(\bar{z},\bar{a})] = 1. \qquad (1.10)$$

Определим группу автоморфизмов $\hat{\hat{P}} \subseteq Aut(F(\bar{y}))$

следующим образом.

Если $\overline{\Theta}$ имеет тип I, то положим
$\hat{\hat{P}} \rightleftharpoons \{\hat{\hat{\pi}} \in Aut(F'(\bar{\varphi})) \mid \hat{\hat{\pi}}(\bar{z}) = \bar{z}, \hat{\hat{\pi}}(\bar{a}) = \bar{a}\}$.

Если $\overline{\Theta}$ имеет тип 2, то рассмотрим вначале группу $\hat{\hat{P}}_1$ автоморфизмов свободной группы с базисом $\bar{y}$, состоящую из тех автоморфизмов, которые переводят циклическое слово q в q или q^{-1}. Пусть $\hat{\hat{P}}_2 = \hat{\hat{P}}_1 * id$, где id - тождественный автоморфизм свободной группы с базисом $\bar{z}, \bar{a}$. Если $q \mathrel{\bar{\circ}} [y_1, y_2]$ и в список $\overline{\Theta}$ входят дополнительные уравнения (I.8), положим $\hat{\hat{P}} = \hat{\hat{P}}_2$. В противном случае пусть $\hat{\hat{P}}$ порождается группой $\hat{\hat{P}}_2$ и автоморфизмами вида $\bar{z} \mapsto \bar{z}, \bar{a} \mapsto \bar{a}, y \mapsto A^{-1}\bar{y}A$ /A - некоторый элемент списка $\bar{z}, \bar{a}$ /.

Если $\overline{\Theta}$ имеет тип 3, то рассмотрим стабилизатор $\hat{\hat{P}}_1$ в группе автоморфизмов свободной группе с базисом $\bar{y}$ множества элементов $u_1, \ldots, u_n, \prod\limits_{i=1}^{n} (w_i^{-1} u_i w_i) \cdot q(\bar{v})$. Положим $\hat{\hat{P}} = \hat{\hat{P}}_1 * id$, где id - тождественный автоморфизм свободной группы с базисом $\bar{z}, \bar{a}$.

Непосредственно проверяется, что любой автоморфизм $\hat{\hat{\pi}} \in \hat{\hat{P}}$ индуцирует эндоморфизм $\hat{\pi}$ группы $H(\bar{\varphi})$ /заметим, что если список $\overline{\Theta}$ имеет тип 3 и $n = q = 1$, то автоморфизмы из $\hat{\hat{P}}_1$ имеют вид $u \mapsto u, w \mapsto u^r w \; (r \in \mathbb{Z})$ /. Более того, так как $\hat{\hat{\pi}}^{-1} \in \hat{\hat{P}}$, то $\hat{\pi}$ обладает обратным и, следовательно, является автоморфизмом. Так как F_r - функтор, то автоморфизмом является также эндоморфизм $\pi = F_r(\hat{\pi})$ группы $G(\bar{\varphi}) = F_r(H(\bar{\varphi}))$. Группу автоморфизмов $P = \{F_r(\hat{\pi}) \mid \hat{\hat{\pi}} \in \hat{\hat{P}}\}$ будем называть канонической группой автоморфизмов и приписывать ей тот же тип I,2 или 3, который имеет список $\overline{\Theta}$.

Отметим, что если $\overline{\Theta}$ имеет тип I [тип 3], то $\hat{\hat{P}}$ [$\hat{\hat{P}}_1$ соответственно] есть стабилизатор в свободной группе конечного множества слов, а если $\overline{\Theta}$ имеет тип 2, то $\hat{\hat{P}}_1$ есть стабилизатор в свободной группе неупорядоченной пары циклических слов (q, q^{-1}) . Конечный список порождающих для таких групп эффективно строится, например, на основании конструкции Маккула / [7] , предл. I.5.7/. Итак, по разбиению (I.7) может быть эффективно задана конечная система образующих соответствующей канонической группы автоморфизмов.

Пусть дана пара систем уравнений в свободной группе $\overline{\varphi}^{(1)}, \overline{\varphi}^{(2)}$ и изоморфизм $\Theta: G(\overline{\varphi}^{(1)}) \to G(\overline{\varphi}^{(2)})$. Если P - каноническая группа автоморфизмов группы $G(\overline{\varphi}^{(2)})$, то группу автоморфизмов $\Theta^{-1} P \Theta$ группы $G(\overline{\varphi}^{(1)})$ мы также будем называть канонической при условии, что эффективно построены изоморфизмы Θ, Θ^{-1} .

Фундаментальную последовательность $\Phi = (\mathfrak{M}, Hom, Aut)$ назовём канонической , если все группы из Aut порождаются конечным числом канонических групп автоморфизмов. В силу вышеприведённого замечания, для эффективного задания канонической фундаментальной последовательности надо указать системы из $\mathfrak{M}$, гомоморфизмы из Hom и для каждой системы $\overline{\varphi}^{(i)}$ из Aut эффективно построить конечный /возможно, пустой/ список систем $\overline{\varphi}^{(ij)} (1 \le j \le r_i)$, изоморфизмы $\Theta_{ij}: G(\overline{\varphi}^{(i)}) \to G(\overline{\varphi}^{(ij)}) (1 \le j \le r_i)$, обратные изоморфизмы Θ_{ij}^{-1} и разбиения вида (I.7) для систем $\overline{\varphi}^{(ij)}$, которым соответствуют канонические группы автоморфизмов P_{ij}. При этом группа автоморфизмов P_i из Aut порождена группами $\Theta_{ij}^{-1} P_{ij} \Theta_{ij} (1 \le j \le r_i)$.

Основной результат настоящей работы выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА I. По всякой системе уравнений в свободной группе можно эффективно построить такое конечное множество канонических фундаментальных последовательностей для этой системы уравнений, что всякое решение описывается хотя бы одной из построенных фундаментальных последовательностей.

Доказательству теоремы I посвящены §3 гл.I, а также гл. 2,3.

ЗАМЕЧАНИЕ I. П о к а з а т е л е м п е р и о д и ч н о с т и списка слов $\bar{X} = X_1, \dots, X_n$ называется максимальное натуральное число J такое, что в некоторое слово списка $\bar{X}$ входит подслово вида P^J для некоторого непустого слова P. Для решений ограниченного показателя периодичности в [I8] была доказана следующая теорема:

"По всякой системе уравнений в свободной группе $\bar{\varphi} = 1$ и натуральному числу J можно эффективно построить конечное множество фундаментальных последовательностей так, что каждое решение системы $\bar{\varphi} = 1$, показатель периодичности которого не превосходит J, описывается хотя бы одной из построенных последовательностей".

Как отмечалось во введении, теорема I настоящей работы усиливает основной результат работы [I8] в двух направлениях: снимается ограничение на показатель периодичности и уточняется строение используемых фундаментальных последовательностей. Однако, если оставить ограничение на показатель периодичности и дополнить доказательство теоремы I в [I8] леммами 2.5, 2.7 настоящей работы, легко видеть, что фундаментальные последовательности, используемые в [I8], являются каноническими. Более того, при этом всякая нетривиальная группа автоморфизмов в Aut не просто порождена конечным числом канонических групп автоморфизмов, а сама является канонической. Таким образом, для решений ограниченного показателя периодичности за счёт требования, чтобы все группы автоморфизмов в Aut были каноническими, может быть получено описание, более точное, чем в теореме I. Вопрос о возможности введения такого ограничения для описания произвольных решений открыт.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Единственный бесконечный объект в определении фундаментальной последовательности - это группы автоморфизмов. Всевозможные канонические группы автоморфизмов разбиваются, в зависимости от типа группы и вида слова q, в пять бесконечных серий, причём внутри каждой серии группы естественным образом индексируются натуральными числами /для типов 1,2/ и парами натуральных чисел /для типа 3/. Чем больше номер группы, тем больше неизвестных $\bar{y}$ содержит представление (1.7) и тем "сложнее" рассматриваемая группа. Возникает естественный вопрос: можно ли оценить сверху сложность канонических групп автоморфизмов, используемых при построении фундаментальных последовательностей теоремы I, с помощью какой-либо простой функции?

Это в самом деле возможно, и ответ выглядит следующим образом. Определим сложность $L(\bar{\varphi})$ системы $\bar{\varphi}=1$ $(\bar{\varphi}=\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$ формулой

$$L(\bar{\varphi})=\sum_{i=1}^{m}\frac{l_i(l_i-1)}{2},$$

где l_i - количество вхождений неизвестных в уравнение $\varphi_i=1$. Тогда в теореме I можно считать, что во всех разбиениях (1.7), возникающих при построении канонических групп, входящих в искомые последовательности, число неизвестных $|\bar{y}|$ в списке $\bar{y}$

ограничено сверху величиной $L(\bar{\varphi})$ для канонических групп типа I и величиной $2L(\bar{\varphi})+1$ для канонических групп типов 2,3.

Обоснование этого замечания будет приведено в самом конце работы, после доказательства теоремы I.

§2. Проблема распознавания ранга.

Система уравнений (I.I) называется бескоэффициентной, если в неё не входят буквы из алфавита Σ_1. Рангом решения $\bar{X}$ бескоэффициентной системы уравнений называется ранг подгруппы $G_p(\bar{X})$ в F_1, порождённой набором $\bar{X}$. Рангом бескоэффициентной системы $rg(\bar{\varphi})$ называется максимум рангов решений системы $\bar{\varphi}=1$. Отметим, что $rg(\bar{\varphi})$ не зависит от числа элементов $\omega \geqslant 2$ в алфавите коэффициентов, так как свободные группы $\{\langle a_1,\ldots,a_\omega\rangle \mid \omega \geqslant 2\}$ попарно вкладываются друг в друга.

Проблема распознавания ранга состоит в построении алгоритма, вычисляющего $rg(\bar{\varphi})$ для бескоэффициентной системы уравнений $\bar{\varphi}=1$. В настоящем параграфе мы на основании теоремы I решаем эту проблему положительно.

Нам понадобится одна вспомогательная лемма. В её формулировке и доказательстве буквами E, V обозначаются конечномерные векторные пространства над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$; через $dim(E)$ обозначается размерность пространства E. Через $End(E), Aut(E), Hom(E_1, E_2)$ обозначены соответственно алгебра линейных эндоморфизмов пространства E, группа его обратимых эндоморфизмов и пространство линейных операторов из E_1 в E_2. $M_n(\mathbb{Q})$ - алгебра квадратных матриц $n\times n$; $det(C)$ - определитель матрицы $C\in M_n(\mathbb{Q})$. Через $E_1\otimes E_2$ обозначается тензорное произведение пространств E_1 и E_2; $E^{(n)}\rightleftharpoons \underbrace{E\otimes E\otimes\ldots\otimes E}_{n}$, $e^{(n)}\rightleftharpoons e\otimes e\otimes\ldots\otimes e$, $e\in E$. Если E наделено структурой ассоциативной алгебры над $\mathbb{Q}$, то $E^{(n)}$ также является алгеброй с операцией умножения

$$(e_1\otimes\ldots\otimes e_n)(e_1'\otimes\ldots\otimes e_n')=(e_1e_1'\otimes\ldots\otimes e_ne_n').$$

ЛЕММА I.3. Пусть $dim(E_1)=n, dim(E_2)=m, \ell=n^{2m}$, $\bar{b}=b_1,\ldots,b_k\subseteq Aut(E_1)$; $P=Gp(b_1,\ldots,b_k)$; $\pi\in Hom(E_1,E_2)$; $V\subseteq E_1$. Обозначим через P_i множество тех элементов группы P, которые могут быть записаны в виде слов длины, не превосходящей i от образующих $\bar{b}$.

Допустим, что для некоторого d существует элемент $b\in P$ такой, что композиция πb отображает V на подпространство $\pi b(V)\subseteq E_2$ размерности $\geq d$. Тогда существует элемент $b'\in P_\ell$, обладающий тем же свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в $b(V)$ подпространство V_0 такое, что $dim(V_0)=dim(V)$ и ограничение π на V_0 задаёт изоморфизм между V_0 и $\pi b(V)$. Заменив V на $b^{-1}(V_0)$ и d на $dim(\pi b(V))$, можно с самого начала считать, что $dim(V)=dim(\pi b(V))=d$.

Рассмотрим в $End(E_1)$ подалгебру A, порождённую группой P. Очевидно, $dim A\leq n^2$. Поставим в соответствие каждому $a\in A$ линейный оператор из $Hom(V,\pi b(V))$, являющийся композицией

$$V\xrightarrow{id}E_1\xrightarrow{a}E_1\xrightarrow{\pi}E_2\longrightarrow\pi b(V), \tag{1.11}$$

в которой гомоморфизм $E_2 \to \pi b(\bar{V})$ является произвольной фиксированной ретракцией E_2 на $\pi b(\bar{V})$. Получим линейный оператор $A \to Hom(\bar{V}, \pi b(\bar{V}))$. Зафиксируем в $\bar{V}$ и $\pi b(\bar{V})$ по базису и отождествим $Hom(\bar{V}, \pi b(\bar{V}))$ с $M_d(\mathbb{Q})$ путём сопоставлений каждому оператору его координат. Получим линейное отображение $\alpha: A \to M_d(\mathbb{Q})$, причём $det(\alpha(b)) \neq 0$ и если $det(\alpha(b)) \neq 0$ для некоторого $b' \in P$, то композиция (I.II) - изоморфизм и, следовательно, $dim(\pi b'(\bar{V})) = d$.

Рассмотрим разложение $M_d(\mathbb{Q}) = W_1 \oplus \ldots \oplus W_d$, где W_i - подпространство, состоящее из тех матриц C, в которых отличными от нуля могут быть только элементы i-й строки. Функция $det: M_d(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ является полилинейным отображением набора пространств $(W_1, \ldots, W_d)$ в $\mathbb{Q}$. Поэтому существует линейное отображение

$$\beta: M_d(\mathbb{Q})^{(d)} \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_d \to \mathbb{Q}$$

такое, что $\beta(C^{(d)}) = det(C) \, (C \in M_d(\mathbb{Q}))$. Обозначим через $\gamma: A^{(d)} \to \mathbb{Q}$ композицию $\beta\alpha^{(d)}: A^{(d)} \xrightarrow{\alpha^{(d)}} M_d(\mathbb{Q})^{(d)} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}$.

Обозначим через $V_i^{(d)}$ линейное подпространство в $A^{(d)}$, порождённое множеством $\{\tau^{(d)} \mid \tau \in P_i\}$. Положим также $V^{(d)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i^{(d)}$. Так как $dim(A^{(d)}) = (dim\, A)^d \leq n^{2d} \leq l$ и $V_0^{(d)} \subseteq V_1^{(d)} \subseteq V_2^{(d)} \subseteq \ldots$, то существует $i \leq l$ такое, что $V_i^{(d)} = V_{i+1}^{(d)}$. Далее, для всякого j линейное подпространство $V_{j+1}^{(d)}$ порождается подпространствами $V_j^{(d)}, V_j^{(d)} b_1^{\pm 1(d)}, V_j^{(d)} b_2^{\pm 1(d)}, \ldots, V_j^{(d)} b_k^{\pm 1(d)}$. Поэтому из $V_i^{(d)} = V_{i+1}^{(d)}$ вытекает, что $V_i^{(d)} = V_{i+1}^{(d)} = \ldots = V^{(d)}$.

Однако $\beta^{(d)} \in V^{(d)}$ и $\gamma(\beta^{(d)}) \neq 0$. Так как $V^{(d)}$ порождено векторами $\{\tau^{(d)} \mid \tau \in P_\ell\}$, то существует элемент $\beta' \in P_\ell$ такой, что $\det(\alpha(\beta')) = \gamma(\beta'^{(d)}) \neq 0$. Как отмечалось выше, отсюда следует $\dim(\pi\beta'(V)) = d$. Тем самым лемма I.3 доказана.

Поставим в соответствие каждой конечнопорождённой группе G конечномерное векторное пространство $E(G) = G/[G,G] \otimes \mathbb{Q}$, а каждому гомоморфизму $\pi: G_1 \to G_2$ - определяемый естественным образом линейный оператор $E(\pi): E(G_1) \to E(G_2)$. E на самом деле является функтором из категории конечнопорождённых групп в категорию конечномерных векторных пространств над $\mathbb{Q}$. В частности, если π - изоморфизм, то $E(\pi)$ - изоморфизм.

Пусть $\Phi = (\mathfrak{M}, Hom, Aut)$ - произвольная фундаментальная последовательность, $\mathfrak{M} = \{\bar{\varphi}^{(1)}, \bar{\varphi}^{(2)}, \dots, \bar{\varphi}^{(n)}\}$, $Hom = \{\pi_1, \dots, \pi_{n-1}\}$, $Aut = \{P_1, \dots, P_n\}$. Пусть F_0 - свободная группа с множеством образующих $\bar{x}$, где $\bar{x}$ - список неизвестных системы $\bar{\varphi}^{(1)}$, а гомоморфизм $\pi_0: F_0 \to G(\bar{\varphi}^{(1)})$ определён правилом $\pi_0(\bar{x}) = \bar{x}$ / π_0 не является отмеченным/. Тогда для произвольных автоморфизмов $\beta_1, \dots, \beta_n$ из $P_1, \dots, P_n$ композиция

$$\beta_n \pi_{n-1} \beta_{n-1} \dots \beta_2 \pi_1 \beta_1 \pi_0 : F_0 \to G(\bar{\varphi}^{(n)}) \qquad (1.12)$$

определяет линейный оператор

$$E(\beta_n) E(\pi_{n-1}) \dots E(\beta_1) E(\pi_0) : E(F_0) \to E(G(\bar{\varphi}^{(n)})). \qquad (1.13)$$

Обозначим через $d_\varphi(\beta_1, \dots, \beta_n)$ размерность образа этого оператора и назовём л и н е й н ы м   р а н г о м фундаментальной последовательности Φ число

$$drg(\Phi) \rightleftharpoons \max_{b_i \in P_i} d_\varphi(b_1, \ldots, b_n).$$

ЛЕММА I.4. Существует алгоритм, вычисляющий по эффективно заданной фундаментальной последовательности её линейный ранг.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что фундаментальная последовательность считается эффективно заданной, если указаны системы уравнений $\bar{\varphi}^{(i)} = 1 \; (1 \leq i \leq n)$, а также гомоморфизмы $F(\bar{\varphi}^{(i)}) \to F(\bar{\varphi}^{(i+1)})$ и $F(\bar{\varphi}^{(i)}) \to F(\bar{\varphi}^{(i)})$, индуцирующие соответственно гомоморфизмы из Hom и конечные системы образующих групп автоморфизмов из Aut . Пусть $\bar{x}^{(i)} = x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{m_i}^{(i)}$ - список неизвестных системы $\bar{\varphi}^{(i)} = 1$.

Так как группа $G(\bar{\varphi}^{(n)})$ свободна и $a_1, \ldots, a_\omega, x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}$ - её базис, то векторы $E(a_1), \ldots, E(a_\omega), E(x_1^{(n)}), \ldots, E(x_{m_n}^{(n)})$ образуют базис линейного пространства $E(G(\bar{\varphi}^{(n)}))$. Если дан набор автоморфизмов $b_1, \ldots, b_n$ из групп $P_1, \ldots, P_n$, то можно вычислить действие гомоморфизма (I.12) на образующие $\bar{x}^{(1)}$ группы F_0 . Следовательно, эффективно вычисляются координаты образов векторов $E(\bar{x}^{(1)})$ под действием оператора (I.13) в базисе $E(\bar{a}), E(\bar{x}^{(n)})$ и ранг полученной матрицы. Итак, мы доказали, что $d_\varphi(b_1, \ldots, b_n)$ эффективно вычисляется по $\Phi, b_1, \ldots, b_n$.

Докажем теперь, что

$$drg(\Phi) = \max_{b_1 \in P_1^*} \max_{b_2 \in P_2^*} \ldots \max_{b_n \in P_n^*} d_\varphi(b_1, \ldots, b_n), \quad (1.14)$$

где P_i^* состоит из всех b_i, имеющих в образующих группы P_i длину записи, не превосходящую $(m_i+\omega)^{(2(m_n+\omega))}$.

Неравенство

$$drg(\Phi) \geqslant \max_{b_1 \in P_1^*} \dots \max_{b_n \in P_n^*} d_\varphi(b_1, \dots b_n)$$

очевидно. Для доказательства неравенства в другую сторону мы установим индукцией по $K\ (0 \leqslant K \leqslant n)$, что

$$drg(\Phi) \leqslant \max_{b_1 \in P_1^*}(\dots \max_{b_K \in P_K^*} \max_{b_{K+1} \in P_{K+1}} (\dots \max_{b_n \in P_n} d_\varphi(b_1, \dots, b_n). \quad (1.15)$$

База индукции, $K=0$, непосредственно вытекает из определения $drg(\Phi)$. Пусть (I.I5) уже установлено для некоторого значения $K \leqslant n-1$ и $b_1, \dots, b_n$ таковы, что $b_i \in P_i^*(1 \leqslant i \leqslant K)$ и $drg(\Phi) = d_\varphi(b_1, \dots, b_n)$.

Применим в этой ситуации лемму I.3, взяв в качестве E_1 и E_2 в её формулировке пространства $E(G(\bar\varphi^{(K+1)}))$ и $E(G(\bar\varphi^{(n)}))$ соответственно, в качестве P - группу автоморфизмов $E(P_{K+1})$, в качестве $\bar{b}$ - $E(S_{K+1})$, где S_{K+1} - конечная система образующих группы P_{K+1}, в качестве π - линейный оператор $E(b_n \pi_{n-1} b_{n-1} \dots \pi_{K+1})$, в качестве V - образ оператора $E(\pi_K b_K \dots b_1 \pi_0)$, в качестве b - линейный автоморфизм $E(b_{K+1})$ и в качестве числа d - $drg(\Phi)$. Мы получим элемент $b'_{K+1} \in P^*_{K+1}$ такой, что $d_\varphi(b_1, \dots, b_K, b'_{K+1}, b_{K+2}, \dots, b_n) \geqslant$ $\geqslant drg(\Phi)$. Это завершает индуктивный переход в доказательстве (I.I5).

Положив в (I.I5) $K=n$, мы установим (I.I4). Лемма I.4 непосредственно вытекает из формулы (I.I4) и эффективной вычислимости функции $d_\varphi(b_1, \dots, b_n)$.

ТЕОРЕМА 2. Существует алгоритм, вычисляющий ранг бескоэффициентной системы уравнений в свободной группе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\varphi}(\bar{x})=1$ – бескоэффициентная система уравнений. В силу замечания в начале параграфа, можно считать, что $\omega \geqslant |\bar{x}|$. Построим на основании теоремы I конечное семейство фундаментальных последовательностей $\Phi_1,\dots,\Phi_t$ для данной бескоэффициентной системы уравнений $\bar{\varphi}(\bar{x})=1$, описывающих все её решения. Мы докажем, что

$$rg(\bar{\varphi}) = \max_{1\leq i\leq t} drg(\Phi_i). \qquad (1.16)$$

В самом деле, если Φ – произвольная фундаментальная последовательность для системы уравнений $\bar{\varphi}(\bar{x})=1$; $b_1,\dots,b_n$ – автоморфизмы из групп $P_1,\dots,P_n$ соответственно и $\bar{X}=b_n\pi_{n-1}\dots\pi_1 b_1\pi_0(\bar{x})$, то $\bar{X}$ – решение системы $\bar{\varphi}(\bar{x})=1$ в алфавите $\sum_1 \cup \bar{x}^{(n)}$, где $\bar{x}^{(n)}$ – список неизвестных тривиальной системы уравнений $\bar{\varphi}^{(n)}=1$. Гомоморфизм (I.12) может быть пропущен через $G_p(\bar{X}) \subseteq G(\bar{\varphi}^{(n)})$, следовательно оператор (I.13) пропускается через $E(G_p(\bar{X}))$, откуда $\dim(E(G_p(\bar{X})))\geqslant d_\varphi(b_1,\dots,b_n)$. Так как $G_p(\bar{X})$ свободна, то $\dim(E(G_p(\bar{X})))=rg(G_p(\bar{X}))\leq rg(\bar{\varphi})$. Тем самым доказано неравенство $rg(\bar{\varphi})\geqslant \max_{1\leq i\leq t} drg(\Phi_i)$.

Обратно, пусть $\bar{X}$ – решение системы $\bar{\varphi}(\bar{x})=1$ ранга $r=rg(\bar{\varphi})$. Так как $r\leq|\bar{x}|\leq\omega$, мы можем выбрать решение $\bar{X}$ так, чтобы $G_p(\bar{X})=G_p(a_1,\dots,a_r)$. Пусть решение $\bar{X}$ описывается фундаментальной последовательностью Φ_i, т.е. $\Phi_i=(\{\bar{\varphi}^{(1)},\dots,\bar{\varphi}^{(n)}\},\{\pi_1,\dots,\pi_{n-1}\},\{P_1,\dots,P_n\})$; $b_i\in P_i\ (1\leq i\leq n)$; $\pi: G(\bar{\varphi}^{(n)})\to F_1$ – некоторые гомоморфизмы и $\pi_{\bar{X}}=\pi b_n\pi_{n-1}b_{n-1}\dots b_2\pi_1 b_1$. В этом случае $\pi_{\bar{X}}\pi_0$ пропускается через $G_p(\bar{X}) = G_p(a_1, \ldots, a_r)$, т.е. имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\pi_0} & G(\bar{\varphi}) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \pi_{\bar{X}} \\ G_p(\bar{X}) & \xrightarrow{i} & F_1 \end{array},$$

где i - включение, а μ - эпиморфизм. Очевидно, $E(\mu)$ - эпиморфизм. Более того, в рассматриваемом случае i обладает правым обратным $j: F_1 \to G_p(\bar{X})$, заданным формулой $j(a_k) = \begin{cases} a_k, & \text{если } 1 \le k \le r \\ 1, & \text{если } r+1 \le k \le \omega \end{cases}$, так что $E(i)$ - мономорфизм. Поэтому $drg(\Phi_i) \geq d_{\Phi_i}(b_1, \ldots, b_n) =$
$= \dim(E(b_n \pi_{n-1} b_{n-1} \ldots \pi_1 b_1 \pi_0)(E(F_0))) \geq$
$\geq \dim(E(\pi_{\bar{X}}\pi_0)(E(F_0))) = \dim(E(i)E(\mu)(E(F_0))) =$
$= \dim(E(\mu)E(F_0)) = \dim(E(G_p(\bar{X}))) = r$. Это доказывает неравенство (I.16) в другую сторону.

Теорема 2 непосредственно вытекает из (I.16) и леммы I.4.

§3. Редукция к обобщённым уравнениям.

Доказательство теоремы 1 мы начинаем с определения обобщённого уравнения, которое, как отмечалось во введении, является модификацией понятия, впервые введённого в [I2].

Обобщённое уравнение задаётся набором

$$\Omega = (n, \rho, k, m, \varepsilon, \alpha, \beta, \Xi, t), \tag{1.17}$$

где n, ρ, k, m - натуральные числа, называемые числом основных уравнений, числом неизвестных, числом граничных уравнений и числом коэффициентных уравнений соответственно, а $\varepsilon, \alpha, \beta, \boxed{\text{н}}$ и t - функции со следующими областями определения и изменения:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon: \{1, 2, \ldots, 2n\} \to \{-1, +1\},\\
&\alpha: \{1, 2, \ldots, 2n\} \to \{1, 2, \ldots, \rho+1\},\\
&\beta: \{1, 2, \ldots, 2n\} \to \{1, 2, \ldots, \rho+1\},\\
&\boxed{\text{н}}: \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, \rho+1\} \times\\
&\times \{1, 2, \ldots, 2n\} \times \{1, 2, \ldots, \rho+1\},\\
&t: \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, \rho\} \times\\
&\times \{1, 2, \ldots, \omega\} \times \{-1, +1\},
\end{aligned}\right\} \quad (1.18)$$

подчиняющиеся следующим ограничениям:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha(\mu) < \beta(\mu) \ (1 \le \mu \le 2n),\\
&\alpha(\lambda_i) < p_i < \beta(\lambda_i) \ (1 \le i \le k),\\
&\alpha(\Delta(\lambda_i)) < q_i < \beta(\Delta(\lambda_i)) \ (1 \le i \le k),
\end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

где введены постоянно действующие обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&\boxed{\text{н}}(i) = \langle p_i, \lambda_i, q_i \rangle \ (1 \le i \le k),\\
&\Delta(\mu) = \begin{cases} \mu+n, & \text{если } 1 \le \mu \le n\\ \mu-n, & \text{если } n+1 \le \mu \le 2n. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (1.20)$$

Обобщённое уравнение Ω, заданное списком (1.17), содержит в качестве н е и з в е с т н ы х буквы $h_1, h_2, \dots$ $\dots, h_\rho$ и состоит из n уравнений

$$\left.\begin{aligned}&[h_{\alpha(\mu)} h_{\alpha(\mu)+1} \dots h_{\beta(\mu)-1}]^{\varepsilon(\mu)} \rightleftharpoons \\ &\rightleftharpoons [h_{\alpha(\Delta(\mu))} h_{\alpha(\Delta(\mu))+1} \dots h_{\beta(\Delta(\mu))-1}]^{\varepsilon(\Delta(\mu))} \quad (1 \le \mu \le n),\end{aligned}\right\} \qquad (1.21)$$

называемых о с н о в н ы м и , K уравнений $(1 \le i \le K)$

$$\left.\begin{aligned}&[h_{\alpha(\lambda_i)} h_{\alpha(\lambda_i)+1} \dots h_{p_i-1}] \rightleftharpoons \\ &\rightleftharpoons [h_{\alpha(\Delta(\lambda_i))} h_{\alpha(\Delta(\lambda_i))+1} \dots h_{q_i-1}], \text{ если } \varepsilon(\lambda_i) = \varepsilon(\Delta(\lambda_i)), \\ &[h_{\alpha(\lambda_i)} h_{\alpha(\lambda_i)+1} \dots h_{p_i-1}] \rightleftharpoons \\ &\rightleftharpoons [h_{q_i} h_{q_i+1} \dots h_{\beta(\Delta(\lambda_i))-1}]^{-1}, \text{ если } \varepsilon(\lambda_i) = -\varepsilon(\Delta(\lambda_i)),\end{aligned}\right\} \qquad (1.22)$$

называемых г р а н и ч н ы м и и m уравнений

$$h_{i_\ell} = a_{j_\ell}^{\varepsilon_\ell} \quad (1 \le \ell \le m;\ t(\ell) \rightleftharpoons \langle i_\ell, j_\ell, \varepsilon_\ell \rangle), \qquad (1.23)$$

называемых к о э ф ф и ц и е н т н ы м и .

Слова, аналогичные стоящим в (I.2I) и (I.22) в квадратных скобках, будут встречаться нам очень часто, поэтому мы вводим для них специальное сокращение:

$$h[i,j] \rightleftharpoons [h_i h_{i+1} \dots h_{j-1}] \quad (1 \le i < j \le \rho + 1). \qquad (1.24)$$

Р е ш е н и е м $\overline{H}$ обобщённого уравнения Ω называется набор слов $H_1, H_2, \dots, H_\rho$, который при подстановке в (I.2I) , (I.22) и (I.23) обращает их в графические равенства и удовлетворяет следующим у с л о в и я м н е с о к р а т и м о с т и и н е п у с т о т ы :

а/ левые и правые части основных /а, значит, и граничных уравнений после подстановки $\overline{H}$ несократимы,

б/ все слова из набора $\overline{H}$ непусты.

Для обозначения утверждения, что $\overline{H}$ является решением обобщённого уравнения Ω, будет использоваться запись $(\Omega, \overline{H})$.

Если $\overline{\varphi}(\overline{h},\overline{a})=\overline{\psi}(\overline{h},\overline{a})$ - произвольный список уравнений /в частности, список (1.21), (1.22), (1.23) обобщённого уравнения Ω /, то тот же список со звёздочкой наверху /например, Ω^* / будет обозначать систему уравнений в свободной группе следующего вида: $\overline{\varphi}(\overline{h},\overline{a})[\overline{\psi}(\overline{h},\overline{a})]^{-1}=1$.

Очевидно, что если $\overline{H}$ обращает в графическое равенство все уравнения некоторого списка Π, то $\overline{H}$ является решением системы уравнений Π^* /обратное, вообще говоря, неверно/. В частности, любое решение обобщённого уравнения Ω служит решением системы Ω^*.

Целью оставшейся части настоящего параграфа является доказательство следующей леммы.

ЛЕММА I.5. По заданной системе уравнений в свободной группе $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{a})=1$ можно эффективно построить конечное число обобщённых уравнений $\Omega_1,\ldots,\Omega_r$ и гомоморфизмы $\pi_i : G(\overline{\varphi}) \to G(\Omega_i^*)$ так, что для любого решения $\overline{X}$ системы $\overline{\varphi}=1$ существует $i\ (1\le i\le r)$ и решение $\overline{H}$ обобщённого уравнения Ω_i такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} G(\overline{\varphi}) \arrow[rr, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_{\overline{X}}"'] & & G(\Omega_i^*) \arrow[dl, "\pi_{\overline{H}}"] \\ & F_1 & \end{tikzcd} \qquad (1.25)$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем систему $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{a})=1$ в виде

$$\left.\begin{array}{l} r_{11}\, r_{12} \ldots r_{1l_1} = 1, \\ r_{21}\, r_{22} \ldots r_{2l_2} = 1, \\ \quad \ldots \\ r_{m1}\, r_{m2} \ldots r_{ml_m} = 1 \end{array}\right\} \qquad (1.26)$$

где $r_{ij}\ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le l_i)$ - буквы из алфавита $\bar{x}^{\pm1} \cup \bar{a}^{\pm1}$. После добавления к системе $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{a}) = 1$ в случае надобности уравнений вида $x_i \cdot x_i^{-1} = 1$ можно считать, что все неизвестные хотя бы один раз входят в (I.26).

Таблицей разбиения для системы (I.26) назовём набор несократимых слов $\{V_{ij}(z_1, \ldots, z_p) \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le l_i\}$ в алфавите $\{z_1^{\pm1}, \ldots, z_p^{\pm1}\}$, для которого выполнены следующие три условия:

$$\left.\begin{array}{l} \text{а/ в свободной группе с базисом } \bar{z} \text{ выполнены равенства} \\ V_{i1}(\bar{z})\, V_{i2}(\bar{z}) \ldots V_{il_i}(\bar{z}) = 1\ (1 \le i \le m), \\ \text{б/ } \partial(V_{ij}) \le l_i - 1\ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le l_i), \\ \text{в/ если } r_{ij} \in \bar{a}^{\pm1}, \text{ то } \partial(V_{ij}) = 1. \end{array}\right\} \qquad (1.27)$$

Очевидно, что множество всех таблиц разбиения /конечное в силу б// эффективно строится по системе $\bar{\varphi} = 1$.

Таблице разбиения $T = \{V_{ij}\}$ поставим в соответствие обобщённое уравнение Ω_T следующим образом. Обозначим

$$V \doteq V_{11}(\bar{z})\, V_{12}(\bar{z}) \ldots V_{1l_1}(\bar{z})\, V_{21}(\bar{z}) \ldots V_{ml_m}(\bar{z}). \qquad (1.28)$$

Пусть $\rho = \partial(V)$. Уравнение Ω_T содержит ρ неизвестных $h_1, h_2, \ldots, h_\rho$, которым соответствуют буквы слова V. Для любых двух различных вхождений буквы $z_i^{\pm1}\ (1 \le i \le p)$ в слово V введём основное уравнение

$$h_{j_1}^{\varepsilon_1} = h_{j_2}^{\varepsilon_2}, \qquad (1.29)$$

где неизвестные h_{j_1}, h_{j_2} соответствуют выбранным вхождениям буквы $z_i^{\pm 1}$, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - знаки этих вхождений.

Для всех $1 \le i_1, i_2 \le m; 1 \le j_1 \le l_{i_1}; 1 \le j_2 \le l_{i_2}$ таких, что $z_{i_1 j_1}^{\pm 1} = z_{i_2 j_2}^{\pm 1} = x_\kappa$, введём основное уравнение

$$h[\alpha_1, \beta_1]^{\varepsilon_1} = h[\alpha_2, \beta_2]^{\varepsilon_2}, \qquad (1.30)$$

где слова $h[\alpha_1, \beta_1], h[\alpha_2, \beta_2]$ /определённые в (I.24) / соответствуют вхождениям (I.28) слов $V_{i_1 j_1}, V_{i_2 j_2}$ в V, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ определяются по знаку $z_{i_1 j_1}, z_{i_2 j_2}$.

Для всех $1 \le i \le m, 1 \le j \le l_i, 1 \le \kappa \le \omega$ таких, что $z_{ij}^{\pm 1} = a_\kappa$, введём коэффициентное уравнение

$$h_\alpha = a_\kappa^\varepsilon, \qquad (1.31)$$

где h_α соответствует вхождению (I.28) слова V_{ij} в V /$\partial(V_{ij}) = 1$ на основании пункта в/ определения таблицы разбиения/, а ε определяется по знаку z_{ij}.

Обобщённое уравнение Ω_T зададим списком (I.29), (I.30) основных уравнений, пустым списком граничных уравнений и списком (I.3I) коэффициентных уравнений.

Для произвольной буквы x_κ в $\overline{x}$ выберем некоторое вхождение $z_{i_\kappa j_\kappa}$ буквы $x_\kappa^{\varepsilon_\kappa}$ в (I.26). Пусть слово $h[\alpha_\kappa, \beta_\kappa]$ соответствует вхождению (I.28) слова $V_{i_\kappa j_\kappa}$ в V. Определим гомоморфизм $\hat{\hat{\pi}}^T : F(\overline{y}) \to F(\Omega_T^*)$ действием на свободные образующие: $\hat{\hat{\pi}}^T(x_\kappa) = h[\alpha_\kappa, \beta_\kappa]^{\varepsilon_\kappa}$.

Из (I.30) вытекает, что значение $\hat{\hat{\pi}}^T(x_\kappa)$ в группе $H(\Omega_T^*)$ не зависит от выбора вхождения $z_{i_\kappa j_\kappa}$. Отсюда и из (I.3I) находим, что $\hat{\hat{\pi}}^T(r_{ij}) = h[\alpha,\beta]$ в группе $H(\Omega_T^*)$, где слово $h[\alpha,\beta]$ соответствует вхождению V_{ij} в слово V. Использовав соотношения (I.29), получим на основании (I.27) а/, что $\hat{\hat{\pi}}^T(r_{i1}r_{i2}\ldots r_{il_i-1}r_{il_i}) = 1$ в группе $H(\Omega_T^*)$. Поэтому $\hat{\hat{\pi}}^T$ индуцирует гомоморфизм $\hat{\pi}^T: H(\bar{\varphi}) \to H(\Omega_T^*)$. Пусть $\pi^T = F_r(\hat{\pi}^T): G(\bar{\varphi}) \to G(\Omega_T^*)$.

Возьмём теперь в качестве требуемого семейства $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ обобщённых уравнений семейство $\{\Omega_T \mid T$ - таблица разбиения$\}$, а в качестве гомоморфизмов π_i - построенные выше гомоморфизмы π^T. Проверим, что $\{\Omega_T\}$ и $\{\pi^T\}$ обладают требуемым свойством.

Пусть $\bar{X}$ - произвольное решение системы (I.26). Зафиксируем произвольный процесс сокращения левых частей системы (I.26) при подстановке $\bar{X}$ и обозначим через $Z_1^{\pm 1}, Z_2^{\pm 1}, \ldots, Z_p^{\pm 1}$ все непустые слова, по которым происходит сокращение между различными R_{ij1} и R_{ij2}. Тогда для некоторых V_{ij} имеют место графические равенства $R_{ij} \doteq V_{ij}(Z_1, \ldots, Z_p)$. Легко проверяется, что $T = \{V_{ij}(\bar{Z})\}$ является таблицей разбиения. Если неизвестная h_i обобщённого уравнения Ω_T соответствует вхождению буквы z_j^{ε} в слово (I.28), то положим $H_i \doteq Z_j^{\varepsilon}$. Набор $\bar{H} = H_1, \ldots, H_\rho$ является решением обобщённого уравнения Ω_T и, очевидно, $\pi_{\bar{H}}\,\pi^T = \pi_{\bar{X}}$. Лемма I.5 доказана.

ГЛАВА II. Элементарные преобразования и автоморфизмы обобщённых уравнений.

Одним из основных инструментов в главах II и III являются преобразования обобщённых уравнений, под которыми мы понимаем переход от уравнения Ω к конечному списку уравнений $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$, снабжённый сюрьективными гомоморфизмами $\pi_i : G(\Omega^*) \to G(\Omega_i^*) (1 \le i \le r)$. В этой ситуации каждому решению $\overline{H}^{(i)}$ уравнения Ω_i соответствует единственное решение $\overline{H}$ системы Ω^* такое, что $\pi_{\overline{H}} = \pi_{\overline{H}^{(i)}} \pi_i$. Однако мы, вообще говоря, не можем утверждать, что решения обобщённого уравнения Ω, которые можно получить таким способом, исчерпывают все его решения, даже если все π_i являются изоморфизмами. В §I описываются некоторые специальные преобразования, называемые элементарными, для которых такое утверждение справедливо. В §§2-4 мы исследуем обобщённые уравнения Ω некоторого специального вида, причём в каждом случае с Ω^* связываются канонические группы автоморфизмов группы $G(\Omega^*)$ и исследуются их свойства. Результаты этих параграфов являются "заготовкой" для следующей главы.

§I. Элементарные преобразования.

Начнём с некоторых определений, полученных модификацией определений стр. I208-I209 работы [I2] .

Пусть Ω - обобщённое уравнение, заданное списком (I.I7) . О с н о в о й назовём натуральное число $\mu (1 \le \mu \le 2n)$, естественным образом связанное с левой или правой частью основного уравнения (I.2I) с номером μ . Г р а н и ц е й назовём число

$i\,(1\le i\le g+1)$, соответствующее "границе" между неизвестными h_{i-1} и h_i . Граничной связью называется тройка $\boxed{\mathrm{I}}(i)\,(1\le i\le K)$, соответствующая граничному уравнению (1.22) с номером i ; граничная связь (p,λ,q) относится к паре основ $(\lambda,\Delta(\lambda))$.

Неизвестная h_i принадлежит основе $\mu\ (h_i\in\mu)$, если $\alpha(\mu)\le i\le\beta(\mu)-1$. Неизвестную назовём фиктивной, если она не принадлежит ни одной основе /но может входить в коэффициентные уравнения/. Основы μ и η пересекаются, если существует неизвестная, принадлежащая одновременно μ и η .

Граница i пересекает основу μ , если $\alpha(\mu)<i<\beta(\mu)$. Граница i касается основы μ, если $i=\alpha(\mu)$ или $i=\beta(\mu)$. Граница i касается коэффициентного уравнения $h_{i'}=a_j^{\varepsilon}$, если $i=i'$ или $i=i'+1$. Граница называется открытой, если она пересекает хотя бы одну основу и закрытой - в противном случае. Граница i связана граничной связью (p,λ,q) , если $i=p$ или $i=q$. Граница называется свободной, если она не касается ни одной основы и не связана ни одной граничной связью.

Множество неизвестных $\{h_i,h_{i+1},\dots,h_{j-1}\}$ называется участком и обозначается через $[i,j]$. Участок $[i,j]$ называется закрытым, если границы i и j - закрытые, а все границы $i+1,i+2,\dots,j-1$ - открытые. Основа μ принадлежит участку $[i,j]$ $/\mu\in[i,j]/$, если $i\le\alpha(\mu)<\beta(\mu)\le j$.

Основа $\Delta(\mu)$ называется двойником основы μ . Пара основ-двойников $(\mu,\Delta(\mu))$ называется совмещённой, если $\alpha(\mu)=\alpha(\Delta(\mu))$.

Сформулируем теперь некоторые необходимые условия наличия у обобщённого уравнения (1.17) хотя бы одного решения:

а/ если $\varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu))$, то основы μ и $\Delta(\mu)$ не пересекаются;

б/ если (p,λ,q) и (p_1,λ,q_1) - две граничные связи, то $p\leq p_1 \equiv q\leq q_1$ в случае $\varepsilon(\lambda)=\varepsilon(\Delta(\lambda))$ и $p\leq p_1\equiv q\geq q_1$ в случае $\varepsilon(\lambda)=-\varepsilon(\Delta(\lambda))$;

в/ если пара основ $(\mu,\Delta(\mu))$ совмещённая, то $\beta(\mu)=\beta(\Delta(\mu))$;

г/ если пара основ $(\mu,\Delta(\mu))$ совмещённая и (p,μ,q) - граничная связь, то $p=q$;

д/ ни одна неизвестная не может входить в два различных коэффициентных уравнения;

е/ пусть h_i - неизвестная, входящая в некоторое коэффициентное уравнение; $(i,\mu,q_1),(i+1,\mu,q_2)$ - граничные связи. Тогда $|q_1-q_2|=1$ /здесь мы допускаем также "вырожденные" граничные связи $(\alpha(\mu),\mu,\alpha(\Delta(\mu)));(\beta(\mu),\mu,\beta(\Delta(\mu)))$, если $\varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu))$ и $(\alpha(\mu),\mu,\beta(\Delta(\mu)));(\beta(\mu),\mu,\alpha(\Delta(\mu)))$, если $\varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu))$.

Обобщённое уравнение, удовлетворяющее условиям а/-е/, назовём **с о в м е с т н ы м**. Таким образом, обобщённое уравнение, имеющее хотя бы одно решение, является совместным.

Э л е м е н т а р н ы м п р е о б р а з о в а н и е м совместного обобщённого уравнения Ω мы называем набор $\Omega_1,\dots,\Omega_r$ обобщённых уравнений и набор <u>сюрьективных</u> гомоморфизмов $\theta_i: G(\Omega^*)\to G(\Omega_i^*)\ (1\leq i\leq r)$ такие, что для каждой пары $(\Omega,\bar{H})$ существует и единственна пара вида $(\Omega_i,\bar{H}^{(i)})$, для которой диаграмма

$$\begin{tikzcd} G(\Omega^*) \arrow[rr, "\Theta_i"] \arrow[dr, "\pi_{\overline{H}}"'] & & G(\Omega_i^*) \arrow[dl, "\pi_{\overline{H}^{(i)}}"] \\ & F_1 & \end{tikzcd} \qquad (2.1)$$

коммутативна /напомним, что в §3 гл. I мы условились с помощью записи $(\Omega, \overline{H})$ обозначать, что $\overline{H}$ является решением обобщённого уравнения Ω /. Если диаграмма 2.I коммутативна, будем обозначать $(\Omega_i, \overline{H}^{(i)})$ через $e(\Omega, \overline{H})$; таким образом, e является корректно определённой функцией на множестве всех пар вида $(\Omega, \overline{H})$.

Нам понадобятся 6 типов элементарных преобразований Э.I-Э.6. Элементарные преобразования Э.I-Э.4 строятся следующим образом. Для них набор $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ в определении элементарного преобразования состоит из единственного уравнения Ω_1 , причём списки неизвестных Ω_1 и исходного уравнения Ω совпадают. Кроме того, всякое решение $\overline{H}$ уравнения Ω является решением Ω_1 , а системы уравнений Ω^* и Ω_1^* эквивалентны; ниже мы опускаем простую проверку этих двух фактов. Отсюда вытекает, что тождественный изоморфизм $\hat{\hat{\Theta}}_1 : F(\Omega^*) \to F(\Omega_1^*)$ индуцирует изоморфизм $\Theta_1 : G(\Omega^*) \to G(\Omega_1^*)$ с требуемым свойством, при этом $e(\Omega, \overline{H}) = (\Omega_1, \overline{H})$.

Э.1. <u>Удаление двойственной граничной связи.</u>

Граничная связь (p, λ, q) называется **двойственной** к граничной связи $(q, \Delta(\lambda), p)$. Преобразование Э.I применяется к обобщённому уравнению, содержащему пару двойственных граничных связей $(p, \lambda, q), (q, \Delta(\lambda), p)$ и заключается в удалении граничной связи (p,λ,q).

Э.2. <u>Разрезание основы</u> λ.

Преобразование Э.2 применяется к совместному обобщённому уравнению Ω, содержащему граничную связь (p,λ,q) и не содержащему двойственной к ней граничной связи. Выпишем соответствующее граничное уравнение

$$h[\alpha(\lambda),p]=\begin{cases} h[\alpha(\Delta(\lambda)),q], & \text{если } \varepsilon(\lambda)=\varepsilon(\Delta(\lambda)),\\ h[q,\beta(\Delta(\lambda))]^{-1}, & \text{если } \varepsilon(\lambda)=-\varepsilon(\Delta(\lambda))\end{cases} \tag{2.2}$$

и основное уравнение с номером λ:

$$h[\alpha(\lambda),\beta(\lambda)]^{\varepsilon(\lambda)}=h[\alpha(\Delta(\lambda)),\beta(\Delta(\lambda))]^{\varepsilon(\Delta(\lambda))}. \tag{2.3}$$

Обобщённое уравнение Ω_1 получается из Ω за два шага. Первый шаг состоит в замене уравнения (2.3) на новое уравнение

$$h[p,\beta(\lambda)]=\begin{cases} h[q,\beta(\Delta(\lambda))], & \text{если } \varepsilon(\lambda)=\varepsilon(\Delta(\lambda)),\\ h[\alpha(\Delta(\lambda)),q]^{-1}, & \text{если } \varepsilon(\lambda)=-\varepsilon(\Delta(\lambda)),\end{cases} \tag{2.4}$$

которое объявляется основным и заносится в список (I.2I) вместо (2.3). Кроме того, уравнение (2.2) переносится из списка граничных уравнений в список основных.

Второй шаг заключается в корректировке граничных связей вида (p',λ,q'), $(q',\Delta(\lambda),p')$, отличных от (p,λ,q) /и отличных от $(q,\Delta(\lambda),p)$, так как, по предположению, $(q,\Delta(\lambda),p)$ не входит в Ω /. Разберём лишь случай $\varepsilon(\lambda)=\varepsilon(\Delta(\lambda))$ и корректировки граничной связи вида (p',λ,q') ; оставшиеся случаи разбираются аналогично. В силу пункта б/ определения совместности, возможны два подслучая: $p'<p, q'<q$ и $p<p', q<q'$. Если $p'<p, q'<q$, то граничную связь (p', λ, q') оставим без изменения и отнесём её к новой основе, соответствующей уравнению (2.2). Если же $p<p', q<q'$, то введём новое граничное уравнение $h[p,p']=h[q,q']$ /относящееся к основному уравнению (2.4) / и заменим (p', λ, q') на новую граничную связь, соответствующую только что введённому уравнению.

Построение обобщённого уравнения Ω_1 завершено.

Если Ω - обобщённое уравнение, то через $\tilde{\Omega}$ будет обозначаться обобщённое уравнение, полученное из Ω последовательным применением всевозможных преобразований Э.2 /очевидно, $\tilde{\Omega}$ не зависит от порядка выполнения этих преобразований/. Тождественный изоморфизм между $F(\Omega^*)$ и $F(\tilde{\Omega}^*)$ индуцирует изоморфизм между $G(\Omega^*)$ и $G(\tilde{\Omega}^*)$.

Э.3. <u>Перенос основы</u> Θ <u>с основы</u> μ <u>на основу</u> $\Delta(\mu)$.

Пусть совместное обобщённое уравнение Ω не содержит двойственных граничных связей и основы μ, Θ таковы, что $\alpha(\mu) \le \alpha(\Theta) < \beta(\Theta) \le \beta(\mu)$. Обозначим $p=\alpha(\Theta)-\alpha(\mu)$; $q=\beta(\Theta)-\alpha(\mu)$. Допустим также, что для всех $p \le i \le q$ есть граничная связь вида $(\alpha(\mu)+i, \mu, \eta(i))$, за исключением случаев $i=0$ и $i=\beta(\mu)-\alpha(\mu)$. В случае необходимости доопределим η следующим образом:

$$\eta(0)=\begin{cases} \alpha(\Delta(\mu)), & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)), \\ \beta(\Delta(\mu)), & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)), \end{cases}$$

$$\eta(\beta(\mu)-\alpha(\mu))=\begin{cases} \beta(\Delta(\mu)), & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)), \\ \alpha(\Delta(\mu)), & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)). \end{cases}$$

Таким образом, Ω заведомо содержит два основных уравнения

$$\left.\begin{aligned} h[\alpha(\mu),\beta(\mu)]^{\varepsilon(\mu)} &= h[\alpha(\Delta(\mu)),\beta(\Delta(\mu))]^{\varepsilon(\Delta(\mu))}, \\ h[\alpha(\Theta),\beta(\Theta)]^{\varepsilon(\Theta)} &= h[\alpha(\Delta(\Theta)),\beta(\Delta(\Theta))]^{\varepsilon(\Delta(\Theta))} \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

и следующие граничные уравнения:

$$h[\alpha(\mu),\alpha(\mu)+i] = \begin{cases} h[\alpha(\Delta(\mu)),\gamma(i)], & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)), \\ h[\gamma(i),\beta(\Delta(\mu))]^{-1}, & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)). \end{cases} \quad (2.6)$$

$$(p \le i \le q;\ i \ne 0,\ i \ne \beta(\mu)-\alpha(\mu)).$$

При $i=0$ соответствующее уравнение (2.6) имеет пустую левую и правую часть, а при $i=\beta(\mu)-\alpha(\mu)$ совпадает с первым уравнением в (2.5), поэтому их можно формально считать включёнными в (2.6).

При выполнении этих условий к уравнению Ω применимо элементарное преобразование Э.3. Уравнение Ω_1, как и в предыдущем случае, получается за два шага. Первый шаг состоит в том, что значения $\alpha(\Theta), \beta(\Theta), \varepsilon(\Theta)$ изменяются на $\gamma(p), \gamma(q)$, $\varepsilon(\mu)\cdot\varepsilon(\Theta)\cdot\varepsilon(\Delta(\mu))$ соответственно, т.е. второе уравнение в (2.5) заменяется на следующее:

$$h[\gamma(p),\gamma(q)]^{\varepsilon(\mu)\varepsilon(\Theta)\varepsilon(\Delta(\mu))} = h[\alpha(\Delta(\Theta)),\beta(\Delta(\Theta))]^{\varepsilon(\Delta(\Theta))}. \quad (2.7)$$

Второй шаг состоит в том, что вместо граничных связей вида $(\alpha(\mu)+j, \Theta, w(j))$ или вида $(w(j), \Delta(\Theta), \alpha(\mu)+j)$, где $p<j<q$; $\alpha(\Delta(\Theta)) < w(j) < \beta(\Delta(\Theta))$ вводятся новые граничные связи, соответствующие граничным уравнениям

$$h[\gamma(p),\gamma(j)] = \begin{cases} h[\alpha(\Delta(\Theta)),w(j)], & \text{если } \varepsilon(\mu)\varepsilon(\Theta)\varepsilon(\Delta(\mu))=\varepsilon(\Delta(\Theta)), \\ h[w(j),\beta(\Delta(\Theta))]^{-1}, & \text{если } \varepsilon(\mu)\varepsilon(\Theta)\varepsilon(\Delta(\mu))=-\varepsilon(\Delta(\Theta)), \end{cases}$$

которые относятся к основе, соответствующей новому основному уравнению (2.7).

При проверке того, что всякое решение уравнения Ω является решением уравнения Ω_1, а системы Ω^* и Ω_1^* эквивалентны, следует учитывать наличие в Ω всех уравнений (2.5), (2.6).

Э.4. Удаление пары совмещённых основ $(\mu, \Delta(\mu))$.

Пусть совместное обобщённое уравнение содержит пару совмещённых основ $(\mu, \Delta(\mu))$. Из пунктов а/ и в/ определения совместных уравнений вытекает, что $\varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu))$ и $\beta(\mu)=\beta(\Delta(\mu))$, а из пункта г/ - что все граничные связи, относящиеся к паре $(\mu, \Delta(\mu))$, имеют вид (p,μ,p) или $(p,\Delta(\mu),p)$. Уравнение Ω_1 получается из Ω удалением пары основ $(\mu, \Delta(\mu))$ вместе со всеми относящимися к ней граничными связями.

Оставшиеся два элементарных преобразования существенно изменяют список неизвестных.

Э.5. Удаление одиночной основы μ.

Преобразование Э.5 применяется к совместному обобщённому уравнению Ω, не содержащему двойственных граничных связей, если выполняются следующие два условия:

а/ основа μ не пересекается с другими основами,

б/ для всех $i\ (1 \le i \le \beta(\mu)-\alpha(\mu)-1)$ существует граничная связь вида $(\alpha(\mu)+i, \mu, w(i))$.

Доопределим функцию w следующим образом:

$$w(0)=\begin{cases}\alpha(\Delta(\mu)), & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)),\\ \beta(\Delta(\mu)), & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)),\end{cases}$$

$$w(\beta(\mu)-\alpha(\mu))=\begin{cases}\beta(\Delta(\mu)), \text{ если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)),\\ \alpha(\Delta(\mu)), \text{ если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)).\end{cases}$$

Из пункта б/ определения совместного уравнения вытекает, что w — строго возрастающая функция при $\varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu))$ и строго убывающая при $\varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu))$, а из пункта е/ вытекает, что если неизвестная $h_i\ (\alpha(\mu)\leq i\leq\beta(\mu)-1)$ входит в коэффициентное уравнение, то $|w(i+1)-w(i)|=1$.

Преобразование Э.5 переводит Ω в единственное обобщённое уравнение Ω_1, которое получается из Ω удалением пары основ $(\mu,\Delta(\mu))$, всех относящихся к ней граничных связей и всех принадлежащих основе μ неизвестных, и последующей заменой всех коэффициентных уравнений вида $h_{\alpha(\mu)+i-1}=a_j^{\varepsilon}\ (1\leq i\leq\beta(\mu)-\alpha(\mu))$ на коэффициентные уравнения вида

$$\begin{cases}h_{w(i-1)}=a_j^{\varepsilon}, \text{ если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)),\\ h_{w(i)}=a_j^{-\varepsilon}, \text{ если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)).\end{cases}$$

Определим гомоморфизм $\hat{\hat{\Theta}}_1: F(\Omega^*)\to F(\Omega_1^*)$ действием на свободные образующие следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\hat{\Theta}}_1(h_j)=h_j, \text{ если } h_j\notin\mu,\\ \hat{\hat{\Theta}}_1(h_{\alpha(\mu)+i-1})=\begin{cases}h[w(i-1),w(i)], \text{ если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)),\\ h[w(i),w(i-1)]^{-1}, \text{ если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)).\end{cases}\\ \qquad (1\leq i\leq\beta(\mu)-\alpha(\mu)).\end{array}\right\}\quad(2.8)$$

Нетрудно проверить, что $\hat{\hat{\Theta}}_1$ переводит основное уравнение с номером μ и относящиеся к нему граничные уравнения /рассматриваемые как уравнения в свободной группе/ в единицу. Кроме того, если $h_{\alpha(\mu)+i-1}=a_j^{\varepsilon}$ - коэффициентное уравнение, то, как отмечалось

выше, $|w(i+1)-w(i)|=1$ и, значит,
$\widehat{\widehat{\Theta}}_1(h_{\alpha(\mu)+i-1})=\begin{cases} h_{w(i-1)}, & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)) \\ h^{-1}_{w(i)}, & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu))\end{cases}$. Таким образом, $\widehat{\widehat{\Theta}}_1$ индуцирует гомоморфизм $\Theta_1: G(\Omega^*)\to G(\Omega_1^*)$, очевидно, сюръективный. Более того, если определить гомоморфизм $\widehat{\widehat{\Theta}}: F(\Omega_1^*)\to F(\Omega^*)$ формулой $\widehat{\widehat{\Theta}}(h_j)=h_j$ и обозначить через $\Theta: G(\Omega_1^*)\to G(\Omega^*)$ индуцированный гомоморфизм, то из соотношений $h_{\alpha(\mu)+i-1}=\begin{cases} h[w(i-1),w(i)], & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)), \\ h[w(i),w(i-1)]^{-1}, & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu))\end{cases}$ в группе $G(\Omega^*)$ вытекает, что $\Theta\Theta_1=\Theta_1\Theta=id$, т.е. Θ_1 - изоморфизм.

Если $\overline{H}$ - решение обобщённого уравнения Ω_1, то из основного уравнения с номером μ и относящихся к нему граничных уравнений вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} H_{\alpha(\mu)+i-1} &\overset{\circ}{=}\begin{cases} H[w(i-1),w(i)], & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)), \\ H[w(i),w(i-1)]^{-1}, & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu))\end{cases} \\ &(1\le i\le \beta(\mu)-\alpha(\mu)). \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

Поэтому вектор $\overline{H}^{(1)}$, полученный из $\overline{H}$ удалением компонент $H_{\alpha(\mu)+i-1}$ $(1\le i\le\beta(\mu)-\alpha(\mu))$, является решением обобщённого уравнения Ω_1 таким, что диаграмма (2.I) коммутативна. Единственность решения $\overline{H}^{(1)}$ вытекает из сюръективности Θ_1.

Э.6. <u>Продолжение</u> <u>границы</u> p <u>через</u> <u>основу</u> μ.

Пусть граница p пересекает основу μ совместного обобщённого уравнения Ω и Ω не содержит никакой граничной связи вида (p,μ,q). Элементарное преобразование Э.6 состоит во введении такой граничной связи.

Положим $j = \beta(\Delta(\mu)) - \alpha(\Delta(\mu)) - 1$. Список уравнений $\Omega_1, \ldots, \Omega_z$ в определении элементарного преобразования состоит /до вычёркивания из него несовместных обобщённых уравнений/ из $j + j'$ уравнений, где j' - количество неизвестных, принадлежащих основе $\Delta(\mu)$ и не входящих в коэффициентные уравнения.

Начнём с построения первых j уравнений.

$\Omega_i \ (1 \leq i \leq j)$ получается из Ω добавлением граничной связи $(p, \mu, \alpha(\Delta(\mu)) + i)$. Очевидно, тождественный изоморфизм $\hat{\hat{\Theta}}_i : F(\Omega^*) \to F'(\Omega_i^*)$ индуцирует сюрьективный гомоморфизм $\Theta_i : G(\Omega^*) \to G(\Omega_i^*)$. Если решение $\bar{H}$ обобщённого уравнения Ω таково, что выполнено графическое равенство

$$\left.\begin{aligned} &H[\alpha(\mu), p] \doteq H[\alpha(\Delta(\mu)), \alpha(\Delta(\mu)) + i], \text{ если } \varepsilon(\mu) = \varepsilon(\Delta(\mu)), \\ &H[\alpha(\mu), p] \doteq H[\alpha(\Delta(\mu)) + i, \beta(\Delta(\mu))]^{-1}, \text{ если } \varepsilon(\mu) = -\varepsilon(\Delta(\mu)), \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

то $\bar{H}$ служит решением обобщённого уравнения Ω_i и диаграмма (2.1) при $\bar{H}^{(i)} = \bar{H}$ коммутативна. Обратно, если для некоторой пары $(\Omega_i, \bar{H}^{(i)})$ диаграмма (2.1) коммутативна, то $\bar{H}^{(i)} = \bar{H}$ и выполнены графические равенства (2.10).

Перейдём теперь к построению оставшихся обобщённых уравнений $\Omega_{j+1}, \ldots, \Omega_{j+j'}$. Пусть $h_{q_1}, h_{q_2}, \ldots, h_{q_{j'}}$ - неизвестные, принадлежащие основе $\Delta(\mu)$ и не входящие в коэффициентные уравнения. Уравнение $\Omega_{j+i} \ (1 \leq i \leq j')$ получается из уравнения Ω следующим образом.

Заменим неизвестную h_{q_i} на две новых неизвестных h' и h''. Во всех основных и граничных уравнениях обобщённого уравнения Ω осуществим подстановку $h_{q_i} \mapsto h'h''$. После этого добавим новое граничное уравнение

$$h[\alpha(\mu),p]=\begin{cases} h[\alpha(\Delta(\mu)),q_i]h', & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)),\\ \left(h''h[q_i+1,\beta(\Delta(\mu))]\right)^{-1}, & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)),\end{cases} \qquad (2.11)$$

которое отнесём к основе μ. Полученное обобщённое уравнение обозначим через Ω_{j+i}.

Определим гомоморфизм $\hat{\hat{\Theta}}_{i,j}: F(\Omega^*)\to F(\Omega^*_{j+i})$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\hat{\Theta}}_{j+i}(h_k)=h_k, \text{ если } k\neq q_i,\\ &\hat{\hat{\Theta}}_{j+i}(h_{q_i})=h'h''. \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

В силу построения Ω_{j+i}, $\hat{\hat{\Theta}}_{j+i}$ индуцирует гомоморфизм $\Theta_{j+i}: G(\Omega^*)\to G(\Omega^*_{j+i})$. Докажем, что на самом деле Θ_{j+i} является изоморфизмом.

Заметим вначале, что хотя бы один из участков $[\alpha(\mu),p]$ и $[p,\beta(\mu)]$ не содержит неизвестной h_{q_i}. Разберём случай, когда неизвестную h_{q_i} не содержит первый участок и $\varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu))$ /остальные случаи аналогичны этому/. Определим гомоморфизм $\hat{\hat{\Theta}}: F(\Omega_{i+j})\to F(\Omega^*)$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\hat{\Theta}}(h')=h[\alpha(\Delta(\mu)),q_i]^{-1}h[\alpha(\mu),p],\\ &\hat{\hat{\Theta}}(h'')=h[\alpha(\mu),p]^{-1}h[\alpha(\Delta(\mu)),q_i+1],\\ &\hat{\hat{\Theta}}(h_k)=h_k \text{ для остальных } k. \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

Тогда уравнение $(2.11)^*$ переводится гомоморфизмом $\hat{\hat{\Theta}}$ в единицу, кроме того $\hat{\hat{\Theta}}(h'h'')=h_{q_i}$. Поэтому $\hat{\hat{\Theta}}$ индуцирует гомоморфизм $\Theta: G(\Omega^*_{i+j})\to G(\Omega^*)$. Простое вычисление показывает, что $\Theta\Theta_{j+i}=\Theta_{j+i}\Theta=id$, поэтому Θ и Θ_{j+i} – взаимно обратные изоморфизмы.

Пусть теперь решение $\overline{H}$ обобщённого уравнения Ω таково, что для некоторых непустых слов H', H'', удовлетворяющих соотношению $H_{q_i} \overset{\circ}{=} H'H''$, выполнено графическое равенство

$$H[\alpha(\mu),p] \overset{\circ}{=} \begin{cases} H[\alpha(\Delta(\mu)), q_i]\, H', & \text{если } \varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu)), \\ \left(H''\, H[q_i+1, \beta(\Delta(\mu))]\right)^{-1}, & \text{если } \varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu)). \end{cases} \tag{2.14}$$

Через $\overline{H}^{(i+j)}$ обозначим список слов, полученный из $\overline{H}$ удалением слова H_{q_i} и введением слов H', H'' /в качестве значений для переменных h', h'' /. Тогда $\overline{H}^{(i+j)}$ будет решением уравнения Ω_{i+j}, для которого диаграмма (2.1) коммутативна. Обратно, если диаграмма (2.1) коммутативна для некоторых пар $(\Omega, \overline{H})$ и $(\Omega_{i+j}, \overline{H}^{(i+j)})$, то из (2.12) вытекает, что $\overline{H}$ и $\overline{H}^{(i+j)}$ имеют только что описанный вид.

Осталось заметить, что для любого решения $\overline{H}$ обобщённого уравнения Ω выполнено в точности одно из равенств (2.10), (2.14), причём в случае (2.14) $\partial(H_{q_i}) > 1$ и, стало быть, неизвестная h_{q_i} не может входить в коэффициентные уравнения. Таким образом, описанная конструкция в самом деле является элементарным преобразованием.

Отметим, что если Ω_i получается из Ω некоторым элементарным преобразованием Э.1-Э.6, то мы всегда имеем гомоморфизм $\hat{\theta}_i : H(\Omega_i^*) \to H(\Omega^*)$, который индуцирует гомоморфизм $\theta_i : G(\Omega_i^*) \to G(\Omega^*)$ и, так же, как и $\hat{\theta}_i$, является изоморфизмом в случае преобразований Э.1-Э.5, а также в случае преобразования Э.6, вводящего новую границу.

Зафиксируем теперь ещё один в с п о м о г а т е л ь н ы й а л ф а в и т $\Sigma_2 = \{u_1^{\pm 1}, \ldots, u_r^{\pm 1}, \ldots\}$. Начиная с этого места, мы будем рассматривать решения систем уравнений и обобщённых уравнений в расширенном алфавите $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Все рассмотрения настоящего параграфа, разумеется, остаются в силе для этого случая, если группу F_1 заменить на группу F_2 с базисом $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Пусть дана некоторая пара $(\Omega, \bar{H})$. Таблицей сокращения $T(\bar{H})$ решения $\bar{H}$ назовём множество слов

$$T(\bar{H}) \rightleftharpoons \{ h_i^{\varepsilon} h_j^{\delta} \mid 1 \le i, j \le \rho;\ \varepsilon, \delta = \pm 1;\ H_i^{\varepsilon} H_j^{\delta} \text{ сократимо} \}.$$

Очевидно, количество различных таблиц сокращения решений $\bar{H}$ обобщённого уравнения с ρ неизвестными не превосходит $2^{(4\rho^2)}$.

Пусть P - группа автоморфизмов группы $G(\Omega^*)$; $\bar{H}^{(1)}$, $\bar{H}^{(2)}$ - два решения обобщённого уравнения Ω. Мы будем писать $\bar{H}^{(1)} \lessdot_P \bar{H}^{(2)}$, если выполнены следующие два утверждения:

а/ $T(\bar{H}^{(1)}) \subseteq T(\bar{H}^{(2)})$,

б/ существует эндоморфизм π группы F_2 /такой, что $\pi(\bar{a}) = \bar{a}$ / и автоморфизм $\sigma \in P$ такие, что

$$\pi_{\bar{H}^{(2)}} = \pi \pi_{\bar{H}^{(1)}} \sigma. \qquad (2.15)$$

Отношение $\lessdot_P$ транзитивно. Назовём решение $\bar{H}$ обобщённого уравнения Ω минимальным относительно группы P, если не существует решения $\bar{H}^+$ уравнения Ω такого, что $\bar{H}^+ \lessdot_P \bar{H}$; $\partial(H_k^+) \le \partial(H_k)$ для всех k /$1 \le k \le \rho$/, причём хотя бы для одного k это неравенство строгое.

ЛЕММА 2.1. Пусть Ω_1 получается из Ω некоторым элементарным преобразованием Э.1-Э.6, причём соответствующий гомоморфизм $\Theta: G(\Omega^*) \to G(\Omega_1^*)$ является изоморфизмом. Пусть P - некоторая группа автоморфизмов группы $G(\Omega^*)$ и $e(\Omega, \bar{H}) = (\Omega_1, \bar{H}^{(1)})$. Тогда:

а/ если решение $\overline{H}$ минимально относительно группы P, то решение $\overline{H}^{(1)}$ минимально относительно группы $\Theta P \Theta^{-1}$,

б/ если рассматриваемое преобразование имеет тип Э.5, то справедливо и обратное утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а/ Пусть решение $\overline{H}^{(1)}$ не является минимальным относительно $\Theta P \Theta^{-1}$, т.е. найдётся пара $(\Omega_1, \overline{H}^{+(1)})$ такая, что $\overline{H}^{+(1)} \lessdot_{\Theta P \Theta^{-1}} \overline{H}^{(1)}$; $\partial(H_k^{+(1)}) \leq \partial(H_k^{(1)})$ для всех k, причём хотя бы для одного k это неравенство строгое. Определим решение $\overline{H}^{+}$ системы уравнений Ω^* равенством $\pi_{\overline{H}^+} = \pi_{\overline{H}^{+(1)}} \Theta$. Просматривая определения гомоморфизмов Θ_i для различных элементарных преобразований, легко видеть, что Θ индуцируется гомоморфизмом $\hat{\Theta}: F(\Omega^*) \to F(\Omega_1^*)$ таким, что если $\hat{\Theta}(h_k) = h_{j_1}^{\pm 1} h_{j_2}^{\pm 1} \ldots h_{j_s}^{\pm 1}$, то

$$H_k \overset{\circ}{=} (H_{j_1}^{(1)})^{\pm 1} (H_{j_2}^{(1)})^{\pm 1} \ldots (H_{j_s}^{(1)})^{\pm 1}. \tag{2.16}$$

Так как $T(\overline{H}^{+(1)}) \subseteq T(\overline{H}^{(1)})$, то

$$H_k^+ \overset{\circ}{=} (H_{j_1}^{+(1)})^{\pm 1} (H_{j_2}^{+(1)})^{\pm 1} \ldots (H_{j_s}^{(1)})^{\pm 1} \tag{2.17}$$

и $T(\overline{H}^+) \subseteq T(\overline{H})$. Отсюда вытекает, что $\overline{H}^+$ на самом деле является решением обобщённого уравнения Ω.

Далее, $\overline{H}^+ \lessdot_P \overline{H}$. Действительно, пункт а/ определения уже проверен, а равенство (2.15) вытекает из аналогичного равенства для решений $\overline{H}^{+(1)}, \overline{H}^{(1)}$. Наконец, из (2.16), (2.17) вытекает, что $\partial(H_k^+) \leq \partial(H_k)$ для всех k, причём неравенство строгое для того k, для которого правые части (2.16), (2.17) содержат слова H_j такие, что $\partial(H_j^{+(1)}) < \partial(H_j^{(1)})$. Это противоречит минимальности решения $\overline{H}$ относительно P.

б/ Доказательство совершенно аналогично пункту а/. Единственное нетривиальное дополнительное замечание состоит в том, что если в случае Э.5 $e(\Omega, \bar{H}) = (\Omega_1, \bar{H}^{(1)})$, $e(\Omega, \bar{H}^+) = (\Omega_1, \bar{H}^{+(1)})$ и $\partial(H_K^{(1)}) = \partial(H_K^{+(1)})$ для всех K, то $\partial(H_K) = \partial(H_K^+)$ для всех K в силу (2.9).

§2. Автоморфизмы, инвариантные относительно ядра.

Если Ω - обощённое уравнение, то через γ_i будем обозначать количество основ, которым принадлежит неизвестная h_i.

В настоящем параграфе мы покажем, как любому обобщённому уравнению Ω ставится в соответствие некоторая канонческая группа автоморфизмов типа I группы $G(\Omega^*)$ /лемма 2.5/. Предположим вначале, что уравнение Ω не содержит граничных связей. Назовём основу μ элиминируемой в уравнении Ω, если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

а/ найдётся неизвестная h_i такая, что $h_i \in \mu$ и $\gamma_i = 1$ и h_i не входит в коэффициентные уравнения;

б/ хотя бы одна из границ $\alpha(\mu), \beta(\mu)$ отлична от $1, \rho+1$, не касается основ, отличных от μ и не касается ни одного коэффициентного уравнения.

Рассмотрим произвольную последовательность вида

$$\Omega = \Omega_0 \to \Omega_1 \to \ldots \to \Omega_\ell, \qquad (2.18)$$

в которой Ω_{i+1} получено из Ω_i удалением некоторой основы μ_{i+1}, элиминируемой в уравнении Ω_i, вместе с её двойником $\Delta(\mu_{i+1})$, а уравнение Ω_ℓ уже не содержит элиминируемых основ.

ЛЕММА 2.2. Заключительное уравнение Ω_ℓ последовательности

(2.18) зависит лишь от Ω и не зависит от выбора последовательности (2.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана другая последовательность

$$\Omega = \Omega_0 \to \Omega_1' \to \ldots \to \Omega_{\ell'}' \qquad (2.19)$$

с теми же свойствами и $\Omega_\ell \neq \Omega_{\ell'}'$. Не ограничивая общности, можно считать, что пара основ $(\mu, \Delta(\mu))$ входит в Ω_ℓ, но не входит в $\Omega_{\ell'}'$. Пусть пара основ $(\mu, \Delta(\mu))$ удаляется в (2.19) при переходе $\Omega_k' \to \Omega_{k+1}'$. Можно считать, что k с такими свойствами выбрано минимально возможным. Тогда множество основ уравнения Ω_ℓ содержится в множестве основ уравнения Ω_k', откуда вытекает, что μ элиминируема в Ω_ℓ. Это противоречит определению последовательности (2.18). Лемма 2.2 доказана.

Заключительное уравнение Ω_ℓ в (2.18) будем называть ядром уравнения Ω и обозначать через $Ker(\Omega)$. Скажем, что неизвестная h_i принадлежит ядру, /$h_i \in Ker(\Omega)$/, если h_i принадлежит хотя бы одной основе из $Ker(\Omega)$ или входит хотя бы в одно коэффициентное уравнение.

Зафиксируем произвольную последовательность вида (2.18). Пусть $\mu_i \ (1 \le i \le \ell)$ - элиминируемая в Ω_{i-1} основа, которая удаляется при переходе $\Omega_{i-1} \to \Omega_i$. Если основа μ_i удовлетворяет пункту а/ определения элиминируемой основы, т.е. некоторая неизвестная принадлежит единственной основе μ_i и не входит в коэффициентные уравнения, то положим t_i равным этой неизвестной. Аналогично, если μ_i удовлетворяет пункту б/ определения элиминируемой основы, положим t_i равным соответствующей границе. Если t_i можно определить несколькими способами, выбираем один из них произвольным образом.

Пусть $T \rightleftharpoons \{t_1, \ldots, t_\ell\}$ - полученное множество неизвестных и границ. Рассмотрим неориентированный граф $\Gamma = (\bar{h}, E)$, где $\bar{h}$ - множество всех неизвестных и $E \rightleftharpoons \{(h_{i-1}, h_i) \mid i$ - граница из множества $T\}$. Очевидно, компоненты связности этого графа являются участками уравнения Ω.

ЛЕММА 2.3. а/ $|T| = \ell$,

б/ всякий участок V вида $[\alpha(\mu), \beta(\mu)]$, где μ - основа уравнения $Ker(\Omega)$ или вида $[i, i+1]$, где h_i входит в коэффициентные уравнения, является объединением компонент связности графа Γ,

в/ если V - компонента связности графа Γ, то T и V содержат не более одной общей неизвестной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а/ Непосредственно из определения элиминируемой основы вытекает, что $t_i \neq t_j$, если $i \neq j$.

б/ Пусть (h_{i-1}, h_i) - ребро графа Γ; $i = t_j$ и одна из неизвестных h_{i-1}, h_i принадлежит участку V. Тогда граница i в уравнении $\Omega_j \supseteq Ker(\Omega)$ не касается ни одной основы и ни одного коэффициентного уравнения и, в частности, не касается участка V. Следовательно, оставшаяся неизвестная также принадлежит V.

в/ Предположим противное, т.е. h_i и h_j одновременно принадлежат T, а также одной и той же компоненте связности графа Γ. Пусть $i<j$. Тогда границы $i+1, i+2, \ldots, j$ лежат в T. Пусть $h_i = t_a$, $h_j = t_b$, $k = t_{c_k}$ $(i+1 \leq k \leq j)$. Выберем среди чисел a, b, c_k наибольшее. Если таковым оказалось a, то неравенство $\beta(\mu_a) \leq j$ невозможно, так как граница $\beta(\mu_a)$ встретилась бы в последовательности $t_1, \ldots, t_\ell$ раньше неизвестной h_i. Неравенство $\beta(\mu_a) \geq j+1$ также невозможно, так как h_j встречается в последовательности $t_1, \ldots, t_\ell$

раньше, чем h_i. Аналогично получается противоречие в случае, когда наибольшим среди a, b, c_k является число b. Если же наибольшим является некоторое $c_k (i+1 \leq k \leq j)$, то можно считать, в силу симметрии, что $k = \alpha(\mu_{c_k})$. Рассмотрение возможностей $\beta(\mu_{c_k}) \leq j, \beta(\mu_{c_k}) \geq j+1$ приводит к противоречию и в этом случае.

Лемма 2.3 доказана

Пункты б/ и в/ доказанной леммы позволяют разбить компоненты связности графа Γ на три группы: к первой отнесём те компоненты, которые целиком содержатся в ядре; ко второй - компоненты, не пересекающиеся с ядром и содержащие ровно одну неизвестную из множества T; к третьей - компоненты, не пересекающиеся ни с ядром, ни с T.

Если V - участок вида $[i,j]$, то через $h[V]$ мы будем обозначать слово $h[i,j]$. Удобно также считать, что $h[i,i] \rightleftharpoons 1$ и $h[i,j] \rightleftharpoons (h[j,i])^{-1}$ при $i>j$.

Пусть списки слов $\bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)}, \bar{y}$ в алфавите $\bar{h}$ определены следующим образом:

$\bar{z}^{(1)} \rightleftharpoons \{h[V] \mid V$ - компонента связности, целиком содержащаяся в ядре$\}$,

$$\bar{z}^{(2)} \rightleftharpoons \{h[\alpha(\mu_i), \beta(\mu_i)]^{\varepsilon(\mu_i)} h[\alpha(\Delta(\mu_i)), \beta(\Delta(\mu_i))]^{-\varepsilon(\Delta(\mu_i))} \mid 1 \leq i \leq \ell\},$$

$\bar{y} \rightleftharpoons \{h[V] \mid V$ - компонента связности, не пересекающаяся ни с ядром, ни с $T\}$.

ЛЕММА 2.4. $\bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)}, \bar{y}, \bar{a}$ - базис свободной группы $F(\Omega^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\ell_н$ и $\ell_г$ - количество неизвестных и границ соответственно в множестве T; c_1, c_2, c_3 - количество компонент связности из первой, второй и третьей групп соответственно. В силу леммы 2.3 а/, $\ell_н + \ell_г = \ell$. Так как

Γ - лес, то $c_1+c_2+c_3+l_\Gamma=\rho$. Кроме того, по определению, $c_2=l_H$. Отсюда $\rho=c_1+c_3+l$, т.е. число букв во списке $\bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)}, \bar{y}, \bar{a}$ равно числу образующих группы $F(\Omega^*)$. Поэтому, в силу предложения I.2.7 [7], для завершения доказательства осталось проверить, что элементы этого списка порождают группу $F(\Omega^*)$.

Назовём индексом ind неизвестной или границы номер, под которым она входит в последовательность $t_1,\dots,t_l$; если неизвестная или граница не принадлежит T, полагаем её индекс равным бесконечности. Индексом $ind[i,j]$ участка $[i,j]$ назовём число $\min\{ind(i), ind(h_i),\dots, ind(h_{j-1}), ind(j)\}$. Индексом $ind(\mu)$ основы μ назовём число $ind[\alpha(\mu),\beta(\mu)]$. Основа μ_i $(1\leq i\leq l)$ не может касаться ни одной границы и содержать ни одной неизвестной индекса, меньшего, чем i, поэтому $ind(\mu_i)=i$. Аналогичное рассуждение показывает, что $ind(\Delta(\mu_i))>i$.

Пусть $F_0=Gp(\bar{z}^{(1)},\bar{z}^{(2)},\bar{y},\bar{a})$. Покажем, что $h[V]\in F_0$ /V - произвольный участок/ индуктивным спуском по $ind(V)$.

Если $ind(V)=\infty$, то границы участка V и все содержащиеся в нём неизвестные не принадлежат T. Поэтому V является объединением компонент связности первой и третьей группы, откуда $h[V]\in Gp(\bar{z}^{(1)},\bar{y})$.

Пусть теперь $V=[j_1,j_2]$; $ind(V)=a\leq l$. Заметим, что участки V и $[\alpha(\mu_a),\beta(\mu_a)]$ либо пересекаются по неизвестной t_a, либо касаются по границе t_a. Для любой из двух перестановок τ на двух элементах $(1,2)$ запишем в группе $F(\Omega^*)$ равенство

$$\left.\begin{aligned} h[V]^{sgn(\tau)} &= h[j_{\tau(1)}, \alpha(\mu_a)]\, h[\alpha(\mu_a), \beta(\mu_a)] \times \\ &\times h[\beta(\mu_a), j_{\tau(2)}] = h[j_{\tau(1)}, \alpha(\mu_a)] \times \\ &\times \left(z_a^{(2)}\, h[\alpha(\Delta(\mu_a)), \beta(\Delta(\mu_a))]^{\varepsilon(\Delta(\mu_a))}\right)^{\varepsilon(\mu_a)} h[\beta(\mu_a), j_{\tau(2)}]. \end{aligned}\right\} (2.20)$$

Из $ind(V) = ind(\mu_a) = a$, $ind(\Delta(\mu_a)) \geqslant a+1$ мы получаем, что $ind([j_{\tau(1)}, \alpha(\mu_a)]^{\pm 1}) \geqslant a$, $ind([\alpha(\Delta(\mu_a)), \beta(\Delta(\mu_a))]) \geqslant a+1$, $ind([j_{\tau(2)}, \beta(\mu_a)]^{\pm 1}) \geqslant a$. Если t_a - неизвестная, то $t_a \in V \cap \mu_a$, поэтому, полагая $\tau = id$, мы добьёмся того, что участки $[j_1, \alpha(\mu_a)]^{\pm 1}$ и $[j_2, \beta(\mu_a)]^{\pm 1}$ не будут содержать t_a и, следовательно, будут иметь индекс $\geqslant a+1$. Поэтому $h[V] \in F_0$ вытекает из (2.20) и индуктивного предположения. Если же t_a - граница и, скажем, $t_a = \alpha(\mu_a)$, то мы выберем τ так, чтобы $j_{\tau(1)} = t_a$. Тогда $h[t_a, t_a] = 1$, $ind([\beta(\mu_a), j_{\tau(2)}]^{\pm 1}) \geqslant$ $\geqslant a+1$ и снова можно применить индуктивное предположение.

Итак, мы доказали, что в F_0 лежат все элементы вида $h[V]$ и, в частности, все неизвестные. Лемма 2.4 доказана.

Перепишем теперь систему уравнений Ω^* в базисе $\bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)}, \bar{y}, \bar{a}$. Согласно лемме 2.3б/, основные уравнения, соответствующие основам $\mu \in Ker(\Omega)$, а также коэффициентные уравнения, запишутся в виде $\bar{\Psi}(\bar{z}^{(1)}, \bar{a}) = 1$, а основные уравнения, соответствующие основам $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$, приобретут вид $\bar{z}^{(2)} = 1$. Удалим из полученной системы уравнения $\bar{z}^{(2)} = 1$ вместе с неизвестными $\bar{z}^{(2)}$. Мы получим систему уравнений $\bar{\Psi}(\bar{z}^{(1)}, \bar{a}) = 1$ с неизвестными $\bar{z}^{(1)}, \bar{y}$ и естественный изоморфизм $\Theta: G(\Omega^*) \to G(\bar{\Psi})$ групп $G(\Omega^*)$ и $G(\bar{\Psi})$. Обозначим через P_0 каноническую группу автоморфизмов I типа группы $G(\bar{\Psi})$, индуцированную разбиением $(\bar{z}^{(1)}, \bar{y})$ её неизвестных и через P - каноническую группу автоморфизмов $\Theta^{-1} P_0 \Theta$ группы $G(\Omega^*)$.

Если обобщённое уравнение Ω содержит граничные связи, то применив к обобщённому уравнению $\tilde{\Omega}$ /полученному из Ω преобразованиями Э.2/ конструкцию, описанную в настоящем параграфе, мы построим систему уравнений $\bar{\Psi}$, снабжённую канонической группой автоморфизмов I типа P_0 и естественный изоморфизм Θ групп $G(\Omega^*)$ и $G(\bar{\Psi})$. Снова обозначим $P = \Theta^{-1} P_0 \Theta$.

В заключение приведём простой критерий, позволяющий устанавливать, что данный автоморфизм группы $G(\Omega^*)$ лежит в P, не переходя к базису $\bar{z}, \bar{y}, \bar{a}$. Для обобщённого уравнения Ω через $\check{\Omega}$ обозначим уравнение, полученное из $\tilde{\Omega}$ удалением всех коэффициентных уравнений и всех основ $\mu \in Ker(\tilde{\Omega})$. Имеет место естественный гомоморфизм $\pi: G(\check{\Omega}^*) \to G(\Omega^*)$. Назовём автоморфизм $\delta \in Aut(G(\Omega^*))$ инвариантным относительно ядра, если существует автоморфизм $\check{\delta} \in Aut(G(\check{\Omega}^*))$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G(\check{\Omega}^*) & \xrightarrow{\pi} & G(\Omega^*) \\ \downarrow{\scriptstyle \check{\delta}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ G(\check{\Omega}^*) & \xrightarrow{\pi} & G(\Omega^*) \end{array} \qquad (2.21)$$

коммутативна и $\check{\delta}(h_i) = h_i$ для любой неизвестной $h_i \in Ker(\tilde{\Omega})$.

Суммируем теперь результаты настоящего параграфа в следующей лемме.

ЛЕММА 2.5. По каждому обобщённому уравнению Ω можно эффективно построить каноническую группу автоморфизмов I типа P группы $G(\Omega^*)$, содержащую все автоморфизмы, инвариантные относительно ядра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа P - такая, как выше. Отметим, что система уравнений $\check{\Omega}^*$ в базисе $\bar{z}, \bar{y}, \bar{a}$ имеет вид $\bar{z}^{(2)} = 1$, т.е. $G(\check{\Omega}^*)$ - свободная группа с базисом $\bar{z}^{(1)}, \bar{y}, \bar{a}$. Поэтому диаграмма (2.21), переписанная в базисе $\bar{z}, \bar{y}, \bar{a}$, выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} F(\bar{\psi}) & \longrightarrow & G(\psi) \\ {\scriptstyle \theta \check{\delta} \theta^{-1}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \theta \delta \theta^{-1}} \\ F(\bar{\psi}) & \longrightarrow & G(\psi) \end{array}$$

Осталось заметить, что $\bar{z}^{(1)}$ лежит в подгруппе $G_P(\{h_i \mid h_i \in Ker(\tilde{\Omega})\})$, поэтому $\theta \check{\delta} \theta^{-1}(\bar{z}^{(1)}) = \bar{z}^{(1)}$.

Лемма 2.5 доказана.

§3. Автоморфизмы локально линейных уравнений.

Предположим, что в совместном обобщённом уравнении Ω выделено непустое множество закрытых участков

$$[i_1, j_1]; [i_2, j_2]; \ldots ; [i_\ell, j_\ell]. \qquad (2.22)$$

Объединение участков (2.22) будем называть л и н е й н о й ч а с т ь ю уравнения Ω, если выполнены следующие условия:

а/ участки (2.22) не содержат свободных границ,

б/ через границы участков (2.22) не проходят граничные связи, в/ каждая неизвестная, лежащая на одном из участков (2.22), принадлежит ровно двум основам и не входит в коэффициентные уравнения.

Локально линейным уравнением назовём обобщённое уравнение вместе с некоторой его линейной частью (2.22). С точностью до переобозначения неизвестных можно считать, что линейная часть занимает участок $[1, j]$ для некоторого j. Это соглашение действует на протяжении всего §3. Нелинейной частью назовём участок $[j, \rho+1]$, дополнительный к линейной части.

Основу μ назовём переменной, если μ и $\Delta(\mu)$ лежат в линейной части; постоянной, если одна из основ μ и $\Delta(\mu)$ лежит в линейной части, а другая - в нелинейной; неизменной, если μ и $\Delta(\mu)$ лежат в нелинейной части.

Неизвестную h_i назовём постоянной, если она лежит в нелинейной части или принадлежит хотя бы одной постоянной основе; переменной, если она лежит в линейной части и принадлежит только переменным основам.

Пусть F' -свободная группа с базисом $\{h_1, \ldots, h_{j-1}\}$. Рассмотрим следующие множества слов S_1 и S_2 в группе F':

$$S_1 \rightleftharpoons \{h[\alpha(\mu), \beta(\mu)]^{\varepsilon(\mu)} h[\alpha(\Delta(\mu)), \beta(\Delta(\mu))]^{-\varepsilon(\Delta(\mu))} \mid \mu \text{ - переменная основа}\}, \tag{2.23}$$

$$S_2 \rightleftharpoons \{h[\alpha(\mu), \beta(\mu)] \mid \mu \text{ - постоянная основа, лежащая в линейной части}\}. \tag{2.24}$$

Мы хотим построить базис группы F', в котором $S_1 \cup S_2$ имеет вид, сходный с видом слов в определении канонической группы автоморфизмов типов 2,3. Для этого нам нужна модификация теории квадратичных множеств циклических слов /см., например, §7 гл.I монографии [7]/ для случая обыкновенных слов.

Множество слов S в свободной группе F с базисом $\bar{x}$ называется строго квадратичным, если всякая буква из списка $\bar{x}$, входящая в слова из S, входит в слова из $\bar{x}$ ровно два раза. Граф $J(S)$ определяется как неориентированный граф, вершинами которого являются элементы множества S, а вершины s_1 и s_2 соединяются ребром, если некоторый $x_i \in \bar{x}$ встречается как в s_1, так и в s_2. Множество S называется связным, если граф $J(S)$ связен.

ЛЕММА 2.6. Пусть $S = \{s_1, \ldots, s_{n+1}\} (n \geqslant 0)$ - конечное связное строго квадратичное множество слов некоторой свободной группы F с базисом $\bar{x}$. Тогда некоторый автоморфизм α группы F переводит S в множество слов $\alpha(S)$ вида

$$\alpha(s_i) = u_i \ (1 \leqslant i \leqslant n); \ \alpha(s_{n+1}) = p(\bar{u}, \bar{w})\, q(\bar{v}),$$

где p есть слово вида

$$\Big(\prod_{i\in I_0} u_i^{\pm 1}\Big) w_1^{-1} \Big(\prod_{i\in I_1} u_i^{\pm 1}\Big) w_1 \ldots w_m^{-1} \Big(\prod_{i\in I_m} u_i^{\pm 1}\Big) w_m \qquad (2.25)$$

/ $I_0, I_1, \ldots, I_m$ - некоторое разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$ /; $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m, \bar{v}$ - различные элементы $\bar{x}$ и $q = v_1^2 v_2^2 \ldots v_g^2$ или $q = [v_1, v_2] \ldots$ $\ldots [v_{2g-1}, v_{2g}] \ (g \geqslant 0)$. Автоморфизм α строится эффективно по множеству S.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скажем, что нильсеновское преобразование α вида $\alpha : x_i^{\varepsilon} \mapsto x_i^{\varepsilon} x_j^{\delta} \ (\varepsilon, \delta = \pm 1)$ связано с множеством слов S, если некоторый элемент из S

содержит подслово $(x_i^{\varepsilon} x_j^{-\delta})$ или обратное к нему. Скажем, что последовательность нильсеновских преобразований $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ **с в я з а н а с** S, если для любого $i (1 \le i \le r)$ α_i связано с $\alpha_{i-1} \ldots \alpha_1(S)$. Отметим, что если α связано с S, а S строго квадратично и связно, то $\alpha(S)$ строго квадратично и связно. Следовательно, если последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ связана с S, то $\alpha_r \ldots \alpha_1(S)$ строго квадратично и связно.

Пусть теперь $1 \le k \le n$ и некоторая последовательность связанных с S преобразований переводит S в множество $S' = \{s_1', \ldots, s_n', s_{n+1}'\}$, где $s_1' = u_1, s_2' = u_2, \ldots, s_{k-1}' = u_{k-1}$. В силу связности S', найдётся буква u_k алфавита $\bar{x}^{\pm 1}$, отличная от $u_1, \ldots, u_{k-1}$ и входящая в s_k' ровно один раз. Таким образом, $s_k' \doteq V u_k^{\varepsilon} W$. Проделав последовательность нильсеновских преобразований, композиция которых даёт автоморфизм $u_k^{\varepsilon} \mapsto V^{-1} u_k^{\varepsilon} W^{-1}$, мы переведём S в множество $\{u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k, \ldots\}$.

Таким образом, рассуждая по индукции, мы можем с самого начала считать, что $s_i = u_i \ (1 \le i \le n)$. Предположим далее, что для некоторых дизъюнктных $I_0, I_1, \ldots, I_m \subseteq \{1, \ldots, n\}$ уже построена последовательность нильсеновских преобразований, связанная с S и переводящая его в

$$\alpha(S) = \{u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n, p(\bar{u}, w) \cdot q(\bar{u}, \bar{v})\}, \tag{2.26}$$

где p такое, как в (2.25), а q - произвольно. Обозначим через $\tilde{q}$ результат вычёркивания всех букв $\bar{u}$ в слове $\tilde{q}$.

Если $\tilde{q}$ сократимо, то в q входит подслово вида

$v^{-1}\prod_{i\in \bar{I}_{m+1}} u_i^{\pm 1} v$. Пусть $q \doteq Av^{-1}\prod_{i\in \bar{I}_{m+1}} u_i^{\pm 1} vB$.

Проделав преобразование $v \mapsto vA$ и положив $w_{m+1}=v$, мы получим представление (2.26) с бо́льшим значением m.

Пусть $\tilde{q}$ несократимо. Рассуждая, как во второй части доказательства предложения I.7.6 [7], мы построим последовательность нильсеновских преобразований $\tilde{\alpha}_1,\dots,\tilde{\alpha}_r$, связанную с $\tilde{q}$ и переводящую $\tilde{q}$ в слово одного из двух видов: $\tilde{q}'=v_1^2 v_2^2 \dots v_g^2$ или $\tilde{q}'=[v_1,v_2]\dots[v_{2g-1},v_{2g}]$. Отметим при этом, что если автоморфизм $\tilde{\alpha}: v_i^{\varepsilon} \mapsto v_i^{\varepsilon} v_j^{\delta}$ связан с $\tilde{q}$ и $v_i^{\varepsilon} U v_j^{-\delta}$ входит в слово $q^{\pm 1}$ / U - слово в алфавите $\bar{u}$ /, то последовательность нильсеновских преобразований, дающая автоморфизм $v_i^{\varepsilon} \mapsto$ $\mapsto v_i^{\varepsilon} v_j^{\delta} U^{-1}$, связана с q. Таким образом, мы можем перевести q в q' последовательностью связанных преобразований так, что $\tilde{q}'=v_1^2 v_2^2 \dots v_g^2$ или $\tilde{q}'=[v_1,v_2]\dots$ $\dots[v_{2g-1},v_{2g}]$. Отметим, что если некоторое $\alpha_i\alpha_{i-1}\dots\alpha_1 q$ окажется сократимым, то следует воспользоваться преобразованиями предыдущего случая.

Тем самым, S переведено в множество слов вида

$$\alpha(S)=\{u_1,\dots,u_{n-1},u_n,p(\bar{u},\bar{w})\cdot U_0\cdot\prod_{i=1}^{g}(v_i U_{i0} v_i U_{i1})\}$$

или

$$\alpha(S)=\{u_1,\dots,u_n,p(\bar{u},\bar{w})\cdot U_0\cdot\prod_{i=1}^{g}(v_{2i-1}^{-1}U_{i0}v_{2i}^{-1}U_{i1}v_{2i-1}U_{i2}v_{2i}U_{i3})\}$$

где U_{ij} - слова в алфавите $\bar{u}$. Однако автоморфизм $v \mapsto U_0^{-1}U_1 v U_1^{-1}$ переводит слово vU_0vU_1 в $U_0^{-1}U_1v^2$, а автоморфизм $v_1 \mapsto$ $\mapsto U_0U_3v_1U_3^{-1}U_0^{-1}U_1^{-1}U_2^{-1}, v_2 \mapsto U_1U_0U_3v_2U_3^{-1}$ переводит слово $v_1^{-1}U_0v_2^{-1}U_1v_1U_2v_2U_3$ в

$v_2 v_1 v_0 v_3 v_1^{-1} v_2^{-1} v_1 v_2$. Таким образом, путём g-кратного применения автоморфизмов указанного вида, мы можем перевести $\alpha(S)$ в $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n,$

$$\Big(\prod_{i\in \bar I_0} u_i^{\pm 1}\Big) w_1^{-1} \Big(\prod_{i\in \bar I_1} u_i^{\pm 1}\Big) w_1 \ldots w_m^{-1} \Big(\prod_{i\in \bar I_m} u_i^{\pm 1}\Big) w_m \Big(\prod_{i\in \bar I_{m+1}} u_i^{\pm 1}\Big) q(\bar v)\}.$$

Осталось применить автоморфизм $w_j \mapsto w_j \Big(\prod_{i\in \bar I_{m+1}} u_i^{\pm 1}\Big)^{-1}$ $(1 \le j \le m)$. Лемма 2.6 доказана.

Возвращаясь к локально линейным уравнениям, мы видим, что множество слов $S_1 \cup S_2$ вида (2.23), (2.24) строго квадратично. Пусть Γ - граф, множеством вершин которого служат закрытые участки (2.22), причём два участка соединяются ребром, если некоторая основа μ принадлежит одному из них, в то время, как $\Delta(\mu)$ принадлежит другому.

Заметим, что если Γ связен, то $S_1 \cup S_2$ связно. В самом деле, если V - компонента связности графа $J(S_1 \cup S_2)$ и $\bar h^{(1)}$ - множество неизвестных, входящих в слова из V, то, очевидно, неизвестные $\bar h^{(1)}$ образуют объединение нескольких закрытых участков (2.22), совпадающее со всей линейной частью в силу связности графа Γ. Итак, если Γ связен, то к множеству $S_1 \cup S_2$ можно применить лемму 2.6 и построить базис $\bar u, \bar w, \bar v, \bar t$ группы F', в котором все элементы из $S_1 \cup S_2$, кроме одного элемента s, образуют вектор $\bar u$, а элемент s имеет вид $p(\bar u, \bar w) \cdot q(\bar v)$. Положим $\bar z = h_j, \ldots, h_g$.

<u>Случай</u> I: $S_2 = \emptyset$. Переписывая систему уравнений Ω^* в базисе $\bar u, \bar w, \bar v, \bar t, \bar z, \bar a$, мы получим эквивалентную систему, состоящую из уравнений вида $\Psi(\bar z, \bar a) = 1$ /уравнения, соответствующие неизменным основам и коэффициентные уравнения/ и уравнений $\bar u = 1$, $p(\bar u, \bar w) \cdot q(\bar v) = 1$,

соответствующих переменным основам. Эта система эквивалентна системе

$$\overline{\Psi}(\bar{z},\bar{a})=1,\ q(\bar{v})=1 \qquad (2.27)$$

с неизвестными $\bar{w},\bar{v},\bar{z},\bar{t}$, которую мы обозначим через φ. С ней можно связать каноническую группу автоморфизмов P_1 типа I, если добавить неизвестные $\bar{v}$ к списку $\bar{z}$, уравнение $q(\bar{v})=1$ - к списку Ψ и отнести неизвестные $\bar{w},\bar{t}$ к списку $\bar{y}$ в (I.7). Если мы, напротив, отнесём $\bar{v}$ к списку $\bar{y}$, а $\bar{w},\bar{t}$ - к списку $\bar{z}$, то с системой $\bar{\varphi}$ связывается также каноническая группа автоморфизмов P_2 типа 2. Пусть $P_0=Gp(P_1,P_2)$ и $P= =\theta^{-1}P_0\theta$, где $\theta: G(\Omega^*)\to G(\varphi)$ - естественный изоморфизм.

Случай 2: $S_2\neq\emptyset$. Выбирая элемент 1 так, чтобы $1\in S_2$, мы получим, аналогично предыдущему случаю, что Ω^* переписывается в базисе $\bar{u}^{(1)},\bar{u}^{(2)},\bar{w},\bar{v},\bar{t},\bar{z},\bar{a}$ /$\bar{u}=\bar{u}^{(1)}\cup\bar{u}^{(2)}$/ в виде $\overline{\Psi}(\bar{z},\bar{a})=1,\ \bar{u}^{(1)}=1,$ $\bar{u}^{(2)}=\overline{U}(\bar{z}),\ p(\bar{u}^{(2)},\bar{w})\cdot q(\bar{v})=U_0(\bar{z})$. Далее, получаем эквивалентную систему $\Psi(\bar{z},\bar{a})=1,\ \bar{u}^{(2)}=\overline{U}(\bar{z}),$ $p(\bar{u}^{(2)},\bar{w}^{(2)})\cdot q(\bar{v})=U_0(\bar{z})$, где $\bar{w}=\bar{w}^{(1)}\cup\bar{w}^{(2)}$ - некоторое разбиение. Если слово p имеет вид (2.25), то, домножая уравнение $p(\bar{u}^{(2)},\bar{w}^{(2)})\cdot q(\bar{v})=U_0(\bar{z})$ слева на подходящие уравнения из списка $\bar{u}^{(2)}=\overline{U}(\bar{z})$, мы можем считать, что $I_0\neq\emptyset$. Далее, выбрав новый базис свободной группы с базисом $\bar{u}^{(2)}$ так, чтобы в него входили элементы $\left(\prod_{i\in I_k}u_i^{\pm1}\right)(1\leq k\leq m)$, переписав уравнения $\bar{u}^{(2)}=\overline{U}(\bar{z})$ в этом базисе и вычеркнув те уравнения $u_i=U_i(\bar{z})$ вместе с неизвестными u_i, для которых u_i не входит в

$p(\bar{u}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}) \cdot q(\bar{v})$, мы приведём систему к виду

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\Psi}(\bar{z}, \bar{a}) = 1,\ u_1 = V_1(\bar{z}), \dots, u_n = V_n(\bar{z}), \\ &\prod_{i=1}^{n} (w_i^{-1} u_i w_i) \cdot q(\bar{v}) = V_0(\bar{z}), \end{aligned}\right\} \quad (2.28)$$

т.е. в точности к виду (1.9), если не считать того, что полученная система $\bar{\varphi}$ имеет в качестве фиктивных неизвестных все буквы $\bar{t}$, а также, возможно, некоторые буквы из $\bar{u}, \bar{w}$. Если отнести все неизвестные $\bar{v}$, а также $u_1, \dots, u_n$, $w_1, \dots, w_n$ в (2.28) к списку $\bar{z}$, а все фиктивные неизвестные - к списку $\bar{y}$, мы свяжем с системой $\bar{\varphi}$ каноническую группу автоморфизмов P_1 типа I; если поступить наоборот - каноническую группу автоморфизмов P_2 типа 3. Пусть $P_0 = G_p(P_1, P_2)$ и $P = \Theta^{-1} P_0 \Theta$, где $\Theta: G(\Omega^*) \to G(\bar{\varphi})$ - естественный изоморфизм.

Если Ω - совместное локально линейное обобщённое уравнение, то через $\check{\Omega}$ в этом параграфе будем обозначать уравнение, полученное из Ω удалением всех постоянных и неизменных основ, а также всех коэффициентных уравнений. Назовём автоморфизм $\gamma \in Aut(G(\Omega^*))$ и н в а р и а н т н ы м   о т н о с и т е л ь н о   н е л и н е й н о й   ч а с т и, если существует автоморфизм $\hat{\check{\gamma}} \in Aut(H(\check{\Omega}^*))$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(\check{\Omega}^*) & \xrightarrow{\pi} & G(\Omega^*) \\ \Big\downarrow \hat{\check{\gamma}} & & \Big\downarrow \gamma \\ H(\check{\Omega}^*) & \xrightarrow{\pi} & G(\Omega^*) \end{array} \quad (2.29)$$

коммутативна, $\hat{\check{\gamma}}(s) = s$ для любого $s \in S_2$ и

$\hat{\check{\sigma}}(h_i) = h_i$ при $j \le i \le g$.

ЛЕММА 2.7. По всякому совместному локально линейному обобщённому уравнению Ω со связным графом Γ можно построить группу автоморфизмов P группы $G(\Omega^*)$, порождённую двумя каноническими группами автоморфизмов и содержащую все автоморфизмы, инвариантные относительно нелинейной части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\varphi}, P_1, P_2, P_0, P_{\theta}$ - такие, как выше. Переписывая коммутативную диаграмму (2.29) /для произвольного автоморфизма σ, инвариантного относительно нелинейной части/ в базисе $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{t}, \bar{z}, \bar{a}$ и осуществляя с системой Ω^* те же преобразования, которые были выше проделаны с системой Ω^*, мы получим систему $\check{\bar{\varphi}}$ и коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccc} H(\check{\bar{\varphi}}) & \longrightarrow & G(\bar{\varphi}) \\ \downarrow & & \downarrow \theta\sigma\theta^{-1} \\ H(\check{\bar{\varphi}}) & \longrightarrow & G(\bar{\varphi}) \end{array} \qquad \hat{\mu} \rightleftarrows \hat{\check{\theta}}\hat{\check{\sigma}}\hat{\check{\theta}}^{-1} \qquad (2.30)$$

Случай I. $S_2 = \emptyset$. В этом случае система $\check{\bar{\varphi}}$ имеет неизвестные $\bar{w}, \bar{v}, \bar{z}, \bar{t}$ и состоит из единственного уравнения $q(\bar{v}) = 1$ /ср. с (2.27) /, т.е. $H(\check{\bar{\varphi}}) = F * H$, где F - свободная группа с базисом $\bar{w}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{a}$, а $H = \langle \bar{v} \,\|\, q(\bar{v}) = 1 \rangle$. Группа $\hat{\mu}(H)$ изоморфна H, неразложима в свободное произведение /предложение 2.5.14 [7] / и не является свободной, поэтому, по теореме Куроша о подгруппах, $\hat{\mu}(H)$ сопряжена с некоторой подгруппой H, т.е. $A^{-1}\hat{\mu}(H)A \subseteq H$ для некоторого слова A в образующих $\bar{w}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{v}, \bar{a}$. Автоморфизм группы $F(\check{\bar{\varphi}})$, оставляющий на месте $\bar{w}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{a}$ и переводящий $\bar{v}$ в

$A^{-1}\bar{v}A$, индуцирует автоморфизмы групп $H(\bar{\check{\varphi}})$ и $G(\bar{\varphi})$, причём второй из индуцированных автоморфизмов лежит в P_2. Умножив $\Theta \delta \Theta^{-1}$ справа на этот автоморфизм, можно считать с самого начала, что $\hat{\mu}(H) \subseteq H$.

Так как $\hat{\mu}^{-1}(H) \supseteq H$ и, аналогично предыдущему, $\hat{\mu}^{-1}(H)$ сопряжена с некоторой подгруппой H в свободном произведении $F * H$, то $\hat{\mu}^{-1}(H) = H$. Таким образом, $\hat{\mu}$ индуцирует автоморфизм группы H. Согласно теореме Нильсена [26] /см. также [29] /, $\hat{\mu}$ индуцирован некоторым автоморфизмом $\hat{\hat{\mu}}$ свободной группы F'' с базисом $\bar{v}$, а согласно теореме Магнуса / [7], предл. 2.5.8/, автоморфизм $\hat{\hat{\mu}}$ переводит циклическое слово q в $q^{\pm 1}$. Таким образом, если доопределить автоморфизм $\hat{\hat{\mu}}$ тождественным образом на образующих $\bar{w}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{a}$, мы снова получим автоморфизм группы $F(\check{\bar{\varphi}})$, индуцирующий автоморфизмы групп $H(\check{\bar{\varphi}})$ и $G(\bar{\varphi})$, причём второй из индуцированных автоморфизмов снова лежит в P_2. После умножения на него справа, можно считать, что $\hat{\mu}|_H = id$.

Теперь нам нужен следующий, слегка усиленный вариант теоремы Грушко-Неймана, который легко получается из анализа стандартного доказательства этой теоремы /см., например, [6], стр. 251-261/:

"Пусть F - свободная группа; $\pi: F \xrightarrow{\text{на}} A * B$; F_1 - свободный множитель в F такой, что $\pi(F_1) \subseteq B$. Тогда существует разложение $F = F_2 * F_3$ такое, что $\pi(F_2) = A$, $\pi(F_3) = B$, $F_1 \subseteq F_3$ и F_1 выделяется свободным множителем в F_3".

Применим этот результат, взяв в качестве F группу $F(\check{\bar{\varphi}}) = \langle \bar{w}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{v}, \bar{a} \rangle$; в качестве A - свободную группу $\langle \bar{w}, \bar{t} \rangle$; в качестве B - группу $H * \langle \bar{z}, \bar{a} \rangle$, в качестве π_1 - композицию $F(\bar{\check{\varphi}}) \to H(\bar{\check{\varphi}}) \xrightarrow{\mu} H(\bar{\check{\varphi}}) = A * B$; в качестве F_1 - группу $\langle \bar{v}, \bar{z}, \bar{a} \rangle$. Пусть $F(\bar{\check{\varphi}}) = F_2 * F_3$ - построенное разложение. Тогда $rg(F_2) \geqslant rg(A) = |\bar{w}| + |\bar{t}|$ /предложение I.2.7 [7] / и $rg(F_3) \geqslant |\bar{v}| + |\bar{z}| + |\bar{a}|$ /предложение 2.5.II [7] /. Отсюда $rg(F_2) = |\bar{w}| + |\bar{t}|$ и $F_3 = \langle \bar{v}, \bar{z}, \bar{a} \rangle$, так как $\langle \bar{v}, \bar{z}, \bar{a} \rangle$ выделяется в F_3 свободным множителем. Следовательно, можно определить автоморфизм $\pi|_{F_2} * id : F_2 * F_3 = F(\bar{\check{\varphi}}) \longrightarrow F(\bar{\check{\varphi}}) = \langle \bar{w}, \bar{t} \rangle * F_3$. Так как этот автоморфизм оставляет неподвижными элементы $\bar{v}, \bar{z}, \bar{a}$, то индуцированный им гомоморфизм $\Theta \ell \Theta^{-1}$ в (2.30) лежит в P_1. Тем самым случай I разобран.

Случай 2, $S_2 \neq \emptyset$. В этом случае система $\bar{\check{\varphi}}$ тривиальна, а её список неизвестных есть $\bar{z}, \bar{a}, u_1, \ldots, u_n, \bar{v}, w_1, \ldots, w_n, \bar{y}$ в (2.28) / $\bar{y}$ - некоторый список фиктивных неизвестных/. Так как $u_1, \ldots, u_n, \prod\limits_{i=1}^{n} (w_i^{-1} u_i w_i) q(\bar{v}) \in Gp(S_2)$, то $\hat{\mu}(u_i) = u_i \ (1 \leq i \leq n)$, $\hat{\mu}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} (w_i^{-1} u_i w_i) q(\bar{v})\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} (w_i^{-1} u_i w_i) q(\bar{v})$. Пусть $\hat{\mu}(w_i) = W_i$; $\hat{\mu}(\bar{v}) = \bar{V}$. Докажем сначала, что слова $u_i, W_i \ (1 \leq i \leq n), \bar{V}$ являются базисом свободной группы $\langle \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \rangle$.

В самом деле, так как $\bar{u}, \bar{W}, \bar{V}$ - часть базиса свободной группы $H(\bar{\check{\varphi}})$, то $rg(Gp(\bar{u}, \bar{W}, \bar{V})) = |\bar{v}| + 2n$. Поэтому вектор $\bar{u}, \bar{W}, \bar{V}$ может быть последовательностью нильсеновских преобразований, связанных с множеством слов $\{u_1, \ldots, u_n, \prod\limits_{i=1}^{n} (w_i^{-1} u_i w_i) q(\bar{v})\}$ переведён в нильсеновски приведённый вектор $\bar{u}', \bar{W}', \bar{V}'$; пусть при этом множество слов $\{u_1, \ldots, u_n, \prod_{i=1}^{n}(w_i^{-1}u_iw_i)\cdot q(\bar{v})\}$ переходит в строго квадратичное множество $\{J_1, \ldots, J_n, J_{n+1}\}$ так, что $J_i(\bar{u}', \bar{W}', \bar{V}') = u_i\ (1 \le i \le n)$, $J_{n+1}(\bar{u}', \bar{W}', \bar{V}') = \prod_{i=1}^{n}(w_i^{-1}u_iw_i)\cdot q(\bar{v})$. В силу следствия I.2.4 [7] имеем $\delta(J_i) = 1\ (1 \le i \le n)$, так что, переобозначив неизвестные, можно считать, что $J_i = u_i' = u_i$. Легко проверяется, что никакое преобразование Уайтхеда /см. гл.I, §4 [7] / не уменьшает суммарную длину вектора $(u_1, \ldots, u_n, \prod_{i=1}(w_i^{-1}u_iw_i)\cdot q(\bar{v}))$, поэтому то же самое справедливо для любого автоморфизма на основании предложения I.4.24 [7] . В частности, $\delta(J_{n+1}) = 3n + |\bar{v}|$. Следовательно, на основании предложения I.2.3 [7] , всякий элемент X вектора $\bar{u}, \bar{W}, \bar{V}$ может быть записан в виде $X \overset{\circ}{=} a(X)\,m(X)\,a(X^{-1})^{-1}$, где $m(X)$ непусто так, что если $J_{n+1} \overset{\circ}{=} x_1^{\pm1}\ldots x_{3n+|\bar{v}|}^{\pm1}$, то $J_{n+1}(\bar{u}, \bar{W}', \bar{V}') \overset{\circ}{=} m(X_1^{\pm1})\ldots m(X_{3n+|\bar{v}|}^{\pm1}) \overset{\circ}{=} \prod_{i=1}^{n}(w_i^{-1}u_iw_i)\cdot q(\bar{v})$. Очевидно, $a(u_i^{\pm1}) = 1$, $m(u_i) = u_i$. Поэтому, с точностью до переобозначения неизвестных, можно считать также, что $J_{n+1} \overset{\circ}{=} \prod_{i=1}(w_i^{-1}u_iw_i)\,q(\bar{v})$. Отсюда легко выводится, что $a(w_i) = a(v_i) = 1$, т.е. вектор $\bar{u}, \bar{W}', \bar{V}'$ на самом деле совпадает с $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}$. Значит, $\bar{u}, \bar{W}, \bar{V}$ образует базис свободной группы $\langle \bar{u}, \bar{w}, \bar{v} \rangle$.

Итак, мы доказали, что $\hat{\mu}|\langle \bar{u}, \bar{w}, \bar{v} \rangle$ - автоморфизм группы $\langle \bar{u}, \bar{w}, \bar{v} \rangle$. Продолжая его на оставшиеся образующие $\bar{z}, \bar{a}, \bar{y}$ тождественным образом, мы получим некоторый автоморфизм группы $H(\bar{\overset{v}{\Psi}})$, который индуцирует автоморфизм группы $G(\bar{\Psi})$, лежащий в P_2. Умножив $\Theta\sigma\Theta^{-1}$ справа на этот автоморфизм, можно считать, что $\mu(\bar{u})=\bar{u}$, $\mu(\bar{w})=\bar{w}$, $\mu(\bar{v})=\bar{v}$. Однако в этом случае из (2.30) вытекает, что $\Theta\sigma\Theta^{-1}\in P_1$. Лемма 2.7 доказана.

Пусть $\bar{H}$ - решение локально линейного уравнения Ω с линейной частью $[1,j]$. Определим следующие числовые характеристики решения $\bar{H}$:

$$\partial_1(\bar{H})=\sum_{i=1}^{j-1}\partial(H_i), \tag{2.31}$$

$$\partial_2(\bar{H})=\max\left\{\sum_{\mu}\partial(H[\alpha(\mu),\beta(\mu)]),1\right\}, \tag{2.32}$$

где суммирование в (2.32) производится по всем постоянным основам μ.

Оставшаяся часть §3 посвящена доказательству следующего утверждения:

ЛЕММА 2.8. По всякому совместному локально линейному обобщённому уравнению Ω можно эффективно построить группу автоморфизмов P группы $G(\Omega^*)$, порождённую конечным числом канонических групп автоморфизмов так, что для любого решения $\bar{H}$ уравнения Ω, минимального относительно группы P, выполнено неравенство $\partial_1(\bar{H})\leq f_1(\Omega)\cdot\partial_2(\bar{H})$, где $f_1(\Omega)$ - некоторая вычислимая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ - определённый выше граф; $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_r$ - его компоненты связности; Ω_i - локально линейное уравнение, которое получится, если объявить линейной частью в уравнении Ω объединение закрытых участков, лежащих в Γ_i. Применив к уравнениям Ω_i /$1\leq i\leq r$ / лемму 2.7, получим группы автоморфизмов $P_1,\dots$ $\dots, P_r$. Положим $P=G_p(P_1,\dots,P_r)$; тогда всякое решение, минимальное относительно группы P, будет минимальным также относительно любой из групп $P_i(1\leq i\leq r)$. Пусть δ_{1i} и δ_{2i} обозначают характеристики (2.31), (2.32) для уравнения Ω_i. Тогда $\delta_1(\bar H)=\sum\limits_{i=1}^{r}\delta_{1i}(\bar H)$; $\delta_2(\bar H)\geqslant\max\limits_{1\leq i\leq r}\delta_{2i}(\bar H)$, поэтому лемму 2.8 достаточно доказать для каждого из уравнений $\Omega_1,\dots,\Omega_r$. Таким образом, мы можем с самого начала предполагать, что Γ связен.

Определим теперь искомую вычислимую функцию $f_1(\Omega)$. Положим, прежде всего, $\rho_{max}=13n+3\rho+1$; $n_{max}=7n+\rho+1$, где n,ρ - соответственно число пар основ и число неизвестных уравнения Ω. Пусть

$$\left.\begin{aligned} g_0(\Omega)&\rightleftharpoons n_{max}\,\rho_{max}^2\left(2(\rho_{max}+1)^2\right)^{2n_{max}}\times\\ &\times 2^{(4\rho_{max}^2+\rho_{max})}\cdot(2\rho_{max})!.\end{aligned}\right\}\quad(2.33)$$

Функцию $g_1(\Omega,r)$ определим рекурсивным спуском по $r=\rho_{max}+1,\rho_{max},\dots,0$:

$$\left.\begin{aligned} &g_1(\Omega,\rho_{max}+1)\rightleftharpoons 0,\\ &g_1(\Omega,r)\rightleftharpoons \rho_{max}^{g_0(\Omega)+1}\times g_1(\Omega,r+1)^{g_0(\Omega)(\rho_{max}+1)}.\end{aligned}\right\}\quad(2.34)$$

Функцию $g_2(\Omega,k,r)$ зададим формулой

$$g_2(\Omega,k,r)\rightleftharpoons\left(\rho_{max}\cdot g_1(\Omega,r+1)^{\rho_{max}+1}\right)^k\cdot\rho_{max}.\quad(2.35)$$

Отметим, что

$$g_2(\Omega, g_0(\Omega), r) = g_1(\Omega, r). \qquad (2.36)$$

Наконец, положим

$$f_1(\Omega) = \rho \cdot g_1(\Omega, 0)^{\rho+1}. \qquad (2.37)$$

Пусть $\bar{H}$ - решение некоторого локально линейного обобщённого уравнения Ω с линейной частью $[1, j]$. Спектром $Sp(\bar{H})$ решения $\bar{H}$ назовём множество натуральных чисел $\{\partial(H_i) \mid 1 \leq i \leq j-1\}$ /без учёта кратностей/.

~~Построим тепер~~ Лемму 2.8 будем доказывать от противного.

Предположим, что $\bar{H}$ - решение исходного уравнения Ω, минимальное относительно группы P из леммы 2.7, для которого нарушается неравенство $\partial_1(\bar{H}) \leq f_1(\Omega) \cdot \partial_2(\bar{H})$. Хотя бы один числовой интервал вида $(\partial_2(\bar{H}) \cdot g_1(\Omega, 0)^i, \partial_2(\bar{H}) \cdot g_1(\Omega, 0)^{i+1})$ $(0 \leq i \leq \rho)$ не содержит чисел из $Sp(\bar{H})$. Выберем произвольное i, обладающее этим свойством и положим $d_0 \rightleftharpoons \partial_2(\bar{H}) \cdot g_1(\Omega, 0)^i$. Отметим, что

$$\left.\begin{array}{l} d_0 \geq \partial_2(\bar{H}),\ (d_0, d_0 \cdot g_1(\Omega, 0)) \cap Sp(\bar{H}) = \emptyset, \\ [d_0 \cdot g_1(\Omega, 0), \infty) \cap Sp(\bar{H}) \neq \emptyset \end{array}\right\} \quad (2.38)$$

в силу определения (2.37) функции f_1.

Построим теперь последовательность

$$(\Omega_0, \bar{H}^{(0)}, d_0) \to (\Omega_1, \bar{H}^{(1)}, d_1) \to \ldots \to (\Omega_t, \bar{H}^{(t)}, d_t), \qquad (2.39)$$

в которой Ω_i - обобщённое локально линейное уравнение, $\bar{H}^{(i)}$ - его решение и d_i - натуральное число. При этом пара $(\Omega_{i+1}, \bar{H}^{(i+1)})$ получается из $(\Omega_i, \bar{H}^{(i)})$ применением двух элементарных преобразований.

Полагаем $\Omega_0 = \Omega; \overline{H}^{(0)} = \overline{H}; d_0$ определено выше так, что выполнено (2.38).

Пусть тройка $(\Omega_i, \overline{H}^{(i)}, d_i)$ уже построена. Переменную неизвестную h_K обобщённого уравнения Ω_i назовём м а л о й, если $\partial(H_K^{(i)}) \leq d_i$ и б о л ь ш о й - в противном случае. Обозначим через τ_i количество элементов из $Sp(\overline{H}^{(i)})$, лежащих на отрезке $[0, d_i]$.

Предположим, что в уравнении Ω_i найдутся две переменные основы μ и λ, принадлежащие одному закрытому участку $[K, K']$, который не содержит никаких других основ. Тогда $\alpha(\mu) = \alpha(\lambda) = K; \beta(\mu) = \beta(\lambda) = K'$. Если бы нашлась граница, пересекающая основы μ и λ, то она не была бы продолжена через них граничной связью и не была бы свободной, что невозможно. Следовательно, $K' = K + 1$.

<u>Случай</u> I: уравнение Ω_i содержит две несовмещённые переменные основы μ и λ, принадлежащие одному закрытому участку $[K, K+1]$, причём $\beta(\Delta(\mu)) = \alpha(\Delta(\mu)) + 1$.

Перенесём с помощью преобразования Э.3 основу λ с основы μ на основу $\Delta(\mu)$. С помощью преобразования Э.5 удалим закрытый участок $[K, K+1]$ вместе с основой μ. Результат применения описанных преобразований к паре $(\Omega_i, \overline{H}^{(i)})$ возьмём в качестве $(\Omega_{i+1}, \overline{H}^{(i+1)})$.

Границу p обобщённого уравнения Ω_i назовём п р о д о л ж а е м о й, если она пересекает /единственную/ переменную основу μ, причём при продолжении границы p через основу μ с помощью преобразования Э.6 в решении $\overline{H}^{(i)}$ "разрезается" большая неизвестная, т.е. имеет место графическое равенство (2.14), в котором h_{q_i} - большая переменная неизвестная.

Случай 2: случай I не имеет места и уравнение Ω_i содержит продолжаемую границу P.

С помощью преобразования Э.6 продолжим границу P через основу μ. С помощью преобразования Э.2 разрежем основу по введённой граничной связи на две новых основы. Результат применения этих преобразований к паре $(\Omega_i, \bar{H}^{(i)})$ возьмём в качестве $(\Omega_{i+1}, \bar{H}^{(i+1)})$.

Мы определили пару $(\Omega_{i+1}, \bar{H}^{(i+1)})$. Число d_{i+1} в обоих случаях строится следующим образом.

Если найдётся d такое, что

$$\left.\begin{array}{l} d>d_i;\ (d_i,d]\cap Sp(\bar{H}^{(i+1)})\neq\emptyset; \\ (d, d\cdot g_1(\Omega, \tau(d)))\cap Sp(\bar{H}^{(i+1)})=\emptyset; \\ [d\cdot g_1(\Omega,\tau(d)),\infty)\cap Sp(\bar{H}^{(i+1)})\neq\emptyset \\ (\tau(d)\rightleftharpoons|[0,d]\cap Sp(\bar{H}^{(i+1)})|), \end{array}\right\} \quad (2.40)$$

то выбираем в качестве d_{i+1} наибольшее возможное d, обладающее свойствами (2.40). В противном случае полагаем $d_{i+1}\rightleftharpoons d_i$.

Построение последовательности (2.39) завершается, когда случаи I,2 не имеют места /ниже мы покажем, что такой момент действительно наступит/.

Пусть p_i - число пар постоянных и неизменных основ уравнения Ω_i; n_i' - число пар переменных основ; l_i - число закрытых участков линейной части и $\tau_i\rightleftharpoons n_i'-l_i$. Из построения вытекает, что $p_0=p_1=\ldots=p_i;\ \tau_0=\tau_1=\ldots=\tau_i=\ldots$

Предположим теперь, что к уравнению Ω_i неприменимо преобразование случая I. Тогда всякий закрытый участок $[K,K']$ линейной части принадлежит одному из следующих четырёх типов:

<u>Тип</u> I. $[K,K']$ содержит хотя бы одну постоянную основу и содержит менее трёх переменных основ,

<u>Тип</u> 2. $[K,K']$ содержит ровно две совмещённых переменных основы,

<u>Тип</u> 3. $[K,K']$ содержит ровно две основы μ и λ; обе - несовмещённые и переменные, для которых $\beta(\Delta(\mu))-\alpha(\Delta(\mu))>1$, $\beta(\Delta(\lambda))-\alpha(\Delta(\lambda))>1$ и, следовательно, закрытые участки, которым принадлежат основы $\Delta(\mu),\Delta(\lambda)$, содержат не менее трёх основ,

<u>Тип</u> 4. $[K,K']$ содержит не менее трёх переменных основ.

Число участков типа I не превосходит ρ_0.

Группа $G(\Omega_0^*)$ изоморфна группе $G(\Omega_i^*)$, и этот вывод останется справедливым, если удалить из обобщённых уравнений Ω_0,Ω_i все коэффициентные уравнения. Обозначив через $\overline{\Omega}_i$ полученное в результате такой процедуры уравнение, получим, что $G(\overline{\Omega}_i^*)$, так же, как и $G(\overline{\Omega}_0^*)$, может быть порождена $\rho_0+\omega$ элементами. С другой стороны, эндоморфизм $\hat{\hat{\pi}}: F(\overline{\Omega}_i^*)\to F(\overline{\Omega}_i^*)$, определённый равенствами $\hat{\hat{\pi}}(h_K)=h_K$, если участок $[K,K+1]$ - закрытый и ему принадлежат ровно две совмещённые переменные основы и $\hat{\hat{\pi}}(h_K)=1$ в противном случае, индуцирует гомоморфизм $\pi: G(\overline{\Omega}_i^*)\to F(\overline{\Omega}_i^*)$, ранг образа которого не превосходит $\rho_0+\omega$ в силу предложения I.2.7 [7]. Следовательно, число участков типа 2 не превосходит ρ_0.

Далее, $\tau_0=\tau_i=\sum\limits_{[i,j]}^{(1)}(\gamma_{[i,j]}-2)+\sum\limits_{[i,j]}^{(4)}(\gamma_{[i,j]}-2)$,

где $\gamma_{[i,j]}$ - число переменных основ на участке $[i,j]$, а суммы $\sum^{(1)}$ и $\sum^{(4)}$ берутся соответственно по закрытым участкам типов I и 4. Так как $\sum^{(1)}\geqslant -2\rho_0$, то

$\sum\limits_{[i,j]}^{(4)}(\gamma_{[i,j]}-2)\leq\tau_0+2p_0$, откуда вытекает, что число участков типа 4 не превосходит τ_0+2p_0.

Следовательно, общее число переменных основ $\sum\limits_{[i,j]}^{(1)}\gamma_{[i,j]}+\sum\limits_{[i,j]}^{(4)}\gamma_{[i,j]}$ на закрытых участков типов I,4 не превышает $\tau_0+2(p_0+\tau_0+2p_0)=6p_0+3\tau_0$. Если основы μ и λ образуют участок типа 3, то $\Delta(\mu)$ и $\Delta(\lambda)$ лежат на участках типа I,4. Следовательно, общее число закрытых участков типа 3 не превосходит $3p_0+1,5\tau_0$.

Суммируя найденные оценки, получим $l_i\leq p_0+\varrho_0+3p_0+1,5\tau_0+\tau_0+2p_0=6p_0+\varrho_0+2,5\tau_0$. Отсюда $n_i=\tau_0+l_i\leq\leq 6p_0+\varrho_0+3,5\tau_0\leq 6n+\varrho$. Следовательно, общее число основ, принадлежащих линейной части, не превосходит $13n+2\varrho$. Так как каждая граница, пересекающая линейную часть, касается по крайней мере двух основ, то число неизвестных, принадлежащих линейной части, не превосходит $13n+2\varrho$, а общее число неизвестных ϱ_i уравнения Ω_i не превосходит величины $13n+3\varrho$. Общее же число пар основ $n_i=n_i'+p_i$ уравнения Ω_i не превосходит $7n+\varrho$.

Эти оценки были получены в предположении, что к уравнению Ω_i неприменимы преобразования случая I. Так как преобразования случая 2 применяются лишь при этом условии, то для <u>всех</u> уравнений Ω_i в последовательности (2.39) имеют место оценки

$$\varrho_i\leq 13n+3\varrho+1=\varrho_{max}, \tag{2.41}$$

$$n_i\leq 7n+\varrho+1=n_{max}. \tag{2.42}$$

Так как все обобщённые уравнения в (2.39) имеют одни и те же граничные связи и коэффициентные уравнения, то число различных уравнений в (2.39) оценивается сверху величиной

$$n_{max}\, \rho_{max} \left(2(\rho_{max}+1)^2\right)^{2n_{max}} . \tag{2.43}$$

Преобразования случая 2 увеличивают параметр n'_i, поэтому в последовательности (2.39) может встретиться не более n_{max} таких преобразований, идущих подряд. Преобразования же случая I уменьшают параметр $\delta_1(H)$. Поэтому построение последовательности (2.39) в самом деле завершится через конечное число шагов t.

Обозначим через $\pi_i : G(\Omega_i^*) \to G(\Omega_{i+1}^*)$ изоморфизм, соответствующий композиции тех элементарных преобразований, с помощью которых Ω_{i+1} получено из Ω_i. Напомним, что через $\check{\Omega}$ обозначается уравнение, полученное из Ω удалением всех постоянных и неизменных основ, а также всех коэффициентных уравнений. Рассматриваемые элементарные преобразования зависят лишь от переменных основ и могут быть проделаны с уравнениями $\check{\Omega}_i$ вместо Ω_i. Это замечание позволяет определить изоморфизмы $\hat{\pi}_i : H(\check{\Omega}_i^*) \to H(\Omega_{i+1}^*)$, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(\check{\Omega}_i^*) & \longrightarrow & G(\Omega_i^*) \\ \Big\downarrow \hat{\pi}_i & & \Big\downarrow \pi_i \\ H(\check{\Omega}_{i+1}^*) & \longrightarrow & G(\Omega_{i+1}^*) \end{array} \tag{2.44}$$

коммутативна. При этом изоморфизмы $\hat{\pi}_i$, так же, как и π_i, индуцированы стандартными гомоморфизмами $\hat{\hat{\pi}}_i : F(\Omega_i^*) \to F(\Omega_{i+1}^*)$ из §I гл.2. В частности, $\hat{\pi}_i(h[\alpha(\mu),\beta(\mu)]) = h[\alpha(\mu),\beta(\mu)]$ для любой постоянной основы μ уравнения Ω_i и $\hat{\hat{\pi}}_i(h_k) = h_k$ для любой неизвестной $\hat{\hat{h}}_к$, лежащей в нелинейной части.

Пусть $\hat{\hat{S}}_i \rightleftharpoons \{h_к^{\pm 1} \mid h_к$ - малая переменная неизвестная уравнения $\Omega_i\}$ / $\hat{\hat{S}}_i$ рассматривается как подмножество в $F(\Omega_i^*)$/. Тогда $\hat{\hat{S}}_i$ может принимать не более $2^{\rho_{max}}$ различных значений. Пусть S_i - образ $\hat{\hat{S}}_i$ в $G(\Omega_i^*)$.

Отметим, что $\pi_i(S_i) \subseteq S_{i+1}$. В самом деле, если $h_к$ - малая переменная неизвестная уравнения Ω_i, то $\hat{\hat{\pi}}_i(h_к)$ имеет вид $h_\ell^{\pm 1}$: для преобразования случая I это вытекает из условия $\beta(\Delta(\mu)) = \alpha(\Delta(\mu)) + 1$, а для преобразования случая 2 - из требования " h_{q_i} - большая неизвестная" в определении продолжаемой границы. В силу (2.40), $d_i \le d_{i+1}$. Кроме того, $\partial(H_к^{(i)}) = \partial(H_\ell^{(i+1)})$, поэтому h_ℓ - малая переменная неизвестная уравнения Ω_{i+1}.

Отсюда вытекает, что если $\Omega_i = \Omega_j$ и $\hat{\hat{S}}_i = \hat{\hat{S}}_j$ $/0 \le i < j \le t$ /, то автоморфизм $\pi_{j-1} \ldots \pi_i : G(\Omega_i^*) \to G(\Omega_j^*)$ задаёт некоторую перестановку τ_{ij} на множестве $S_i = S_j$ мощности $\le 2\rho_{max}$. Для каждого $0 \le j \le t$ выберем наименьшее i, для которого $\langle \Omega_i, \hat{\hat{S}}_i \rangle = \langle \Omega_j, \hat{\hat{S}}_j \rangle$ и положим $\tau_j \rightleftharpoons \tau_{ij}$.

Поставим теперь в соответствие каждому натуральному числу $i (0 \le i \le t)$ следующую пятёрку:

$$tp(i) \rightleftharpoons \langle \Omega_i, T(\bar{H}^{(i)}), \tau_i, \hat{\hat{S}}_i, \tau_i \rangle.$$

В силу (2.43), (2.41), (2.42), (2.33) число различных пятёрок такого вида не превосходит $g_0(\Omega)$.

Определим теперь последовательность индексов $t = i_0 > i_1 > i_2 > \ldots > i_m = 0$ по индукции следующим образом: если

$i_k > 0$, то в качестве i_{k+1} возьмём наименьшее возможное i , для которого $tp(i_k - 1) = tp(i)$. Так как $tp(i_k) \neq$ $\neq tp(i_\ell)$ по построению / $k \neq \ell$ /, то $m \leq g_0(\Omega)$.

Одновременной индукцией по $k = 0, 1, \ldots, m$ докажем следующие два утверждения:

$$d_{i_k} = d_t , \ \partial_1(\bar{H}^{(i_k)}) \leq d_t \cdot g_2(\Omega, k, \tau_{i_k}). \qquad (2.45)$$

<u>База</u> <u>индукции</u>, $k=0, i_k = t$. Уравнение Ω_t по определению не содержит продолжаемых границ. Докажем, что для любого $\jmath \in Sp(\bar{H}^{(t)})$ выполнена оценка

$$\jmath \leq d_t . \qquad (2.46)$$

Предположим противное, т.е. для некоторой неизвестной h_k, лежащей в линейной части, справедливо неравенство

$$\partial(H_k^{(t)}) \geq d_t + 1 \qquad (2.47)$$

Пусть u - буква алфавита Σ_2 , не входящая в решение $\bar{H}^{(t)}$. Заменим в векторе $\bar{H}^{(t)}$ компоненты, соответствующие неизвестным линейной части и графически равные $(H_k^{(t)})^{\pm 1}$, буквой $u^{\pm 1}$. Отметим, что в силу 2.47 и неравенства $d_t \geq$ $\geq d_0 \geq \partial_2(\bar{H}^{(0)}) = \partial_2(\bar{H}^{(t)})$, замене подверглись лишь переменные неизвестные.

Проверим, что построенный таким образом вектор $\bar{H}^{+(t)}$ служит решением уравнения Ω_t . Вектор $\bar{H}^{+(t)}$ обращает в графическое равенство все уравнения, соответствующие постоянным или неизменным основам, а также все коэффициентные уравнения, так как входящие в них неизвестные не подвергались заменам.

Рассмотрим теперь основное уравнение

$$\left(H^{(t)}_{\alpha(\mu)} H^{(t)}_{\alpha(\mu)+1} \ldots H^{(t)}_{\beta(\mu)-1}\right)^{\varepsilon(\mu)} \underline{\circ} \left(H^{(t)}_{\alpha(\Delta(\mu))} \ldots H_{\beta(\Delta(\mu))-1}\right)^{\varepsilon(\Delta(\mu))}, \qquad (2.48)$$

соответствующее переменной основе μ. Если бы графическое равенство (2.48) нарушалось при замене $\bar{H}^{(t)}$ на $\bar{H}^{+(t)}$, то в одной из частей этого равенства нашлась бы неизвестная h_i такая, что $\partial(H_i^{(t)}) \geq \partial(H_K^{(t)}) > d_t$; $H_i^{(t)} \doteq H'H''$ /слова H' и H'' непусты/ и равенство (2.48) допускало бы разрезание по границе между H' и H''. Так как h_i - большая неизвестная, это противоречит тому, что в уравнении Ω_t нет продолжаемых границ. Следовательно, вектор $\bar{H}^{+(t)}$ удовлетворяет также и основным уравнениям, соответствующим переменным основам. Поэтому $\bar{H}^{+(t)}$ - решение уравнения Ω_t.

Очевидно, $T(\bar{H}^{+(t)}) \leq T(\bar{H}^{(t)})$. Положив в (2.15) $\delta = 1$, $\pi(u) = H_K^{(t)}$, $\pi(g) = g$ для образующих группы F_2, отличных от u, мы получим, что $\bar{H}^{+(t)} \lneq_{id} \bar{H}^{(t)}$. Таким образом, $\bar{H}^{(t)}$ не является минимальным даже относительно тривиальной группы автоморфизмов, что противоречит лемме 2.1а/.

Полученное противоречие доказывает оценку (2.46). Из неё непосредственно вытекает второе утверждение (2.45) при $K=0$, так как $g_2(\Omega, 0, \tau) = \rho_{max}$ в силу (2.35).

<u>Шаг индукции</u>. Пусть утверждения (2.45) уже доказаны для некоторого $K \leq m-1$, докажем их для $K+1$. Беря композицию коммутативных диаграмм ~~вида 2.29 для автоморфизма~~ (2.44), мы получаем коммутативную диаграмму ~~, где~~ вида (2.29) для автоморфизма $\delta = \Theta^{-1} \pi_{i_K - 2} \ldots \pi_{i_{K+1}+1} \pi_{i_{K+1}} \Theta$, где $\Theta = \pi_{i_{K+1}-1} \ldots \pi_0$. Таким образом, δ инвариантен относительно нелинейной части уравнения Ω_0 и, в силу леммы 2.7, $\delta \in P$. Так как $tp(i_K - 1) = tp(i_{K+1})$, то $T(\bar{H}^{(i_K-1)}) = T(\bar{H}^{(i_{K+1})})$. Полагая в (2.15) $\pi = 1$, $\delta = \pi_{i_{K-2}} \ldots \pi_{i_{K+1}+1} \pi_{i_{K+1}}$, мы видим, что

$\overline{H}^{(i_k-1)} \lesssim_{\Theta P \Theta^{-1}} \overline{H}^{(i_{k+1})}$. Однако решение $\overline{H}^{(i_{k+1})}$ минимально относительно группы автоморфизмов $\Theta P \Theta^{-1}$ в силу леммы 2.Iа/. Если $i_{k+1} < i_k - 1$, то на отрезке $[i_{k+1}, i_k - 1]$ последовательности (2.39) должно встретиться хотя бы одно преобразование случая I, так как $\Omega_{i_{k+1}} = \Omega_{i_k - 1}$. Поэтому $\partial(\overline{H}^{(i_{k+1})}) > \partial(\overline{H}^{(i_k-1)})$. Следовательно, в случае $i_{k+1} < i_k - 1$ найдётся хотя бы одна неизвестная h_ℓ уравнения $\Omega_{i_{k+1}}$ такая, что

$$\partial(H_\ell^{(i_{k+1})}) < \partial(H_\ell^{(i_k-1)}) \tag{2.49}$$

- иначе получится противоречие с минимальностью решения $\overline{H}^{(i_{k+1})}$.

Далее, преобразования случая I вообще не изменяют спектра решения; следовательно, не меняются и значения d_i, τ_i /если бы $d_i < d_{i+1}$, то в силу (2.38), (2.40), d_{i+1} можно было бы взять вместо d_i, что противоречит максимальности выбора d_i /. Так как при преобразовании $\langle \Omega_i, \overline{H}^{(i)}, d_i \rangle \to \langle \Omega_{i+1}, \overline{H}^{(i+1)}, d_{i+1} \rangle$ случая 2 разрезается большая неизвестная, то $\tau_i \leq \tau_{i+1}$ при этом преобразовании. Более того, если $d_i < d_{i+1}$, то $(d_i, d_{i+1}] \cap Sp(\overline{H}^{(i+1)}) \neq \emptyset$ в силу (2.40) и, следовательно, $\tau_i < \tau_{i+1}$. Таким образом, $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_i \leq \ldots$, причём всякий раз, когда $d_i < d_{i+1}$, имеет место также $\tau_i < \tau_{i+1}$. Так как $\tau_{i_{k+1}} = \tau_{i_k - 1}$ в силу $tp(i_{k+1}) = tp(i_k - 1)$, то $d_{i_{k+1}} = d_{i_k - 1}$.

Допустим вначале, что h_ℓ в (2.49) - малая переменная неизвестная уравнения $\Omega_{i_{k+1}}$. Тогда, в силу равенства $\hat{\hat{S}}_{i_{k+1}} = \hat{\hat{S}}_{i_k - 1}$, h_ℓ является также малой неизвестной уравнения $\Omega_{i_k - 1}$. Так как $b_{i_{k+1}} = b_{i_k - 1}$ в силу

$tp(i_{k+1})=tp(i_k-1)$, то $\delta_{i_{k+1}, i_k-1}=id$, откуда $\pi_{i_k-2}\ldots\pi_{i_{k+1}+1}\pi_{i_{k+1}}(h_\ell)=h_\ell$. Следовательно, $H_\ell^{(i_{k+1})} \doteq H_\ell^{(i_k-1)}$. Этот же вывод справедлив, если h_ℓ - постоянная неизвестная. Значит, неизвестная h_ℓ в (2.49) может быть лишь большой переменной неизвестной уравнения $\Omega_{i_{k+1}}$.

Если бы было $d_{i_k-1}<d_{i_k}$, то в силу (2.40), $[d_{i_k}\cdot g_1(\Omega, r_{i_k}),\infty)\cap Sp(\bar H^{(i_k)})\neq\emptyset$. Отсюда последовало бы $\delta_1(\bar H^{(i_k)})>d_t\cdot g_1(\Omega, r_{i_k})$, что противоречит индуктивному предположению (2.45) /$k\leq m-1<g_0(\Omega)$/ в силу (2.36). Таким образом, $d_{i_{k+1}}=d_{i_k-1}=d_{i_k}=d_t$, что доказывает первое утверждение в (2.45).

Если $i_{k+1}=i_k-1$, то $\delta_1(\bar H^{(i_{k+1})})\leq 2\delta_1(\bar H^{(i_k)})\leq$ $\leq 2d_t\, g_2(\Omega, k, r_{i_{k+1}})$.

Если $i_{k+1}<i_k-1$, то из (2.49), очевидного неравенства $\delta(H_\ell^{(i_k-1)})\leq\delta_1(\bar H^{(i_k)})$, индуктивного предположения и убывания функции g_2 по третьему аргументу получаем $\delta(H_\ell^{(i_{k+1})})<d_t\cdot g_2(\Omega, k, r_{i_{k+1}})$. Хотя бы в одном из интервалов $(d_t\cdot g_2(\Omega, k, r_{i_{k+1}})\cdot g_1(\Omega, r_{i_{k+1}+1})^i,$ $d_t\cdot g_2(\Omega, k, r_{i_{k+1}})\cdot g_1(\Omega, r_{i_{k+1}+1})^{i+1})$ $(0\leq i\leq \rho_{max})$ нет чисел из $Sp(\bar H^{(i_{k+1})})$; пусть это интервал $(d, d\cdot g_1(\Omega, r_{i_{k+1}+1}))$. Так как h_ℓ - большая неизвестная уравнения $\Omega_{i_{k+1}}$, то $\delta(H_\ell^{(i_{k+1})})\in(d_t, d]$. Поэтому $[d_t\cdot g_2(\Omega, k, r_{i_{k+1}})\, g_1(\Omega, r_{i_{k+1}+1})^{\rho_{max}+1},\infty)$ не может содержать чисел из $Sp(\bar H^{(i_{k+1})})$ - в противном случае d удовлетворяло бы (2.40) и мы получили бы противоречие с выбором $d_{i_{k+1}}$. Отсюда

$$\delta_1(\bar{H}^{(i_{k+1})}) \leq d_t \cdot g_2(\Omega, k, r_{i_{k+1}}) \cdot g_1(\Omega, r_{i_{k+1}+1})^{\rho_{max}+1} \times$$

$\times \rho_{max} = d_t \cdot g_2(\Omega, k+1, r_{i_{k+1}})$ в силу (2.35).

Итак, утверждения (2.45) доказаны для всех k. В частности, при $k=m$ получаем $\delta_1(\bar{H}) \leq d_0 \cdot g_2(\Omega, 0, r_0)$, что противоречит (2.38), (2.36).

Полученное противоречие с предположением $\delta_1(\bar{H}) > \delta_1(\Omega) \cdot \delta_2(\bar{H})$ завершает доказательство леммы 2.8.

§4. Автоморфизмы периодизированных уравнений.

Как и в двух предыдущих параграфах, предположим вначале, что Ω не содержит граничных связей и является совместным. Периодической структурой уравнения Ω назовём пару $\langle P, R\rangle$, где P - некоторое множество неизвестных, основ и закрытых участков уравнения Ω, а R - отношение эквивалентности на некотором множестве границ /которое будет описано ниже - см. пункт д//, обладающую следующими шестью свойствами:

а/ если $h_i \in P$ и $h_i \in \mu$, то $\mu \in P$, причём $\forall h_i \in P (\gamma_i \geq 1)$,

б/ если $\mu \in P$, то $\Delta(\mu) \in P$,

в/ если $\mu \in P$ и $\mu \in [i,j]$, то $[i,j] \in P$,

г/ существует функция χ, отображающая множество закрытых участков из P в $\{-1,+1\}$ такая, что для любых $\mu, [i_1,j_1], [i_2,j_2] \in P$ из $\mu \in [i_1,j_1]$ и $\Delta(\mu) \in [i_2,j_2]$ вытекает $\varepsilon(\mu) \cdot \varepsilon(\Delta(\mu)) = \chi([i_1,j_1]) \cdot \chi([i_2,j_2])$,

д/ R является отношением эквивалентности на множестве тех границ l, для которых найдётся $[i,j] \in P$ такой, что $i \leq l \leq j$. При этом, если граница l закрытая и оба закрытых участка $[i,\ell], [\ell,j]$ принадлежат $\mathcal{P}$, то мы рассматриваем два экземпляра границы ℓ, никак не связанные друг с другом, один из которых относим к $[i,\ell]$, а другой - к $[\ell,j]$,

е/ если $\mu \in \mathcal{P}$, то $R(\alpha(\mu), \alpha(\Delta(\mu))), R(\beta(\mu), \beta(\Delta(\mu)))$ в случае $\varepsilon(\mu)=\varepsilon(\Delta(\mu))$ и $R(\alpha(\mu), \beta(\Delta(\mu))), R(\beta(\mu), \alpha(\Delta(\mu)))$ в случае $\varepsilon(\mu)=-\varepsilon(\Delta(\mu))$. При этом границы $\alpha(\mu), \beta(\mu)$ относятся к тому закрытому участку, на котором лежит основа μ.

Решение H обобщённого уравнения Ω назовём периодическим относительно периода P /P - некоторое простое циклически несократимое слово/, если для любого закрытого участка $[i,j]$, содержащего хотя бы одну основу, либо $\partial(H[i,j])=1$, либо слово $H[i,j]$ представляется в виде

$$\left.\begin{aligned} &H[i,j] \doteq A^{r}A_1 \,(r\geq 1, A\doteq A_1A_2, A - \text{простое слово},\\ &\qquad \partial(A)\leq \partial(P)), \end{aligned}\right\} \quad (2.50)$$

причём хотя бы для одного такого участка слово A в представлении (2.50) является циклическим сдвигом слова $P^{\pm 1}$ и $r\geq 2$.

Покажем теперь, как с каждым решением $\overline{H}$ обобщённого уравнения Ω, периодическим относительно периода P, связать периодическую структуру $\langle \mathcal{P}, R\rangle$, которая будет обозначаться через $\mathcal{P}(\overline{H}, P)$. Внесём закрытый участок $[i,j]$ в список $\mathcal{P}$ в том и только том случае, когда он содержит хотя бы одну основу и обладает представлением (2.50), в котором A - циклический сдвиг слова $P^{\pm 1}$ и $r\geq 2$. Неизвестную h_i внесём в список $\mathcal{P}$ в том и только том случае, когда h_i принадлежит закрытому участку из $\mathcal{P}$ и $\partial(H_i)\geq 2\partial(P)$. Основу μ внесём в $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда либо μ либо $\Delta(\mu)$ содержит некоторую неизвестную из $\mathcal{P}$.

Для определённого таким образом множества $\mathcal{P}$ пункты а,б/ определения периодической структуры проверяются тривиально.

Пусть $\mu \in \mathcal{P}$ и $\mu \in [i,j]$. Существует неизвестная $h_k \in \mathcal{P}$ такая, что $h_k \in \mu$ или $h_k \in \Delta(\mu)$. Если $h_k \in \mu$, то, очевидно, $[i,j] \in \mathcal{P}$. Если $h_k \in \Delta(\mu)$ и $\Delta(\mu) \in [i',j']$, то $[i',j'] \in \mathcal{P}$ и, следовательно, слово $H[\alpha(\Delta(\mu)), \beta(\Delta(\mu))]$ записывается в виде $Q^{\tau'} Q_1$, где $Q \doteq Q_1 Q_2$, Q – циклический сдвиг слова $P^{\pm 1}$ и $\tau' \geqslant 2$. Пусть теперь (2.50) – представление для участка $[i,j]$. Тогда $H[\alpha(\mu), \beta(\mu)] \doteq B^{\gamma} B_1$, где B – циклический сдвиг слова $A^{\pm 1}$, $\partial(B) \leqslant \partial(P)$, $B \doteq B_1 B_2$, $\gamma \geqslant 0$. Из равенства $H[\alpha(\mu), \beta(\mu)]^{\varepsilon(\mu)} \doteq$ $\doteq H[\alpha(\Delta(\mu)), \beta(\Delta(\mu))]^{\varepsilon(\Delta(\mu))}$ и леммы I.2.9 [I] вытекает, что B – циклический сдвиг слова $Q^{\pm 1}$. Следовательно, A – циклический сдвиг слова $P^{\pm 1}$ и $\tau \geqslant 2$ в (2.50), так как $\partial(H[i,j]) \geqslant \partial(H[\alpha(\mu), \beta(\mu)]) \geqslant 2\partial(P)$. Тем самым, $[i,j] \in \mathcal{P}$, т.е. выполняется пункт в/ определения периодической структуры.

Положим $\chi([i,j]) = \pm 1$ в зависимости от того, сопряжено ли в (2.50) слово A с P или с P^{-1}. Если $\mu \in [i_1, j_1]$, $\Delta(\mu) \in [i_2, j_2]$ и $\mu \in \mathcal{P}$, то равенство $\varepsilon(\mu) \cdot \varepsilon(\Delta(\mu)) =$ $= \chi([i_1, j_1]) \cdot \chi([i_2, j_2])$ вытекает из того, что при $A^{\tau} A_1 \doteq B^{\gamma} B_1$ и $\tau, \gamma \geqslant 2$ слово A не может быть ~~сопряжено~~ с циклическим сдвигом слова B^{-1}. Итак, пункт г/ также справедлив.

Пусть теперь $[i,j] \in \mathcal{P}$ и $i \leqslant l \leqslant j$. Тогда существует разбиение $P \doteq P_1 P_2$, такое, что если $\chi([i,j]) = 1$, то слово $H[i,l]$ является концом слова $(P^{\infty}) P_1$ и $H[l,j]$ – началом слова $P_2 (P^{\infty})$, а если $\chi([i,j]) = -1$, то слово $H[i,l]$ является концом слова $(P^{-1})^{\infty} P_2^{-1}$ и $H[l,j]$ – началом $P_1^{-1} (P^{-1})^{\infty}$. Снова из леммы I.2.9 [I] вытекает, что разбиение $P \overset{\circ}{=} P_1 P_2$ с указанными свойствами единственно; обозначим его через $\delta(\ell)$. Отношение R определим следующим образом: $R(\ell_1, \ell_2) \rightleftharpoons \delta(\ell_1) = \delta(\ell_2)$. Пункт д/ определения периодической структуры выполнен очевидным образом.

Пункт е/ вытекает из графического равенства $H[\alpha(\mu), \beta(\mu)]^{\varepsilon(\mu)} \overset{\circ}{=} H[\alpha(\Delta(\mu)), \beta(\Delta(\mu))]^{\varepsilon(\Delta(\mu))}$ и леммы 1.2.9 [I].

Зафиксируем теперь некоторую непустую периодическую структуру $\langle \mathcal{P}, R \rangle$. Пункт г/ позволяет считать /после замены неизвестных $h_i, \dots, h_{j-1}$ на $h_{j-1}^{-1}, \dots, h_i^{-1}$ на тех участках $[i,j] \in \mathcal{P}$, для которых $\chi([i,j]) = -1$ /, что $\varepsilon(\mu) = 1$ для всех $\mu \in \mathcal{P}$. Для границы K через (K) будем обозначать класс эквивалентности отношения R, в котором она лежит.

Построим ориентированный граф Γ, взяв в качестве множества его вершин классы R-эквивалентности. Для каждой неизвестной h_K, лежащей на некотором закрытом участке из $\mathcal{P}$, вводим направленное ребро e, ведущее из (K) в $(K+1)$ и обратное ребро e^{-1}, ведущее из $(K+1)$ в (K). Это ребро e снабжается меткой $h(e) \rightleftharpoons h_K$ /соответственно, $h(e^{-1}) \rightleftharpoons h_K^{-1}$ /. Для каждого пути $\tau = e_1^{\pm 1} \dots e_s^{\pm 1}$ в графе Γ через $h(\tau)$ обозначим его метку $h(e_1^{\pm 1}) \dots h(e_s^{\pm 1})$. Периодическую структуру $\langle \mathcal{P}, R \rangle$ назовём **с в я з н о й**, если связен граф Γ. Предположим вначале, что $\langle \mathcal{P}, R \rangle$ связна.

ЛЕММА 2.9? Пусть $\bar{H}$ - решение обобщённого уравнения Ω, периодическое относительно некоторого периода P, $\langle \mathcal{P}, R \rangle = \mathcal{P}(\bar{H}, P)$; c - цикл в графе Γ, начинающийся в вершине (ℓ); $\delta(\ell) = P_1 P_2$. Тогда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $H(c) = (P_2 P_1)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если e - ребро в графе Γ, ведущее из вершины V' в вершину V'' и $P \overset{\circ}{=} P_1' P_2'$, $P \overset{\circ}{=} P_1'' P_2''$ -

разбиения, соответствующие границам из V', V'' соответственно, то, очевидно, $H(e)=P_2' P''^{n_k} P_1''\ (n_k \in \mathbb{Z})$. Утверждение леммы получается, если перемножить найденные значения $H(e)$ для всех рёбер e, входящих в цикл c.

Обобщённое уравнение Ω назовём периодизированным относительно периодической структуры $\langle P, R\rangle$ этого уравнения, если для любых двух циклов c_1 и c_2 в графе Γ, начинающихся в одной вершине, в группе $G(\Omega^*)$ выполнено равенство

$$[h(c_1), h(c_2)]=1. \tag{2.51}$$

Пусть Γ_0 - подграф графа Γ с тем же множеством вершин, состоящий из тех рёбер e, метки которых не принадлежат P. Выберем остовный лес T_0 графа Γ_0 и расширим его до остовного леса T графа Γ. Так как $\langle P, R\rangle$, по предположению, связна, то T - дерево. Пусть V_0 - произвольная выделенная вершина графа Γ; $\tau(V_0, V)$ - /единственный/ путь из V_0 в V, все рёбра которого принадлежат T. Для каждого ребра $e: V \to V'$, не лежащего в T, введём цикл $c_e = \tau(V_0, V)\, e\, (\tau(V_0, V'))^{-1}$. Тогда /см. доказательство предложения 3.2.I [7] / фундаментальная группа $\pi_1(\Gamma, V_0)$ порождается циклами c_e. Отсюда и из леммы I.2 вытекает, что свойство обобщённого уравнения "быть периодизированным относительно данной периодической структуры" алгоритмически разрешимо.

Далее, множество элементов

$$\{h(e) \mid e \in T\} \cup \{h(c_e) \mid e \notin T\} \tag{2.52}$$

образует базис свободной группы с множеством образующих $\{h_k \mid h_k$ - неизвестная, лежащая на закрытом участке из $P\}$. Если $\mu \in P$, то $(\beta(\mu)) = (\beta(\Delta(\mu))), (\alpha(\mu)) = (\alpha(\Delta(\mu)))$ в силу пункта е/ определения периодической структуры и, следовательно, слово $h[\alpha(\mu),\beta(\mu)]h[\alpha(\Delta(\mu)),\beta(\Delta(\mu))]^{-1}$ является меткой некоторого цикла $C'(\mu)$ из $\pi_1(\Gamma,(\alpha(\mu)))$. Пусть $C(\mu)\rightleftharpoons \tau(V_0,(\alpha(\mu)))C'(\mu)\tau(V_0,(\alpha(\mu)))^{-1}$. Тогда

$$h(C(\mu))=u\,h[\alpha(\mu),\beta(\mu)]\,h[\alpha(\Delta(\mu)),\beta(\Delta(\mu))]^{-1}u^{-1}, \qquad (2.53)$$

где u - некоторое слово. Так как $C(\mu)\in\pi_1(\Gamma,V_0)$, то $C(\mu)=b_\mu(\{C_e\mid e\notin T\})$, где b_μ - некоторое слово от указанных образующих, эффективно строящееся на основании доказательства предложения 3.2.I [7] .

Пусть $\tilde{b}_\mu$ обозначает прокоммутированное слово b_μ . Обозначим через $\tilde{Z}$ свободную абелеву группу, состоящую из формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{e\notin T} n_e\tilde{C}_e\ (n_e\in\mathbb{Z})$, а через $\tilde{B}$ - её подгруппу, порождённую элементами $\tilde{b}_\mu\,(\mu\in P)$ и элементами $\tilde{C}_e\,(e\notin T,\ h(e)\notin P)$. Пусть $\tilde{A}=\tilde{Z}/\tilde{B}$, $T(\tilde{A})$- группа кручения группы $\tilde{A}$ и $\tilde{Z}_1$ - прообраз $T(\tilde{A})$ в $\tilde{Z}$. Группа $\tilde{Z}/\tilde{Z}_1$ свободна и, следовательно, существует разложение вида

$$\tilde{Z}=\tilde{Z}_1\oplus\tilde{Z}_2,\ \tilde{B}\subseteq\tilde{Z}_1,\ (\tilde{Z}_1:\tilde{B})<\infty. \qquad (2.54)$$

Отметим, что можно эффективно найти выражение некоторого базиса $\tilde{C}^{(1)},\tilde{C}^{(2)}$ группы $\tilde{Z}$ через образующие $\tilde{C}_e$ так, что для подгрупп $\tilde{Z}_1,\tilde{Z}_2$, порождённых множествами $\tilde{C}^{(1)},\tilde{C}^{(2)}$ соответственно, выполнено соотношение (2.54) . Для этого достаточно, например, перебирать базисы один за другим, воспользовавшись тем, что при условии $\tilde{Z}=\tilde{Z}_1\oplus\tilde{Z}_2$ соотношения $\tilde{B}\subseteq\tilde{Z}_1$, $(\tilde{Z}_1:\tilde{B})<\infty$ эквивалентны тому, что образующие групп $\tilde{B}$ и $\tilde{Z}_1$ порождают одно и то же линейное пространство над $\mathbb{Q}$, а это легко проверяется алгоритмически /более экономный алгоритм можно построить на основании анализа доказательства теоремы о классификации конечнопорождённых абелевых групп/. В силу предложения I.4.4 [7], можно эффективно построить базис $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ свободной /неабелевой/ группы $\pi_1(\Gamma, V_0)$ так, что $\tilde{C}^{(1)}, \tilde{C}^{(2)}$ - естественные образы элементов $\bar{C}^{(1)}, \bar{C}^{(2)}$ в $\tilde{Z}$.

Назовём обобщённое уравнение Ω **сингулярным** относительно связной периодической структуры $\langle P, R \rangle$, если выполнено хотя бы одно из следующих трёх условий:

а/ Ω не периодизировано относительно $\langle P, R \rangle$,

б/ $rg(A \otimes Q) \geq 2$,

в/ $rg(A \otimes Q) = 1$ и существует $e \notin T$ такое, что $h(e) \notin P$ и $h(C_e) \neq 1$ в группе $G(\Omega^*)$.

В противном случае уравнение Ω назовём **регулярным**. Таким образом, Ω регулярно относительно $\langle P, R \rangle$ тогда и только тогда, когда Ω периодизировано и $rg(A \otimes Q) \leq 1$, причём в случае $rg(A \otimes Q) = 1$ для всех $e \notin T$ таких, что $h(e) \notin P$, имеем $h(C_e) = 1$ в группе $G(\Omega^*)$. Определения сингулярности и регулярности формально зависят от дерева T, поэтому мы считаем, что T фиксировано раз и навсегда произвольным образом.

Предположим теперь, что $\langle P, R \rangle$ - произвольная периодическая структура обобщённого уравнения Ω, не обязательно связная. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ - компоненты связности построенного выше графа Γ. Метки на рёбрах компоненты Γ_i образуют в уравнении Ω объединение закрытых участков из P, причём, если основа $\mu \in P$ принадлежит одному из таких участков, то её двойник $\Delta(\mu)$, в силу пункта е/ определения периодической структуры, также обладает этим свойством. Поэтому, беря в качестве P_i множество меток на рёбрах из Γ_i, принадлежащих $\mathcal{P}$, участки, которым эти метки принадлежат и основы $\mu \in \mathcal{P}$, принадлежащие этим участкам, и ограничивая соответствующим образом отношение R, мы получим периодическую связную структуру $\langle \mathcal{P}_i, R_i \rangle$ с графом Γ_i. Назовём обобщённое уравнение Ω сингулярным относительно $\langle \mathcal{P}, R \rangle$, если оно сингулярно относительно хотя бы одной структуры $\langle \mathcal{P}_i, R_i \rangle (1 \le i \le r)$ и регулярным - в противном случае.

Запись $\langle \mathcal{P}', R' \rangle \le \langle \mathcal{P}, R \rangle$ будет обозначать, что $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ и отношение R' является ограничением отношения R. В частности, $\langle \mathcal{P}_i, R_i \rangle \le \langle \mathcal{P}, R \rangle$ в только что рассмотренной ситуации.

ЛЕММА 2.10. Пусть Ω - совместное обобщённое уравнение без граничных связей, сингулярное относительно периодической структуры $\langle \mathcal{P}, R \rangle$ этого уравнения. Тогда можно эффективно построить группу автоморфизмов P_0 группы $G(\Omega^*)$, которая является либо канонической, либо тривиальной, и конечное семейство циклов $C_1, \ldots, C_r$ в графе Γ так, что $h(C_i) \ne 1 \; (1 \le i \le r)$ в группе $G(\Omega^*)$ и справедливо следующее утверждение.

Если решение $\bar{H}$ обобщённого уравнения Ω периодическое относительно некоторого периода P и $\langle \mathcal{P}, R \rangle \Leftarrow = \Leftarrow \mathcal{P}(H, P)$, то существует решение $\bar{H}^+$ системы уравнений Ω^* со следующими тремя свойствами:

а/ $\exists\, \sigma \in P_0 \; (\pi_{\bar{H}^+} = \pi_{\bar{H}}\, \sigma)$,

б/ $\exists i (1 \le i \le r)\,(H^+(C_i) = 1)$,

в/для любой $h_k \in \mathcal{P}$ существует разбиение $Q \doteq Q_1 Q_2$ некоторого слова Q, сопряжённого с P^{-1} такое, что $H_k = Q_1 Q^n Q_2$, $H_k^+ = Q_1 Q^{n^+} Q_2$ для некоторых $n, n^+ \in \mathbb{Z}$, а для любой $h_k \notin P$ справедливо $H_k^+ \doteq H_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем ту компоненту связности Γ_i графа Γ, для которой уравнение Ω сингулярно относительно соответствеющей связной периодической структуры и заменим с самого начала $\langle P, R \rangle$ на эту структуру. Таким образом, можно ограничиться случаем, когда Γ связен.

Если Ω не является периодизированным, то положим $P_0 = 1$. В качестве списка циклов $\{C_i\}$ возьмём какой-либо цикл $[C_{e_1}, C_{e_2}]$ $(e_1, e_2 \notin T)$, для которого $[h(C_{e_1}), h(C_{e_2})] \neq 1$ в $G(\Omega^*)$ /это делается эффективно на основании леммы I.2/. Для решения $\bar{H}$ положим $\bar{H}^+ = \bar{H}$. Пункты а/, в/ заключения леммы очевидны, а пункт б/ вытекает из леммы 2.9.

Предположим теперь, что Ω периодизировано и $rg(A \otimes Q) \geq 2$. Включив в систему Ω^* уравнения (2.51) для всех пар циклов C_{e_1}, C_{e_2} $(e_1, e_2 \notin T)$, получим эквивалентную систему уравнений. Рассмотрим в свободной группе $F(\Omega^*)$ новый базис $\bar{a}, \bar{x}$, составленный из $\bar{a}$, неизвестных, не лежащих на закрытых участках из P, неизвестных $\{h(e) \mid e \in T\}$ и слов $h(\bar{C}^{(1)}), h(\bar{C}^{(2)})$, построенных выше /ср. с (2.52) /. Отметим, что $|\bar{C}^{(2)}| = rg(A \otimes Q) \geq 2$. Положим $y_1 = h(C_1^{(2)})$, $y_2 = h(C_2^{(2)})$; остальные неизвестные из списка $\bar{x}$ отнесём к вектору $\bar{z}$. Проверим, что все уравнения системы Ω^* могут быть переписаны по модулю соотношений (2.5I) в виде $\bar{\Psi}^{(0)}(\bar{z}, \bar{a}) = 1$.

Если $h_k \notin P$, то h_k равна по модулю (2.5I) слову от $\bar{z}, \bar{a}$. В самом деле, это очевидно, если h_k не лежит на закрытом участке из P или если $e \in T$, где $h(e) = h_k$. Если же $e \notin T$, то $e = r_1 C_e r_2$, где r_1, r_2 - пути в дереве T. Очевидно, $h(r_1), h(r_2)$ - слова от $\bar{z}, \bar{a}$. Так как $\tilde{C}_e \in \tilde{B} \subseteq \tilde{Z}_1$, то $\tilde{C}_e$ лежит в подгруппе, порождённой $\tilde{\bar{C}}^{(1)}$. Следовательно, элемент $h(c_e)$ по модулю соотношений коммутации (2.5I) также может быть записан в виде слова от $\bar{C}^{(1)} \subseteq \bar{z}$.

Из доказанного непосредственно вытекает, что все коэффициентные уравнения и все основные уравнения, соответствующие основам $\mu \notin \mathcal{P}$, могут быть записаны по модулю (2.5I) в виде $\bar{\Psi}^{(1)}(\bar{z},\bar{a})=1$. Если же $\mu \in \mathcal{P}$, то основное уравнение с номером μ в силу (2.53) может быть записано в виде $h(c(\mu))=1$ и, в силу $\tilde{b}_\mu \in \tilde{B} \subseteq \tilde{Z}_1$, получаем, как и выше, что оставшиеся основные уравнения также могут быть переписаны по модулю (2.5I) в виде $\bar{\Psi}^{(2)}(\bar{z},\bar{a})=1$. Положим $\bar{\Psi}^{(0)}=\bar{\Psi}^{(1)} \cup \bar{\Psi}^{(2)}$.

Соотношения (2.5I), выражающие коммутативность группы $h(\pi_1(V_0,\Gamma))$, могут быть, в свою очередь, переписаны в виде

$$\left.\begin{aligned} &[h(c),h(c')]=[y_1,y_2]=[y_1,h(c)]=[y_2,h(c)]=1 \\ &\quad (c,c' \in \bar{C}^{(1)}, C_3^{(2)}, C_4^{(2)},\dots,C_m^{(2)}). \end{aligned}\right\} \quad (2.55)$$

Система $\bar{\varphi}$, полученная объединением уравнений из списков $\bar{\Psi}^{(0)}$ и (2.55), эквивалентна Ω^*, так что имеет место естественный изоморфизм между $G(\Omega^*)$ и $G(\bar{\varphi})$. Относя к списку $\bar{\Psi}$ уравнения из $\bar{\Psi}^{(0)}$ и уравнения $[h(c),h(c')]=1$ в (2.55), а к списку $\bar{\Theta}$ - оставшиеся уравнения (2.55), мы получим представление (I.8), с которым можно связать каноническую группу автоморфизмов P_0 типа 2. В список циклов $C_1,\dots,C_r$ включим единственный цикл $C_1^{(2)}$.

Если уравнение Ω имеет хотя бы одно решение /в противном случае лемма очевидна/, то решением $\bar{Z}$ обладает и система $\bar{\Psi}$. Выбирая в качестве Y_1 и Y_2 произвольное неединичное слово, коммутирующее с компонентами $\bar{C}^{(1)}, C_3^{(2)},\dots,C_m^{(2)}$ решения $\bar{Z}$, мы получим решение системы $\bar{\varphi}$, откуда вытекает, что $h(C_1^{(1)}) \neq 1$ в группе $G(\Omega^*)$.

Пусть решение $\bar{H}$ обобщённого уравнения Ω периодично относительно периода P и $\langle \mathcal{P}, R \rangle \subseteq \mathcal{P}(\bar{H}, P)$. В силу леммы 2.9, $H(C_1^{(1)}) = Q^{n_1}$, $H(C_2^{(2)}) = Q^{n_2}$ для некоторого циклического сдвига Q слова $P^{\pm 1}$, так что в базисе $y_1, y_2, \bar{z}, \bar{a}$ решение $\bar{H}$ переписывается в виде $Y_1, Y_2, \bar{Z}$, где $Y_1 = Q^{n_1}$, $Y_2 = Q^{n_2}$. Следовательно, можно найти $\delta \in P_0$ такой, что для решения $\bar{H}^+$ системы Ω^*, определённого пунктом а/, будет иметь место $Y_1^+ = 1$, т.е. $H^+(C_1^{(1)}) = 1$. Если $h_k \in \mathcal{P}$ и $h_k = h(e)$, $e \in T$, то $H_k^+ \doteq H_k$, так как $\delta(\bar{z}) = \bar{z}$. Если же $h_k = h(e)$, $e \notin T$, то $H_k^+ = H_k^+(e) = H^+(\gamma_1) H^+(C_e) H^+(\gamma_2) = H(\gamma_1) H^+(C_e) H(\gamma_2)$. Так как C_e лежит в подгруппе, порождённой циклами $\bar{C}^{(1)}, \bar{C}^{(2)}$, то $H^+(C_e)$ и $H(C_e)$ лежат в циклической группе, порождённой словом Q. Если, кроме того, $h_k \notin \mathcal{P}$, то C_e по модулю соотношений коммутации (2.5I) лежит в подгруппе, порождённой циклами $\bar{C}^{(1)}$, откуда $H^+(C_e) = H(C_e)$. Это завершает проверку пункта в/ доказываемой леммы.

Пусть, наконец, Ω периодизировано, $rg(A \otimes Q) = 1$, $e_0 \notin T$, $h(e_0) \notin \mathcal{P}$ и $h(C_{e_0}) \neq 1$ в группе $G(\Omega^*)$. Так же, как и выше, построим систему уравнений $\bar{\varphi}$, эквивалентную Ω^* и полученную объединением некоторого списка $\bar{\Psi}^{(0)}$, в который не входит неизвестная $w \rightleftharpoons h(C_1^{(1)})$ и соотношений коммутации

$$[w, h(c)] = 1 \quad (c \in \bar{C}^{(1)}), \tag{2.56}$$

$$[h(c), h(c')] = 1 \quad (c, c' \in \bar{C}^{(1)}), \tag{2.57}$$

аналогичных (2.55). Вводя новую неизвестную u и добавляя уравнения

$$u=h(c_{e_0});\ w^{-1}uw=h(c_{e_0});\ [u,h(c)]=1\ (c\in\bar{c}^{(1)}), \qquad (2.58)$$

мы получим систему, эквивалентную исходной, так как $h(c_{e_0})$ лежит в подгруппе, порождённой w и $\bar{c}^{(1)}$ и, более того, в силу $h(e_0)\notin P$, может быть записана по модулю соотношений коммутации в виде слова от $\bar{C}^{(1)}$. Разобьём уравнения полученной системы на два списка, $\bar{\Psi}$ и $\bar{\Theta}$, отнеся к $\bar{\Psi}$ уравнения $\Psi^{(0)}$ и (2.57), а к списку $\bar{\Theta}$ - уравнения (2.56), (2.58). Мы получим представление вида (1.10), с которым можно связать каноническую группу автоморфизмов P_0 типа 3. В качестве списка $c_1,\dots,c_r$ возьмём циклы вида $c_{e_0}^{i}(c_1^{(2)})^{j}$, где i,j пробегают пары целых чисел, не равных одновременно нулю и такие, что $|i|,|j|\le 2\rho$ (ρ - число неизвестных уравнения Ω).

Проверим, что если $h(c_{e_0})^{i}h(c_1^{(2)})^{j}=1$ в группе $G(\Omega^*)$, то $i=j=0$. Предположим, что $h(c_{e_0})^{i}h(c_1^{(2)})^{j}=1$ в $G(\Omega^*)$. Образующий δ_0 группы автоморфизмов P_0 переводит $h(c_{e_0})$ в $h(c_{e_0})$ и $h(c_1^{(2)})$ в $h(c_{e_0})h(c_1^{(2)})$ так что, в силу периодизированности уравнения Ω, $h(c_{e_0})^{i+j}h(c_1^{(2)})^{j}=1$ в $G(\Omega^*)$ и, следовательно, $h(c_{e_0})^{j}=1$ в $G(\Omega^*)$. Если $j\neq 0$, то мы получим отсюда $h(c_{e_0})=1$ в $G(\Omega^*)$, так как свободные группы не имеют кручения, а $G(\Omega^*)$ аппроксимируется свободными группами. Однако, по условию, $h(c_{e_0})\neq 1$ и, значит, $j=0$. Из $h(c_{e_0})^{i}=1$ теперь аналогично получаем $i=0$.

Пусть решение $\bar{H}$ обобщённого уравнения Ω периодично относительно периода P и $\langle P,R\rangle\subseteq P(\bar{H},P)$. Заметим, что $e_0=r_1 c_{e_0} r_2$, где r_1,r_2 - пути в дереве T. Так как $e_0 \in \Gamma_0$, то начальная и конечная вершины ребра e_0 лежат в одной компоненте связности графа Γ_0 и, следовательно, соединены путём $\mathfrak{I}$ в лесе T_0. Далее, τ_1 и $\mathfrak{I}\tau_2^{-1}$ являются путями в дереве T, соединяющими одни и те же вершины, следовательно $\tau_1 = \mathfrak{I}\tau_2^{-1}$. Таким образом, $C_{e_0} = \tau_2 C'_{e_0} \tau_2^{-1}$, где C'_{e_0} - некоторый цикл графа Γ_0.

Из равенства $H(C_{e_0}) = H(\tau_2) H(C'_{e_0}) H(\tau_2)^{-1}$ вытекает, что циклически неприводимые слова $H(C_{e_0})$ и $H(C'_{e_0})$ сопряжены и, следовательно, $\partial(H(C_{e_0})) = \partial(H(C'_{e_0})) \leq 2\varsigma\partial(P)$, так как цикл C'_{e_0} - простой и для любой неизвестной $h_k \notin \mathcal{P}$ выполнено $\partial(H_k) < 2\partial(P)$ по определению структуры $\mathcal{P}(\bar{H}, P)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\delta(V_0) = 1P$, так что, на основании леммы 2.9, $H(C_{e_0}) \doteq P^{n_0}$, $H(C_1^{(2)}) = W \doteq P^{n}$ $(|n_0| \leq 2\varsigma)$.

Если $n_0 = 0$, то для пункта б/ мы можем взять $b = 1$, $\bar{H}^+ = \bar{H}$ и цикл C_{e_0}.

Пусть $n_0 \neq 0$, $n = tn_0 + n'$, $|n'| \leq 2\varsigma$. Возьмём в качестве b степень b_0^t образующей b_0 и определим вектор $\bar{H}^+$ формулой а/ из заключения доказываемой леммы. Пункт в/ проверяется так же, как в предыдущем случае. В пункте б/ можно взять цикл $(C_{e_0})^{-n'} (C_1^{(2)})^{n_0}$, так как $H^+(C_{e_0}) \doteq P^{n_0}$, $H^+(C_1^{(2)}) \doteq P^{n'}$. Лемма 2.10 полностью доказана.

ЛЕММА 2.11. Пусть Ω - совместное обобщённое уравнение без граничных связей, регулярное относительно периодической структуры $\langle \mathcal{P}, R \rangle$. Тогда можно эффективно построить группу автоморфизмов P_0 группы $G(\Omega^*)$, порождённую конечным числом канонических групп автоморфизмов так, что выполнено следующее утверждение.

Пусть $\bar{H}$ - решение обобщённого уравнения Ω, периодичное относительно некоторого периода P и $\langle \mathcal{P}, R\rangle = \mathcal{P}(\bar{H}, P)$. Если решение $\bar{H}$ минимально относительно группы автоморфизмов P_0, то для любого $h_k \in \mathcal{P}$ выполнено неравенство $\partial(H_k) \le f_2(\Omega, \mathcal{P}, R)\cdot \partial(P)$, где f_2 - некоторая вычислимая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ - граф, соответствующий периодической структуре $\langle \mathcal{P}, R\rangle$ и $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ - его компоненты связности. Пусть $\langle \mathcal{P}_i, R_i\rangle$ - соответствующие связные периодические структуры. Если бы для каждой из структур $\langle \mathcal{P}_i, R_i\rangle$ удалось доказать лемму 2.11 и построить требуемые группы автоморфизмов $P_1, \ldots, P_r$, то всякое решение, минимальное относительно $P_0 = G_P(P_1, \ldots, P_r)$, ~~будет~~ было бы минимальным также относительно всех P_i, откуда последовала бы лемма 2.11 для $\langle \mathcal{P}, R\rangle$. Итак, достаточно ограничиться случаем связной периодической структуры.

Пусть $e_1, \ldots, e_m$ - все рёбра графа Γ из $T \setminus T_0$. Так как T_0 - остовный лес графа Γ_0, то $h(e_1), \ldots, h(e_m) \in \mathcal{P}$. Выберем базис $\bar{x}, \bar{a}$ так же, как в доказательстве предыдущей леммы и изучим более детально, как могут входить неизвестные $h(e_i)\,(1 \le i \le m)$ в уравнения из Ω^*, переписанные в этом базисе.

Если h_k не лежит на закрытом участке из $\mathcal{P}$ или $h_k \in \mathcal{P}$, но $e \notin T$ /где $h(e) = h_k$ /, то h_k принадлежит базису $\bar{x}, \bar{a}$ и отлична от всех $h(e_1), \ldots, h(e_m)$. Пусть теперь $h(e) = h_k$, $h_k \notin \mathcal{P}$ и $e \notin T$. Тогда $e = r_1 c_e r_2$, где r_1, r_2 - пути в дереве T. Так как $e \in \Gamma_0$, то вершины (k) и $(k+1)$ лежат в одной компоненте связности графа Γ_0 и, следовательно, соединены путём s в лесе T_0. Далее, r_1 и $s r_2^{-1}$ являются путями в дереве T, соединяющими вершины (k)

и V_0, следовательно $r_1 = s r_2^{-1}$. Таким образом, $e = s r_2^{-1} c_e r_2$ и $h_k = h(s) h(r_2)^{-1} h(c_e) h(r_2)$. Неизвестная $h(e_i) (1 \le i \le m)$ может входить в правую часть полученного выражения /если его записать в базисе $\bar{x}, \bar{a}$ / лишь в $h(r_2)$ и притом не более одного раза. Кроме того, знак этого вхождения /если оно существует/ зависит лишь от ориентации ребра e_i по отношению к корню V_0 дерева T. Если $r_2 \overset{\circ}{=} r_2' e_i^{\pm 1} r_2''$, то мы получаем, что все вхождения неизвестной $h(e_i)$ в записи слов h_k в базисе $\bar{x}, \bar{a}$ при $h_k \notin P$ содержатся во вхождениях слов вида $h(e_i)^{\mp 1} h((r_2')^{-1} c_e r_2') h(e_i)^{\pm 1}$, т.е. во вхождениях вида $h(e_i)^{\mp 1} h(c) h(e_i)^{\pm 1}$, где c - некоторый цикл графа Γ, начинающийся в начальной вершине ребра $e_i^{\pm 1}$.

Следовательно, все вхождения неизвестной $h(e_i) (1 \le i \le m)$ в коэффициентные уравнения, а также в основные уравнения с номерами $\mu \notin P$, содержатся во вхождениях вида $h(e_i)^{\mp 1} h(c) h^{\pm 1}(e_i)$. В основные же уравнения с номерами $\mu \in P$ неизвестная $h(e_i)$, очевидно, вообще не входит. Заменив, в случае необходимости, $h(e_i)$ на $h(e_i)^{-1}$, можно считать, что все вхождения имеют вид $h(e_i)^{-1} h(c) h(e_i)$. Обозначим через $u_{ie} (1 \le i \le m, e \notin T)$ элемент $h(r(V_0, V_i)^{-1} c_e r(V_0, V_i))$, где V_i - начальная вершина ребра e_i. Так как элементы $\bar{u}^{(i)} \rightleftharpoons \{u_{ie} \mid e \notin T\}$ порождают группу $\pi_1(\Gamma, V_i)$, то для любого цикла $c \in \pi_1(\Gamma, V_i)$ слово $h(c)$ принадлежит подгруппе, порождённой списком $\bar{u}^{(i)}$. Если ввести новые неизвестные $\bar{u}^{(i)}$, новые неизвестные $\bar{z}^{(i)} \rightleftharpoons \{z_{ie} \mid 1 \le i \le m, e \notin T\}$ и добавить к Ω^* уравнения

$$u_{ie} = h(r(V_0, V_i)^{-1} c_e r(V_0, V_i)), \tag{2.59}$$

$$h(e_i)^{-1} u_{ie} h(e_i) = z_{ie}, \tag{2.60}$$

$$[u_{ie_1}, u_{ie_2}] = 1, \qquad (2.61)$$

где e пробегает все рёбра, не принадлежащие T, а i фиксировано, мы получим систему $\bar{\varphi}^{(i)}$, эквивалентную Ω^* в силу периодизированности уравнения Ω. Отметим, что $h(e_i)$ не входит в правую часть (2.59) и, в силу доказанного выше, в системе Ω^*, переписанной в базисе $\bar{x}, \bar{a}$, можно заменить вхождения $h(e_i)^{-1}h(c)h(e_i)$ $(c \in \pi_1(\Gamma, V_i))$ на слова от $\bar{z}^{(i)}$ с тем, чтобы записать её в виде $\bar{\psi}^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}^{(i)}, \bar{a}) = 1$ таким образом, что $h(e_i)$ не входит в $\bar{\psi}^{(1)}$.

Отнесём теперь к списку $\bar{z}$ все неизвестные $\bar{x}$, кроме $h(e_i)$, неизвестные $\bar{z}^{(i)}$, а также все неизвестные $\bar{u}^{(i)}$, кроме какой-либо одной u_{ie_0}. К списку уравнений $\bar{\psi}$ отнесём $\bar{\psi}^{(1)}$ и те уравнения (2.59), (2.61), в которые не входит выбранная неизвестная u_{ie_0}. К списку $\bar{\Theta}$ отнесём уравнения (2.60) и оставшиеся уравнения (2.59), (2.61). Мы получим представление вида (1.9), (1.10) /если обозначить $u \mapsto u_{ie_0}$, $w \mapsto h(e_i)$, $v_1 \mapsto h(\tau(V_0, V_i)^{-1} c_e \tau(V_0, V_i))$, $v_0 \mapsto z_{ie_0}$, пары $\langle v, V \rangle$ в (1.10) пробегают пары вида $\langle u_{ie}, z_{ie} \rangle (e \neq e_0)$ /, с которым можно связать каноническую группу автоморфизмов типа 3. Обозначим её через P_{ie_0} $(1 \leq i \leq m$, $e_0 \notin T$. Пусть $P_0 = G_p(\{P_{ie_0} \mid 1 \leq i \leq m,\ e_0 \notin T\})$.

Пусть теперь $\bar{H}$ – решение обобщённого уравнения Ω, периодическое относительно некоторого периода P; $\langle \mathcal{P}, R \rangle$ – компонента связности структуры $\mathcal{P}(\bar{H}, P)$ и решение $\bar{H}$ минимально относительно группы автоморфизмов P_0. Не ограничивая общности, считаем, что $\delta(V_0) = \Lambda P$. Тогда, в силу леммы 2.9, определён гомоморфизм $\gamma: \tilde{Z} \to \mathbb{Z}$ такой, что для любого цикла $c \in \pi_1(\Gamma, V_0)$ справедливо $H(c) = P^{\gamma(\tilde{c})}$. Проверим сначала, что если для некоторой неизвестной $h_k \in \mathcal{P}$

выполнено

$$\partial(H_\kappa) \geqslant 2\rho^2 \partial(P), \tag{2.62}$$

то $\gamma(\tilde{Z})$ содержит некоторое n такое, что $1 < n \leq 2\rho$ /ρ - число неизвестных уравнения Ω /.

Для этого построим цепочку

$$(\Omega, \bar{H}) = (\Omega_0, \bar{H}^{(0)}) \to (\Omega_1, \bar{H}^{(1)}) \to \ldots \to (\Omega_t, \bar{H}^{(t)}), \tag{2.63}$$

в которой каждый следующий член получается из предыдущего продолжением какой-либо границы через какую-либо основу $\mu \in \mathcal{P}$ с помощью преобразования Э.6. Построение цепочки (2.63) завершается, когда через основы из $\mathcal{P}$ окажутся продолженными все границы, которые эти основы пересекают. Пусть уравнение Ω_i' получено из Ω_i <u>удалением</u> всех граничных связей. Очевидно, решение $\bar{H}^{(i)}$ уравнения Ω_i' периодично относительно периода P. Обозначим через $\langle \mathcal{P}_i, R_i \rangle$ периодическую структуру $\mathcal{P}(\bar{H}^{(i)}, P)$ уравнения Ω_i', ограниченную на закрытые участки из $\mathcal{P}$, а через $\Gamma^{(i)}, \tilde{Z}^{(i)}, \gamma_i$ соответствующие граф, абелеву группу циклов и гомоморфизм $\tilde{Z}^{(i)} \to \mathbb{Z}$.

Если $\langle p, \mu, q \rangle (\mu \in \mathcal{P})$ - граничная связь уравнения Ω_i /$1 \leq i \leq t$ /, то $\delta(p) = \delta(q)$ и, следовательно, все графы $\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(t)}$ имеют одно и то же множество вершин, мощность которого не превосходит ρ. Решение $\bar{H}^{(t)}$ уравнения Ω_t минимально относительно тривиальной группы автоморфизмов в силу леммы 2.Iа/. Предположим, что для некоторой неизвестной h_ℓ уравнения Ω_t, лежащей на закрытом участке из $\mathcal{P}$, выполнено неравенство $\partial(H_\ell^{(t)}) > 2\partial(P)$. Заменим в векторе $\bar{H}^{(t)}$ ~~уравнения~~ все компоненты, графически равные $(\bar{H}_\ell^{(t)})^{\pm 1}$ и соответствующие неизвестным, лежащим на закрытых участках из $\mathcal{P}$, буквой $u^{\pm 1}$ алфавита Σ_2 не входящей в решение $\bar{H}^{(t)}$. Полученный вектор, очевидно, удовлетворяет условиям непустоты и несократимости. Он удовлетворяет всем основным уравнениям обобщённого уравнения Ω_t с номерами $\mu \in \mathcal{P}$ и соответствующим им граничным уравнениям, так как в уравнении Ω_t все основы из $\mathcal{P}$ продолжены через всевозможные границы. Если же $\mu \notin \mathcal{P}$, то для любой неизвестной $h_k \in \mu$ уравнения Ω, лежащей на закрытом участке из $\mathcal{P}$, имеем $h_k \notin \mathcal{P}$ и, следовательно, $\partial(H_k) \leq 2\partial(P)$. Тем более это неравенство выполнено для неизвестных $h_k \in \mu$ уравнения Ω_t и, следовательно, такие неизвестные не подвергались замене в векторе $\bar{H}^{(t)}$. Следовательно, построенный вектор является решением уравнения Ω_t, что противоречит минимальности решения $\bar{H}^{(t)}$.

Таким образом, мы установили, что $\partial(H_\ell^{(t)}) \leq 2\partial(P)$, если h_ℓ лежит на закрытом участке из $\mathcal{P}$. В частности, та неизвестная h_k уравнения Ω, для которой выполнено неравенство (2.62), разделилась при переходе к Ω_t по меньшей мере на ρ различных неизвестных. Так как граф $\Gamma^{(t)}$ содержит не более ρ вершин, то в уравнении Ω_t' можно выбрать границы ℓ и ℓ' такие, что $\ell < \ell'$, $(\ell) = (\ell')$ и $\ell' - \ell \leq \rho$. Слово $h[\ell, \ell']$ является меткой цикла C_t графа $\Gamma^{(t)}$, для которого $0 < \partial(H(C_t)) \leq 2\rho\partial(P)$, т.е. $\gamma_t(\tilde{Z}^{(t)})$ содержит некоторое число n такое, что $1 \leq n \leq 2\rho$. Осталось доказать существование цикла C_0 графа Γ, для которого $\pi_{0t}(h(C_0)) = h(C_t)$, где через π_{ij} $(0 \leq i < j \leq t)$ здесь и далее обозначается гомоморфизм $G(\Omega_i^*) \to G(\Omega_j^*)$, определённый последовательностью (2.63).

Для этого достаточно показать, что для любого пути $\tau_{i+1}: V \to V'$ графа $\Gamma^{(i+1)}$ существует путь $\tau_i: V \to V'$ в графе $\Gamma^{(i)}$ такой, что $\pi_{i,i+1}(h(\tau_i)) = h(\tau_{i+1})$. В свою очередь, последнее утверждение достаточно проверить в случае, когда l_{i+1} является ребром e. Если неизвестная $h(e)$ уравнения Ω_{i+1} является также неизвестной уравнения Ω_i, то это очевидно. В противном случае надо воспользоваться формулами (2.13), определяющими изоморфизм, обратный к $\pi_{i,i+1}$ и заметить, что правые части этих формул являются метками путей в $\Gamma^{(i)}$, так как $(\alpha(\mu)) = (\alpha(\Delta(\mu)))$.

Таким образом, мы доказали, что из (2.62) вытекает, что $\gamma(\widetilde{Z})$ - ненулевая подгруппа в $\mathbb{Z}$, образующая n_0 которой удовлетворяет неравенству $|n_0| \leq 2\rho$. Пусть вначале $rg(A \otimes \mathbb{Q}) = 1$. Тогда из регулярности уравнения Ω следует, что для всех $e \notin T$ с $h(e) \notin \mathcal{P}$ выполнено $H(c_e) = 1$, т.е. $\gamma(\tilde{c}_e) = 0$. Так как $\overline{H}$ - решение, то $\gamma(b_\mu) = 0 \ (\mu \in \mathcal{P})$. Следовательно, $\gamma(\widetilde{B}) = 0$. В силу (2.54) получаем, что $\gamma(\widetilde{Z}_1) = 0$ и, следовательно, $\gamma(\widetilde{Z})$ порождается единственным элементом $\gamma(\tilde{c}_1^{(2)})$. Поэтому $|\gamma(\tilde{c}_1^{(2)})| \leq 2\rho$. По представлению (2.54) эффективно строится выражение $\tilde{c}_e = n_e \tilde{c}_1^{(2)} + \tilde{z}_e^{(1)} \ (\tilde{z}_e^{(1)} \in \widetilde{Z}_1)$ элементов $\tilde{c}_e$ $(e \notin T)$ через базисные элементы. Отсюда $|\gamma(\tilde{c}_e)| = |n_e \gamma(\tilde{c}_1^{(2)})| \leq 2\rho n_e$ и мы получаем окончательно

$$|\gamma(\tilde{c}_e)| \leq g_3(\Omega, \mathcal{P}, R), \tag{2.64}$$

где g_3 - вычислимая функция.

Разберём теперь случай $rg(A \otimes \mathbb{Q}) = 0$, т.е. $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}_1$. Как мы уже видели в доказательстве леммы 2.10, цикл c_e ($e \notin T$, $h(e) \notin \mathcal{P}$) сопряжён с некоторым циклом графа Γ_0 и $\partial(H(c_e)) \leq 2\rho\partial(P)$. Отсюда $|\gamma(\tilde{c}_e)| \leq 2\rho$ при $h(e) \notin \mathcal{P}$. Так как $(\widetilde{Z} : \widetilde{B}) < \infty$, то для любого $e_0 \notin T$ можно эффективно построить истинное равенство вида $n_{e_0} \tilde{c}_{e_0} = \sum_{h(e) \notin \mathcal{P}} n_e \tilde{c}_e + \sum_{\mu \in \mathcal{P}} n_\mu b_\mu$, откуда вытекает

$$|\gamma(\tilde{C}_{e_0})| \leq |\gamma(n_{e_0}\tilde{C}_{e_0})| \leq \sum_{h(e)\notin \mathcal{P}} |n_e \gamma(\tilde{C}_e)| \leq 2\rho \cdot \sum_{h(e)\notin \mathcal{P}} |n_e| .$$

Таким образом, и в этом случае для некоторой вычислимой функции g_3 справедлива оценка (2.64).

Пусть $\delta((\kappa)) = P_1^{(\kappa)} P_2^{(\kappa)}$. Обозначим через $t(c, h_\kappa)$ число вхождений ребра с меткой h_κ в цикл C, подсчитанное с учётом направления. Пусть, наконец,

$$H_\kappa = P_2^{(\kappa)} P^{n_\kappa} P_1^{(\kappa+1)} \tag{2.65}$$

/ h_κ лежит на закрытом участке из $\mathcal{P}$ /, причём равенство в (2.65) графическое, если $h_\kappa \in \mathcal{P}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$H(c) = P^{\sum\limits_\kappa t(c, h_\kappa)(n_\kappa + 1)} \tag{2.66}$$

Так как $\gamma(\tilde{Z}) \neq 0$, то можно выбрать $e_0 \notin T$ таким образом, что $\gamma(\tilde{C}_{e_0}) \neq 0$. Пусть $n_\kappa = |\gamma(\tilde{C}_{e_0})| m_\kappa + r_\kappa$, где $0 < r_\kappa \leq |\gamma(\tilde{C}_{e_0})|$. Из (2.66) вытекает, что вектор $\{m_\kappa \mid h_\kappa \in \mathcal{P}\}$ является решением следующей системы линейных диофантовых уравнений относительно неизвестных $\{z_\kappa \mid h_\kappa \in \mathcal{P}\}$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{h_\kappa \in \mathcal{P}} t(c_e, h_\kappa)(|\gamma(\tilde{C}_{e_0})| z_\kappa + r_\kappa + 1) + \\ &+ \sum_{h_\kappa \notin \mathcal{P}} t(c_e, h_\kappa)(n_\kappa + 1) = \gamma(\tilde{C}_e) \quad (e \notin T). \end{aligned}\right\} \tag{2.67}$$

Отметим, что число неизвестных и коэффициенты системы (2.67) ограничены сверху, в силу (2.64), простоты циклов C_e и неравенства $|n_\kappa| \leq 2\rho \, (h_\kappa \notin \mathcal{P})$ некоторой вычислимой функцией от $\Omega, \mathcal{P}, R$.

Решение $\{m_\kappa\}$ системы линейных диофантовых уравнений называется м и н и м а л ь н ы м [10], если $m_\kappa \geq 0$ и не существует другого решения $\{m_\kappa^+\}$ такого, что $0 \leq m_\kappa^+ \leq m_\kappa$ для всех κ, причём хотя бы одно из неравенств $m_\kappa^+ \leq m_\kappa$

строгое. Проверим, что решение $\{m_K \mid h_K \in \mathcal{P}\}$ системы (2.67) минимально.

В самом деле, пусть $\{m_K^+\}$ - другое решение системы (2.67) такое, что $0 \le m_K^+ \le m_K$ для всех K, причём хотя бы для одного K неравенство строгое. Положим $n_K^+ = |\gamma(\tilde{C}_{e_0})| m_K^+ + \tau_K$. Сформируем вектор $\overline{H}^+$, положив $H_K^+ \overset{\circ}{=} H_K$, если $h_K \notin \mathcal{P}$ и $H_K^+ \overset{\circ}{=} P_2^{(K)} P^{n_K^+} P_1^{(K+1)}$, если $h_K \in \mathcal{P}$. Так как слова H_K^+ и H_K начинаются /и кончаются/ на одну и ту же букву, то

$$T(\overline{H}^+) = T(\overline{H}). \tag{2.68}$$

Очевидно, вектор $\overline{H}^+$ удовлетворяет всем коэффициентным уравнениям и основным уравнениям с номерами $\mu \notin \mathcal{P}$. Так как $\{m_K^+\}$ - решение системы (2.67), то $H^+(C_e) = P^{\gamma(\tilde{C}_e)} = H(C_e)$. Следовательно, для любого цикла C имеем $H^+(C) = H(C)$ и, в частности, $H^+(b_\mu) = H(b_\mu) = 1$. Тем самым, вектор $\overline{H}^+$ является решением системы Ω^*.

Вектор $\overline{H}^+$ удовлетворяет условию непустоты, а в силу (2.68) - также условию несократимости. Так как для любого μ выполнено $H^+[\alpha(\mu), \beta(\mu)]\, H^+[\alpha(\Delta(\mu)), \beta(\Delta(\mu))]^{-1} = 1$ и слова $H^+[\alpha(\mu), \beta(\mu)]$, $H^+[\alpha(\Delta(\mu)), \beta(\Delta(\mu))]$ несократимы, то $H^+[\alpha(\mu), \beta(\mu)] \overset{\circ}{=} H^+[\alpha(\Delta(\mu)), \beta(\Delta(\mu))]$. Таким образом, $\overline{H}^+$ является решением обобщённого уравнения Ω.

Обозначим через δ_{ie_0} образующую построенной выше группы автоморфизмов P_{ie_0}. δ_{ie_0} в базисе $\bar{x}, \bar{a}$ действует следующим образом: $h(e_i) \mapsto h(\tau(V_0, V_i)^{-1} C_{e_0} \tau(V_0, V_i))\, h(e_i)$ /остальные неизвестные остаются неизменными/. Поэтому, если $\pi_{\overline{H}'} = \pi_{\overline{H}}\, \delta_{ie_0}$ и $h(e_i) = h_K \in \mathcal{P}$, то $H_K' = P_2^{(K)} P^{n_K + \gamma(\tilde{e}_0)} P_1^{(K+1)}$, а все остальные компоненты $\overline{H}'$ /в базисе $\bar{x}, \bar{a}$ / те же, что и в $\overline{H}$. Обозначим $\delta = \prod_{i=1}^{m} \delta_{ie_0}^{\Delta_i}$, где

$h(e_i)=h_{k_i}$, $\Delta_i=(m^+_{k_i}-m_{k_i})\cdot \mathrm{sgn}(\gamma(\tilde{e}_0))$. Проверим равенство

$$\pi_{\bar{H}^+}=\pi_{\bar{H}}\,\delta. \qquad (2.69)$$

Пусть $\pi_{\bar{H}}\delta=\pi_{\bar{H}^{(1)}}$. Тогда, по построению, $H^{(1)}_k = P_2^{(k)}P^{m^+_k}P_1^{(k+1)}=H^+_k$ для всех h_k, являющихся метками рёбер из $T\setminus T_0$. Если ребро с меткой h_k лежит в T_0 или h_k не лежит на закрытом участке из $\mathcal{P}$, то $h_k\notin\mathcal{P}$ и $H^{(1)}_k=H_k=H^+_k$. Заметим, наконец, что для любого $e\notin T$ выполнено $H^{(1)}(c_e)=H(c_e)=H^+(c_e)$. Так как $c_e=\tau_1 e\tau_2$, где τ_1,τ_2 – пути в дереве T и для каждой неизвестной h_k, являющейся меткой ребра из T, равенство $H^{(1)}_k=H^+_k$ уже установлено, то $H^{(1)}(e)=H^+(e)$. (2.69) доказано.

Из (2.68), (2.69) вытекает $H^+ <_{P_0} \bar{H}$, что противоречит минимальности решения $\bar{H}$ относительно группы P_0. Следовательно, решение $\{m_k \mid h_k\in\mathcal{P}\}$ системы линейных диофантовых уравнений (2.67) минимально.

Лемма I.I из работы [10] утверждает, что компоненты минимального решения $\{m_k \mid h_k\in\mathcal{P}\}$ оцениваются сверху рекурсивной функцией от параметров системы. Так как параметры системы (2.67), как было отмечено выше, оцениваются сверху вычислимой функцией от $\Omega,\mathcal{P},R$, то имеет место оценка $m_k\leq g_4(\Omega,\mathcal{P},R)$. Утверждение леммы 2.II выполняется, если положить

$$f_2(\Omega,\mathcal{P},R)\rightleftharpoons g_4(\Omega,\mathcal{P},R)(2\rho+1).$$

ГЛАВА III. Доказательство основной теоремы.

Элементарные преобразования, определённые в §I гл.II и игравшие лишь вспомогательную роль в §§2-4 гл.II, в настоящей главе будут основным инструментом для построения дерева решений /под деревом решений мы понимаем ориентированное дерево, в вершинах которого стоят обобщённые уравнения, а рёбра помечены сюрьективными гомоморфизмами соответствующих групп/ для данного обобщённого уравнения Ω.

В §I мы построим некоторое локально конечное дерево решений $T(\Omega)$. Вообще говоря, это дерево будет бесконечным. Основной результат этого параграфа - описание структуры возможных бесконечных путей в дереве $T(\Omega)$.

В §2 мы используем результаты §§2-4 гл.II и связываем с некоторыми обобщёнными уравнениями в дереве $T(\Omega)$ группы автоморфизмов их групп. Затем некоторые пути в дереве $T(\Omega)$ объявляются запрещёнными. Показывается, что поддерево $T_0(\Omega)$ дерева $T(\Omega)$, не содержащее запрещённых путей дерева $T(\Omega)$, уже будет конечным. Далее рассматривается группа автоморфизмов P группы $G(\Omega^*)$, порождённая группами автоморфизмов, связанных с вершинами дерева $T_0(\Omega)$. На основании результатов §§2-4 гл.II показывается, что всякое решение, минимальное относительно P, допускает "преобразование" в дереве $T_0(\Omega)$ вплоть до некоторой концевой вершины дерева $T_0(\Omega)$.

В §3 мы итерируем конструкцию §§I-2 с тем, чтобы построить конечное дерево решений, позволяющее преобразовывать решения исходного уравнения Ω в решения некоторых тривиальных уравнений. Конечность числа шагов этой итерации будет следовать из леммы I.I. Используя построенное дерево и лемму I.5, мы доказываем теорему I главы I.

§I. <u>Дерево</u> $T(\Omega)$ <u>и описание бесконечных путей в нём</u>.

Пусть Ω - совместное обобщённое уравнение. Опишем построение дерева $T(\Omega)$, которое считается ориентированным вверх от корня. Каждой вершине v дерева $T(\Omega)$ ставится в соответствие обобщённое уравнение Ω_v, причём уравнение Ω_{v_0}, соответствующее корню v_0 дерева $T(\Omega)$, совпадает с Ω. Дерево $T(\Omega)$ локально конечно, т.е. из каждой вершины выходит лишь конечное число рёбер. Каждому ребру $e: v \to v'$ ставится в соответствие сюрьективный гомоморфизм $\pi(v, v'): G(\Omega_v^*) \to G(\Omega_{v'}^*)$. Если $v \to v_1 \to \ldots \ldots \to v_s \to v'$ - /единственный/ путь в дереве $T(\Omega)$, соединяющий v и v', то мы полагаем $\pi(v, v')$ равным композиции $\pi(v_s, v')\pi(v_{s-1}, v_s)\ldots\pi(v, v_1)$. Из построения будет следовать, что $\pi(v, v')$ на самом деле является изоморфизмом, за исключением, быть может, случая, когда v' - концевая вершина.

Закрытые участки уравнений Ω_v разделяются на два класса. Закрытые участки из первого класса будем называть р а б о ч и м и, из второго - п о с т о я н н ы м и. Будем считать, что объединение рабочих закрытых участков образует участок $[1, j_v]$ для некоторой границы j_v уравнения Ω_v, а объединение постоянных - участок $[j_v, \rho_v + 1]$; в случае необходимости этого всегда можно достичь переобозначением неизвестных.

Рёбра дерева $T(\Omega)$ также разделяются на два класса: г л а в н ы е и б о к о в ы е. Если $v \to v_1, \ldots, v \to v_r$ - полный список главных рёбер, выходящих из вершины v /не являющейся концевой/, то переход от Ω_v к $\Omega_{v_1}, \ldots, \Omega_{v_r}$ осуществляется путём применения к уравнению Ω_v одного из элементарных преобразований Э.I-Э.6, последующего применения элементарных преобразований к некоторым уравнениям полученного списка и.т.д. При этом гомоморфизм $\pi(v, v_i) \ (1 \le i \le r)$ строится как композиция гомоморфизмов из определения элементарного преобразования. Деление закрытых участков уравнений Ω_{v_i} на рабочие и постоянные естественным образом наследуется из аналогичного деления для уравнения Ω_v.

Как уже отмечалось в начале главы, дерево $T(\Omega)$, вообще говоря, бесконечно. Однако его построение эффективно в том смысле, что по обобщённому уравнению Ω и натуральному числу t эффективно строятся первые t ярусов дерева $T(\Omega)$ вместе с описанными выше дополнительными структурами на этих ярусах.

Построение дерева начинается с того, что в корне v_0 ставится обобщённое уравнение Ω и все его закрытые участки объявляются рабочими.

Предположим, что уже построены первые t ярусов дерева $T(\Omega)$. $(t+1)$-й ярус получается из t-го следующим образом. Некоторые вершины t-го яруса объявляются концевыми и из них не выходит ни одно ребро. Список главных и боковых рёбер, ведущих из вершины v на t-м ярусе, не включённой в число концевых, обобщённые уравнения на концах этих рёбер, деление закрытых участков этих уравнений на два класса и гомоморфизмы $\pi(v, v')$ зависят от того, какой из описываемых ниже I5 случаев имеет место для уравнения Ω_v.

Приступим теперь к описанию случаев возможного строения уравнения Ω_v. При этом случай i предполагает, что случаи $1, 2, \ldots, (i-1)$ не имеют места, даже если это не оговорено явно. Легко убедиться, что для любого обобщённого уравнения имеет место один из описываемых ниже случаев I-I5.

Вершина v объявляется концевой в одном из следующих двух случаев.

Случай I. Гомоморфизм $\pi(v_0, v)$ не является изоморфизмом. /разумеется, чтобы построение дерева $T(\Omega)$ было эффективным, надо уметь проверять алгоритмически, имеет ли место случай I. Мы вернёмся к этому вопросу несколько позднее/.

Случай 2. Обобщённое уравнение Ω_v не содержит рабочих участков.

Приступим теперь к описанию оставшихся случаев. Если не оговорено противное, все строящиеся рёбра объявляются главными.

Случай 3. Обобщённое уравнение Ω_v содержит неизвестную h_k , принадлежащую рабочему участку и входящую в какое-либо коэффициентное уравнение, причём участок $[k, k+1]$ не является закрытым. К уравнению Ω_v следует применить вначале серию элементарных преобразований Э.6, продолжающих границы k и $k+1$ через все основы, которые они пересекают. После этого применяется серия преобразований Э.2, разрезающих эти основы по только что введённым граничным связям. Во всех полученных таким образом уравнениях участок $[k, k+1]$ становится закрытым.

Случай 4. Обобщённое уравнение Ω_v содержит неизвестную h_k , принадлежащую закрытому рабочему участку $[k, k+1]$ и входящую в какое-либо коэффициентное уравнение. Участок $[k, k+1]$ переносится из списка рабочих участков в список постоянных, а полученное ребро объявляется боковым и снабжается тождественным изоморфизмом. Других рёбер из вершины v не выходит.

Случай 5. Обобщённое уравнение Ω_v содержит фиктивную неизвестную h_q , лежащую на рабочем участке. Участок $[q, q+1]$ переносится из списка рабочих в список постоянных, а полученное ребро объявляется боковым.

Случай 6. Обобщённое уравнение Ω_v содержит пару совмещённых основ-двойников, лежащую на рабочем участке. В этом случае к уравнению Ω_v применяется преобразование Э.4, удаляющее эту пару основ.

Напомним, что через γ_i обозначается количество основ, которым принадлежит неизвестная h_i.

Случай 7. $\gamma_i = 1$ для некоторой неизвестной h_i, принадлежащей рабочему участку уравнения Ω_v, причём обе границы i и $(i+1)$ - закрытые. К уравнению Ω_v следует применить преобразование Э.5, удаляющее закрытый участок $[i, i+1]$ вместе с единственной содержащейся на нём основой.

Случай 8. $\gamma_i = 1$ для некоторой неизвестной h_i, принадлежащей рабочему участку уравнения Ω_v, причём одна из границ $i, (i+1)$ - открытая, а другая - закрытая. Не ограничивая общности, можно считать закрытой границу i. С помощью преобразования Э.6 продолжим границу $(i+1)$ через единственную основу μ, которой принадлежит неизвестная h_i. С помощью преобразования Э.I избавимся от двойственных граничных связей. С помощью преобразования Э.2 разрежем основу μ по границе $(i+1)$ на две новые основы. С помощью преобразования Э.5 удалим ставший закрытым участок $[i, i+1]$ вместе с единственной содержащейся на нём основой.

Случай 9. $\gamma_i = 1$ для некоторой неизвестной h_i, принадлежащей рабочему участку уравнения Ω_v, причём обе границы $i, (i+1)$ - открытые. Кроме того, некоторму закрытому участку $[j_1, j_2]$ рабочей части принадлежат ровно две основы μ_1 и μ_2 так, что $\alpha(\mu_1) = \alpha(\mu_2) = j_1$; $\beta(\mu_1) = \beta(\mu_2) = j_2$; и все основы уравнения $\widetilde{\Omega}_v$, полученные разрезанием из μ_1 и μ_2 не лежат в ядре /см.§2 гл.II/ уравнения $\widetilde{\Omega}_v$. Отметим, что основы μ_1 и μ_2 не являются двойниками, так как случай 6 не имеет места. Продолжим с помощью преобразования Э.6 через основу μ_1 все границы, которые её пересекают. С помощью преобразования Э.I избавимся от двойственных граничных связей. С помощью преобразования Э.3 перенесём основу μ_2 с основы μ_1 на основу $\Delta(\mu_1)$. С помощью преобразования Э.5 удалим основу μ_1 вместе с закрытым участком $[j_1, j_2]$.

Случай I0. Первая посылка случая 9 выполнена, а вторая - нет. С помощью преобразования Э.6 продолжим границы i и $(i+1)$ через основу μ, которой принадлежит неизвестная h_i. Применив два раза преобразование Э.2, разрежем основу μ по границам $i, (i+1)$ на три новые основы. С помощью Э.5 удалим ставший закрытым участок $[i, i+1]$ вместе с единственной содержащейся на нём основой.

Заметим теперь, что если $\gamma_i \leq 1$ хотя бы для одной неизвестной h_i, принадлежащей рабочему участку уравнения Ω_v, то имеет место один из случаев I-I0.

Случай II. Некоторая граница ℓ обобщённого уравнения Ω_v, принадлежащая рабочему участку, является свободной. Так как случай 5 не имеет места, граница ℓ пересекает хотя бы одну основу μ. Продолжим с помощью преобразования Э.6 границу ℓ через основу μ.

Случай I2. $\gamma_i = 2$ для всех неизвестных h_i, принадлежащих рабочим участкам уравнения Ω_v. Так как случаи 2,6 не имеют места, то неизвестная h_1 принадлежит рабочему участку, а также ровно двум несовмещённым соновам μ и λ. Пусть $\beta(\lambda) \leq \beta(\mu)$. С помощью Э.6 продолжим границы $2, 3, \ldots, \beta(\lambda)$ через основу μ. Применяя Э.I, избавимся от двойственных граничных связей. С помощью Э.3 перенесём основу λ

с основы μ на основу $\Delta(\mu)$. С помощью Э.2 разрежем основу μ по границе $\beta(\lambda)$ на две новых основы /если $\beta(\lambda) \neq \beta(\mu)$ /. Применив Э.5, уничтожим ставший закрытым участок $[1, \beta(\lambda)]$ вместе с единственной лежащей на нём основой.

Случай I3. $\gamma_i \geq 2$ для всех неизвестных h_i, принадлежащих рабочим участкам уравнения Ω_v, причём хотя бы одно из этих неравенств строгое. Кроме того, для некоторой основы μ этого уравнения участок $[\alpha(\mu), \beta(\mu)]$ - закрытый. С помощью преобразования Э.6 продолжим через основу μ все границы, которые её пересекают. С помощью Э.I избавимся от двойственных граничных связей. С помощью Э.3 перенесём все основы закрытого участка $[\alpha(\mu), \beta(\mu)]$, отличные от μ, с основы μ на основу $\Delta(\mu)$. С помощью Э.5 уничтожим закрытый участок $[\alpha(\mu), \beta(\mu)]$ вместе с основой μ.

Случай I4. $\gamma_i \geq 2$ для всех неизвестных h_i, принадлежащих рабочим участкам уравнения Ω_v, причём хотя бы одно из этих неравенств строгое. Кроме того, некоторая граница ℓ, принадлежащая рабочему участку и касающаяся хотя бы одной основы, пересекает некоторую основу μ и не продолжена через неё граничной связью. Продолжим с помощью преобразования Э.6 границу ℓ через основу μ.

Случай I5. $\gamma_i \geq 2$ для всех неизвестных h_i, принадлежащих рабочим участкам уравнения Ω_v, причём хотя бы одно из этих неравенств строгое. Кроме того, обе вторые посылки случаев I3,I4 не выполнены. Назовём основу μ уравнения Ω_v с т а р ш е й, если $\alpha(\mu) = 1$. Старшую основу μ назовём м а к с и м а л ь н о й, если для любой другой старшей основы λ выполнено $\beta(\lambda) \leq \beta(\mu)$. Среди всех максимальных основ выберем какую-либо одну и назовём её о с н о в о й - н о с и т е л е м.

Основу λ назовём переносной, если $\beta(\lambda) \leq \beta(\mu)$ и $\lambda \neq \mu$, где μ - основа-носитель. Пусть μ - основа-носитель уравнения Ω_v. Так как случаи 6,I3 не имеют места, то основа μ несовмещённая, а граница $\beta(\mu)$ - открытая. Применив Э.I, избавимся от двойственных граничных связей. С помощью Э.3 перенесём все переносные основы с основы μ на основу $\Delta(\mu)$. При этом образуется граница $w\ (2 \leq w \leq \beta(\mu)-1)$ такая, что неизвестные $\{h_i \mid 1 \leq i \leq w-1\}$ принадлежат только основе μ, а неизвестная h_w - по крайней мере двум основам. Применяя Э.2, разрежем основу μ по границе w. Применяя Э.5, уничтожим ставший закрытым участок $[1, w]$ вместе с единственной основой, ему принадлежащей. Применив несколько раз Э.6, продолжим все границы, касающиеся хотя бы одной основы, через все основы, которые они пересекают.

Если имеет место случай I5, то из вершины v могут выходить не только главные, но и боковые рёбра так, как описано ниже в случае I5.I.

Случай I5.I. Выполнены все посылки случая I5. Кроме того, основа-носитель μ уравнения Ω_v пересекается с $\Delta(\mu)$. Построим вначале некоторое уравнение $\Omega_{v'}$, которое получается из уравнения Ω_v следующим образом. Вводится новый закрытый участок $[\rho_v+1, \rho_v+2]$, который объявляется постоянным. Вводится новая пара основ $(\lambda, \Delta(\lambda))$, для которой $\alpha(\lambda)=1$, $\beta(\lambda)=\beta(\Delta(\mu))$, $\alpha(\Delta(\lambda))=\rho_v+1$, $\beta(\Delta(\lambda))=\rho_v+2$. Иными словами, мы вводим основное уравнение $h'=h[1, \beta(\Delta(\mu))]$, где h' - новая неизвестная. Возьмём в качестве $\pi(v, v')$ естественный изоморфизм. Заметим, что Ω_v можно получить из $\Omega_{v'}$ с помощью преобразования Э.5, удаляющего основу $\Delta(\lambda)$ вместе с закрытым участком $[\rho_v+1, \rho_v+2]$. Для уравнения $\Omega_{v'}$

имеет место случай I5, так же, как и для уравнения Ω_v, однако основой-носителем становится λ. Применив к уравнению $\Omega_{v'}$ преобразования, описанные выше в случае I5, мы получим полный список боковых рёбер, выходящих из вершины v.

Дерево $T(\Omega)$ полностью описано. Припишем вершине v дерева $T(\Omega)$ т и п $tp(v) (1 \le tp(v) \le 15)$, равный номеру случая, который реализуется для уравнения Ω_v.

Возвращаясь к замечанию в скобках, сделанному при разборе случая I, отметим, что метка $\pi(v, v')$ при переходе $\Omega_v \to \Omega_{v'}$ в случае I5.I является изоморфизмом. Гомоморфизм, соответствующий элементарному преобразованию, может не быть изоморфизмом лишь в том случае, когда оно является преобразованием Э.6, не увеличивающим число неизвестных. Вопрос о том, является ли гомоморфизм, соответствующий такому преобразованию, изоморфизмом, решается алгоритмически на основании леммы I.2. Таким образом, построение дерева $T(\Omega)$ эффективно.

Обозначим через ρ' количество неизвестных, лежащих на рабочих участках некоторого уравнения Ω, через n' - количество основ, лежащих на рабочих участках. ν' будет обозначать число открытых границ на рабочих участках; δ' - число закрытых границ на рабочих участках. Количество закрытых рабочих участков, содержащих ноль основ, одну основу, более одной основы обозначим через t', u', w' соответственно. Сложностью τ' уравнения Ω назовём число

$$\tau' = n' - u' - 2w'. \tag{3.1}$$

Очевидно, $\tau' \geq 0$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда каждый закрытый рабочий участок содержит не более двух основ.

В тех случаях, когда речь идёт об уравнении Ω_i [об уравнении Ω_v] через ρ_i', n_i', ν_i' и.т.д. [соответствнно, ρ_v', $n_v', \nu_v', \ldots$] будут обозначаться параметры уравнения Ω_i [уравнения Ω_v].

Пусть теперь Ω_2 получается из Ω_1 некоторым элементарным преобразованием. Некоторые легко проверяемые оценки параметров n_2', ν_2', τ_2' через соответствующие параметры n_1', ν_1', τ_1' собраны вместе в таблице I.

Отметим, что если некоторое обобщённое уравнение Ω_v содержит коэффициентное уравнение $h_i = a_j^{\pm 1}$ такое, что неизвестная h_i лежит на рабочем участке, то к нему применяется преобразование случаев 3,4, уменьшающее число таких уравнений. Поэтому в обобщённых уравнениях $2t$-го яруса / t - число коэффициентных уравнений в исходном Ω / неизвестные на рабочих участках не будут входить в коэффициентные уравнения и можно, без ограничения общности считать, что это имеет место уже для исходного обобщённого уравнения Ω. Преобразования случаев 3,4 при построении дерева $T(\Omega)$ в этом случае не используются.

Пусть $v_1 \to v_2$ - главное ребро; $\Omega_1 = \Omega_{v_1}$, $\Omega_2 = \Omega_{v_2}$. На основании таблицы I легко получить оценки параметров n_2', ν_2', τ_2' через параметры n_1', ν_1', τ_1'; эти оценки содержатся в следующей лемме.

ЛЕММА 3.I. Если $v_1 \to v_2$ - главное ребро дерева $T(\Omega)$, то

а/ $n_2' \leq n_1'$, если $tp(v_1) \neq 3, 10$. Это неравенство строгое, если $tp(v_1) = 6, 7, 9$ или 13. Если же $tp(v_1) = 10$, то б $n_2' \leq n_1' + 2$.

б/ $\nu_2' \leq \nu_1'$, если $tp(v_1) \leq 13$ и $tp(v_1) \neq 3, 11$.

в/ $\tau_2' \leq \tau_1'$, если $tp(v_1) \neq 3, 12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка пункта а/ с помощью таблицы I не вызывает никаких затруднений. По поводу пункта б/ отметим, что

ТИП ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	n	ν	τ	ДОПОЛНЕНИЯ
Э.I	$n_2' = n_1'$	$\nu_2' = \nu_1'$	$\tau_2' = \tau_1'$	
Э.2. Основа λ разрезается с помощью граничной связи (p, λ, q), причём λ лежит на рабочем участке, $\Delta(\lambda)$ лежит на рабочем участке и граница p становится закрытой в уравнении Ω_2.	$n_2' = n_1' + 2$	$\nu_2' \leq \nu_1' - 1$	$\tau_2' \leq \tau_1' + 1$	Если, кроме того, граница q становится закрытой в уравнении Ω_2, то $\nu_2' \leq \nu_1' - 2$, $\tau_2' \leq \tau_1'$. Если на каждом из участков $[\alpha(\lambda), p]$ и $[p, \beta(\lambda)]$ есть хотя бы одна неизвестная, принадлежащая по крайней мере двум основам, то $\tau_2' \leq \tau_1'$.
Э.2. Основа λ разрезается с помощью граничной связи (p, λ, q), причём λ лежит на рабочем участке, $\Delta(\lambda)$ лежит на постоянном участке и граница p становится закрытой в уравнении Ω_2.	$n_2' = n_1' + 1$	$\nu_2' \leq \nu_1' - 1$	$\tau_2' \leq \tau_1'$	

Э.3 Основа (Н) переносится с расположения основы μ на расположение основы $\Delta(\mu)$, причём μ и $\Delta(\mu)$ лежат на рабочих участках.	$n_2' = n_1'$	$\nu_2' = \nu_1'$	$\tau_2' \leq \tau_1' + 1$	Неравенство $\tau_2' \leq \tau_1'$ имеет место, если либо закрытому участку, содержащему основу μ, принадлежит не менее трёх основ, либо если закрытому участку уравнения Ω_1, содержащему основу $\Delta(\mu)$, не принадлежат другие основы.
Э.3 Основа (Н) переносится с расположения основы μ на расположение основы $\Delta(\mu)$, причём μ лежит на рабочем участке, а $\Delta(\mu)$ - на постоянном.	$n_2' = n_1' - 1$	$\nu_2' = \nu_1'$	$\tau_2' \leq \tau_1'$	$\tau_2' \leq \tau_1' - 1$, если рабочий участок, содержащий основу μ, содержит по крайней мере три основы.
Э.4 Удаление пары совмещённых основ $\mu, \Delta(\mu)$, лежащей на рабочем участке	$n_2' = n_1' - 2$	$\nu_2' \leq \nu_1'$	$\tau_2' \leq \tau_1'$	$\tau_2' \leq \tau_1' - 1$, если рабочий участок, содержащий пару $(\mu, \Delta(\mu))$, содержит не менее трёх основ.

Э.5 Удаление одиночной основы μ, лежащей на рабочем участке. При этом $\Delta(\mu)$ лежит на рабочем участке и $\beta(\mu)-\alpha(\mu)-1=d$.	$n_2'=n_1'-2$	$\nu_2'\leq\nu_1'-d$	$\tau_2'\leq\tau_1'$	$\tau_2'\leq\tau_1'-1$, если рабочий участок, содержащий основу $\Delta(\mu)$, содержит не менее трёх основ.
Э.5 Удаление одиночной основы μ, лежащей на рабочем участке. При этом $\Delta(\mu)$ лежит на постоянном участке и $\beta(\mu)-\alpha(\mu)-1=d$.	$n_2'=n_1'-1$	$\nu_2'=\nu_1'-d$	$\tau_2'=\tau_1'$	
Э.6. Продолжение границы ρ через основу μ, лежащую на рабочем участке.	$n_2'=n_1'$	$\nu_2'\leq\nu_1'+1$	$\tau_2'=\tau_1'$	$\nu_2'=\nu_1'$, если основа $\Delta(\mu)$ не лежит на рабочем участке или рассматриваемое преобразование не увеличивает числа границ.

при $tp(v_1)\leq 13$ преобразования Э.6 /увеличивающие параметр ν'/ всякий раз сопровождаются преобразованиями Э.5 и Э.2, уменьшающими ν' по крайней мере до первоначального значения ν_1'. Для доказательства пункта в/ надо заметить, что всякий раз, когда преобразование Э.2 или Э.3 увеличивает сложность τ', отмеченные в графе "дополнения" таблицы I случаи не имеют места. Легко проверяется, что при $tp(v_1)\neq 12$ сложность τ' затем снова уменьшается преобразованием Э.5, так как перед его выполнением образуется ситуация, отмеченная в таблице I в графе "дополнения" для этого преобразования. Лемма 3.I доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_r \ldots$ - бесконечный путь в дереве $T(\Omega)$. Тогда существует N такое, что все рёбра этого пути, начиная с N-го, главные и выполнено одно из следующих трёх утверждений:

а/ $7\leq tp(v_n)\leq 10$ для всех $n\geq N$,

б/ $tp(v_n)=12$ для всех $n\geq N$,

в/ $tp(v_n)=15$ для всех $n\geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу принятого ранее соглашения о коэффициентных уравнениях, $tp(v_i)\geq 5$ для всех i. Проверим, что количество тех вершин v_i, для которых $tp(v_i)=5$, не превосходит ρ.

В самом деле, если обозначить через Ω' обобщённое уравнение, полученное из Ω удалением всех коэффициентных уравнений, то дерево $T(\Omega')$ может быть получено из $T(\Omega)$ заменой всех обобщённых уравнений Ω_v на Ω_v' и, следовательно, для любой вершины v существует сюрьективный гомоморфизм из $G(\Omega'^*)$ на $G(\Omega_v'^*)$. Отсюда вытекает, что $G(\Omega_v'^*)$ может быть порождена $(\rho+\omega)$ элементами. Если бы путь из корня v_0 в v содержал по крайней мере $(\rho+1)$ вершину типа 5, то

Ω'_{v} имело бы по крайней мере $(\rho+1)$ фиктивных неизвестных /лежащих на постоянных участках/. Отображая все остальные неизвестные в единицу, мы получили бы гомоморфизм из $G(\Omega'^{*}_{v})$ на свободную группу ранга $\rho+\omega+1$, что противоречит предложению I.2.7 [7].

Итак, можно с самого начала считать, что $tp(v_i)\neq 5$ для всех i. Далее, если $tp(v_i)=12$, то $tp(v_{i+1})=6$ или 12. Однако $tp(v_{i+1})=6$ невозможно, так как иначе было бы $tp(v_{i+2})=5$. Следовательно, $tp(v_{i+1})=tp(v_{i+2})=\ldots=12$, т.е. выполнено утверждение б/.

Поэтому можно считать также, что $tp(v_i)\neq 12$ для всех i. Из леммы 3.Iв/ и неравенства $\tau'\geq 0$ вытекает, что значение сложности уравнения Ω_{v_i} стабилизируется для рассматриваемого бесконечного пути, если все рёбра этого пути главные. Если же $v_i\to v_{i+1}$ - боковое ребро, то оно может быть построено лишь на основании случая I5.I. При применении преобразования случая I5 к вспомогательному уравнению $\Omega_{v'}$, построенному для случая I5.I, обе основы μ и $\Delta(\mu)$ будут перенесены с основы λ на постоянный участок, вследствии чего сложность уменьшится на два. Так как $\tau_{v'}=\tau_i+1$, то $\tau'_{i+1}<\tau'_i$. Следовательно, число боковых рёбер в рассматриваемом пути конечно. Итак, можно считать, что $\tau'_i=const$ и все рёбра - главные.

Теперь если $tp(v_i)=6$, то закрытый участок, содержащий совмещённые основы $(\mu,\Delta(\mu))$, не может содержать никаких других основ, так как в противном случае было бы $\tau'_{i+1}<\tau'_i$ /см. таблицу I/. Однако, если этот участок не содержит других основ, то $tp(v_{i+1})=5$, что также невозможно. Поэтому можно далее предполагать, что $tp(v_i)\geq 7$ для всех i.

Если уравнение Ω_1 не содержит свободных границ и Ω_2 получено из него элементарным преобразованием, отличным от Э.4, то Ω_2 не содержит свободных границ. Поэтому $tp(v_i)\neq 6$ позволяет также считать, что $tp(v_i)\neq 11$ для всех i.

Если $13\leq tp(v_i)\leq 15$, то $tp(v_{i+1})\in\{6,13,14,15\}$. Так как $tp(v_{i+1})\neq 6$, то отсюда вытекает, что для всех вершин $v_j\,(j\geq i)$ также выполнено $13\leq tp(v_j)\leq 15$. В этом случае последовательность n_j', в силу леммы 3.Iа/, также стабилизируется. Кроме того, если $tp(v_j)=13$, то $n_{j+1}'<n_j'$, поэтому можно считать, что $tp(v_j)\neq 13$ для всех j. Вершин типа I4 подряд может встретиться не более $8(n')^2$. Поэтому существует $j\geq i$ такое, что $tp(v_j)=15$. Однако заключительная серия преобразований Э.6 в определении случая I5 обеспечивает неравенство $tp(v_{j+1})\neq 14$ и, значит, $tp(v_{j+1})=15$. Следовательно, $tp(v_j)=tp(v_{j+1})=\ldots=15$, т.е. имеет место утверждение в/.

Итак, можно считать, что $tp(v_i)\leq 10$ для всех вершин нашего пути. Но тогда имеет место утверждение а/. Лемма 3.2 доказана.

§2. Поддерево $T_0(\Omega)$ и решения уравнения Ω.

Начнём с того, что поставим в соответствие некоторым вершинам v дерева $T(\Omega)$, построенного в предыдущем параграфе, группы автоморфизмов групп $G(\Omega_v^*)$, описанные в §§2-4 гл.II.

Каждой вершине v такой, что $7\leq tp(v)\leq 10$, поставим в соответствие каноническую группу автоморфизмов I типа группы $G(\Omega_v^*)$ из леммы 2.5.

Пусть теперь $tp(v)=12$ или 15. Заметим, что функция γ_i постоянна, когда неизвестная h_i пробегает некоторый закрытый рабочий участок уравнения $\tilde{\Omega}_v$: если $tp(v)=12$, то это очевидно $(\gamma_i\equiv 2)$; если же $tp(v)=15$, то к уравнению Ω_v не применимы преобразования случая 14, поэтому всякая граница вида $\alpha(\mu)$ или $\beta(\mu)$ /где μ - основа уравнения Ω_v, лежащая на рабочем участке/, закрыта в уравнении $\tilde{\Omega}_v$. Отсюда вытекает доказываемое постоянство функции γ. Кроме того, так как случаи 3,4,11 не имеют места, рабочие участки уравнения Ω_v, а, следовательно, и $\tilde{\Omega}_v$, не содержат ни неизвестных, входящих в коэффициентные уравнения, ни свободных границ. Таким образом, беря произвольное множество закрытых рабочих участков уравнения Ω_v, на которых $\gamma_i = 2$, в качестве линейной части (2.22), получим некоторое локально линейное уравнение. Поставим в соответствие уравнению Ω_v группу автоморфизмов, порождённую группами $id^{-1}Pid$, где id - естественный изоморфизм между $G(\Omega_v^*)$ и $G(\tilde{\Omega}_v^*)$, а P - группа из заключения леммы 2.7, которая применяется к обобщённому уравнению $\tilde{\Omega}_v$ и всевозможным выборам линейной части (2.22) уравнения $\tilde{\Omega}_v$, для которых граф Γ, описанный в §3 гл.11, связен.

Пусть теперь $tp(v)=2$. Уравнение Ω_v назовём н е т р и в и а л ь н ы м, если оно обладает закрытым участком, содержащим хотя бы одну основу и не содержащим неизвестных, входящих в коэффициентные уравнения. Из конструкции дерева $T(\Omega)$ вытекает, что уравнение Ω_v нетривиально тогда и только тогда, когда путь из v_0 в v содержит боковое ребро, соответствующее случаю 15.1. Если же все боковые рёбра этого пути соответствуют случаям 4,5, то уравнение Ω_v т р и в и а л ь н о. Для каждого нетривиального уравнения Ω_v поставим в соответствие вершине v группу автоморфизмов группы $G(\Omega_v^*)$, порождённую всевозможными группами автоморфизмов из леммы 2.11, которая применяется к уравнению $\tilde{\Omega}_v$ и всевозможным периодическим структурам $\langle P, R\rangle$ этого уравнения, относительно которых $\tilde{\Omega}_v$ регулярно.

Докажем теперь некоторые дополнительные факты о бесконечных путях в дереве $T(\Omega)$, удовлетворяющих свойствам а,б/ из заключения леммы 3.2.

ЛЕММА 3.3. Пусть $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k \to \ldots$ - бесконечный путь в дереве $T(\Omega)$, причём либо $7 \le tp(v_k) \le 10$ для всех k, либо $tp(v_k) = 12$ для всех k. Тогда среди $\{\Omega_{v_k}\}$ некоторое обобщённое уравнение встречается бесконечно много раз. Если $\Omega_{v_k} = \Omega_{v_\ell}$, то $\pi(v_k, v_\ell) : G(\Omega^*_{v_k}) \to G(\Omega^*_{v_\ell})$ - изоморфизм, инвариантный относительно ядра, если $7 \le tp(v_n) \le 10$ и инвариантный относительно нелинейной части, если $tp(v_n) = 12$ и в качестве линейной части уравнения $\tilde{\Omega}_{v_k}$ выбрано подходящее объединение некоторых рабочих участков так, что при этом граф из §3 гл.II связен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $7 \le tp(v_n) \le 10$. В силу леммы 3.I б,в/, $\tau'_k \le \tau'_1$ и $\nu'_k \le \nu'_1$ для всех k. Следовательно, можно считать, что $\tau'_k = \tau'_1$, $\nu'_k = \nu'_1$ для всех k. Из последнего равенства вытекает, что все преобразования Э.6, которые применяются при переходах от Ω_{v_k} к $\Omega_{v_{k+1}}$, вводят новую границу. Обозначим, как и в §2 гл.II через $Ker(\tilde{\Omega})$ ядро уравнения $\tilde{\Omega}$ и через $\check{\Omega}$ - уравнение, полученное из $\tilde{\Omega}$ удалением всех коэффициентных уравнений и всех основных уравнений с номерами $\mu \in Ker(\tilde{\Omega})$. Проверим, что все обобщённые уравнения $Ker(\tilde{\Omega}_{v_k})$ имеют одно и то же множество основ /при естественной нумерации/. Для этого достаточно рассмотреть уравнения $\tilde{\Omega}_{v_k}$ и $\tilde{\Omega}_{v_{k+1}}$. Заметим сразу, что, так как случаи 3,4 не имеют места, рабочие участки уравнения $\tilde{\Omega}_{v_k}$ не содержат коэффициентных уравнений.

Если $tp(v_k)=7,8$ или 10, то $\Omega_{v_{k+1}}$ получается из Ω_{v_k} разрезанием /в некоторых случаях/ основы μ, элиминируемой в уравнении Ω_{v_k} по пункту а/ определения элиминируемой основы и последующем удалении одной из полученных основ, которая также является элиминируемой по пункту а/. Однако в силу сделанного выше замечания о том, что преобразования Э.6 вводят новую границу, оставшаяся /после разрезания и удаления/ часть основы μ также будет элиминируемой, но уже по пункту б/. Тем самым, множество основ из ядра не изменилось.

Пусть $tp(v_k)=9$. Аналогично только что разобранному случаю, достаточно показать, что все основы уравнения $\tilde{\Omega}_{v_{k+1}}$, полученные разрезанием из основы μ_2, не принадлежат ядру. Разрезав предварительно основы μ_1 и μ_2 уравнения Ω_{v_k} по всем границам, которые продолжены в уравнении Ω_{v_k} через обе эти основы, можно с самого начала считать, что участок $[j_1, j_2]$ не содержит закрытых границ уравнения $\tilde{\Omega}_{v_k}$, т.е. закрыт в этом уравнении. Построим какую-либо последовательность вида (2.18) для уравнения $\tilde{\Omega}_{v_k}$ и выберем в ней первый член Ω_i, в котором элиминируема одна из основ η, полученных разрезанием из основ $\mu_1, \mu_2, \Delta(\mu_1), \Delta(\mu_2)$. Основа η не может быть получена разрезанием из основ μ_1 и μ_2. Кроме того, если основа η элиминируема в уравнении Ω_i по пункту б/, то либо $\alpha(\eta)\in\{\alpha(\Delta(\mu_1)), \alpha(\Delta(\mu_2))\}$, либо $\beta(\eta)\in\{\beta(\Delta(\mu_1)), \beta(\Delta(\mu_2))\}$. Начнём теперь построение последовательности вида (2.18) для уравнения $\Omega_{v_{k+1}}$, удалив те же первые i

основ, что и в уравнении $\widetilde{\Omega}_{v_k}$. После этого некоторая основа η' , полученная разрезанием из основ $\mu_2, \Delta(\mu_2)$ уравнения $\Omega_{v_{k+1}}$, окажется элиминируемой. Однако после удаления основы η' можно последовательно удалить все остальные основы, полученные разрезанием из μ_2 , пользуясь пунктом б/ определения элиминируемой основы, так как все границы, касающиеся таких основ, /за исключением $\alpha(\mu_2), \beta(\mu_2)$ / не были продолжены граничной связью через основу $\Delta(\mu_1)$ в уравнениие Ω_{v_k} и, следовательно, не касаются никаких других основ уравнения $\widetilde{\Omega}_{v_{k+1}}$. Итак, все основы уравнения $\Omega_{v_{k+1}}$, полученные разрезанием из основы μ_2 , не принадлежат ядру.

Мы доказали, что уравнения $Ker(\Omega_{v_k})$ независимо от k содержат одно и то же число основ, которое мы обозначим через n''. Докажем теперь неравенство

$$n_k' \leq 3\tau' + 6n'' + 1. \qquad (3.2)$$

В самом деле, если k - первый номер, для которого (3.2) нарушается, то

$$n_{k-1}' \leq 3\tau' + 6n'' + 1, \quad n_k' \geq 3\tau' + 6n'' + 2 \qquad (3.3)$$

и, в силу леммы 3.Iа/, $tp(v_{k-1}) = 10$. Отсюда вытекает, что к обобщённому уравнению $\Omega_{v_{k-1}}$ неприменимы преобразования случаев 5-9. Следовательно, всякий рабочий участок уравнения $\Omega_{v_{k-1}}$ либо содержит не менее трёх основ, либо содержит основу уравнения $Ker(\Omega_{v_{k-1}})$. Поэтому $u_{k-1} + w_{k-1}' \leq \frac{1}{3} n_{k-1}' + n''$ и, в силу $(3.I)$, $\tau' = n_{k-1}' - 2w_{k-1}' - u_{k-1}' \geq \frac{1}{3} n_{k-1}' - 2n''$, что противоречит (3.3) .

Из $(3.I)$ и (3.2) теперь вытекает, что $u_k' + w_k' \leq n_k' \leq$ $\leq 3\tau' + 6n'' + 1$, откуда $\rho_k' \leq v_k' + u_k' + w_k' + 1 \leq$

$\leqslant 3\tau' + 6n'' + v' + 2$. Следовательно, $\{\Omega_{v_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ конечно и некоторое обобщённое уравнение встречается среди $\{\Omega_{v_k}\}$ бесконечно много раз.

Пусть теперь $\Omega_{v_k} = \Omega_{v_\ell}$. Из проведённого выше анализа вытекает, что $Ker(\tilde{\Omega}_{v_{i+1}})$ получается из $Ker(\tilde{\Omega}_{v_i})$ разрезанием некоторых неизвестных на несколько новых и последующим удалением некоторых неизвестных, не принадлежащих ни одной основе уравнения $Ker(\tilde{\Omega}_{v_i})$ и не входящих ни в одно коэффициентное уравнение. Таким образом, число неизвестных, принадлежащих основам и коэффициентным уравнениям обобщённого уравнения $Ker(\tilde{\Omega})$ может лишь возрасти при переходе от v_i к v_{i+1} и, так как $\Omega_{v_k} = \Omega_{v_\ell}$, это число одно и то же для всех вершин v_k, $v_{k+1}, \dots, v_\ell$. Отсюда легко получается, что $\pi(v_k, v_\ell)(h_i) = h_i$ для любой такой неизвестной. Так как все основы, вовлекаемые в преобразования $\tilde{\Omega}_{v_i} \to \tilde{\Omega}_{v_{i+1}}$ не принадлежат ядру, то аналогичные преобразования можно проделать с уравнением $\check{\Omega}_{v_i}$ и получить уравнение $\check{\Omega}_{v_{i+1}}$; при этом $G(\check{\Omega}^*_{v_i}) \to G(\check{\Omega}^*_{v_{i+1}})$ - изоморфизм, так как все преобразования Э.6 увеличивают число границ. Тем самым построена коммутативная диаграмма (2.21) и доказана инвариантность автоморфизма $\pi(v_k, v_\ell)$ относительно ядра. Случай $7 \leq tp(v_n) \leq 10$ полностью разобран.

Перейдём к случаю $tp(v_n) = 12$. Легко видеть, что $\varrho_k \leq \varrho_1$. Отсюда и из леммы 3.Ia/ вытекает конечность множества $\{\Omega_{v_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Поэтому некоторое обобщённое уравнение Ω_{v_k} встретится в рассматриваемой последовательности бесконечное число раз.

Превратим вначале $\tilde{\Omega}_{v_k}$ в локально линейное уравнение, объявив линейной частью все рабочие участки. Пусть Γ - соответствующий граф и Γ' - та компонента связности, которая содержит неизвестную h_1. Возьмём в качестве требуемой линейной части объединение участков из Γ'.

Если $\Omega_{v_k} = \Omega_{v_\ell}$, то $n'_k = n'_{k+1} = \ldots = n'_\ell$, откуда вытекает, что двойник $\Delta(\mu)$ основы μ в описании преобразования случая I2 лежит на рабочем участке, очевидно, из линейной части, для всех вершин $v_i (k \le i \le \ell-1)$. Поэтому при переходе к локально линейному уравнению $\tilde{\Omega}_{v_i}$ эта основа μ разрезается на переменные основы, откуда, так же, как и в предыдущем случае, вытекает существование гомоморфизма $\check{\zeta}$, делающего диаграмму (2.29) коммутативной /здесь $\zeta = \pi(v_k, v_\ell)$, $\Omega = \tilde{\Omega}_{v_k}$/. Так же, как и в предыдущем случае, $\nu'_k = \nu'_{k+1} = \ldots = \nu'_\ell$ в силу леммы 3.I6/, поэтому все использованные преобразования Э.6 вводят новую границу и, значит, $\hat{\check{\zeta}}$ - изоморфизм. Если λ - основа уравнения Ω_{v_i}, лежащая на рабочем участке такая, что $\Delta(\lambda)$ лежит на постоянном участке, то равенства

$\hat{\check{\pi}}(v_i, v_{i+1})(h[\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]) = h[\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$,

$\hat{\check{\pi}}(v_i, v_{i+1})(h_j) = h_j$ /здесь $\hat{\pi}(v_i, v_{i+1}) : H(\check{\Omega}^*_{v_i}) \to H(\check{\Omega}^*_{v_{i+1}})$; мы предполагаем, что сохраняется естественная нумерация основ, а h_j лежит на постоянном участке/ вытекают из построения. Это завершает доказательство инвариантности автоморфизма $\pi(v_k, v_\ell)$ относительно нелинейной части.

Лемма 3.3 доказана.

Назовём путь $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_\ell$ в дереве $T(\Omega)$, для которого $7 \le tp(v_i) \le 10$ для всех i или $tp(v_i) = 12$ для всех v_i, з а п р е щ ё н н ы м, если некоторое обобщённое уравнение с ρ неизвестными встречается среди $\{\Omega_{v_i} \mid 1 \le i \le l\}$ по меньшей мере $2^{(4\rho^2)}+1$ раз. Мы определим ниже также запрещённые конечные отрезки тех бесконечных путей в дереве $T(\Omega)$, для которых $tp(v_i)=15$ для всех i. Для этого нам понадобится несколько вспомогательных понятий.

Введём новый параметр

$$\tau''_v = \tau'_v + \rho - \rho''_v, \tag{3.4}$$

где ρ - число неизвестных исходного уравнения Ω, а ρ''_v - число фиктивных неизвестных, лежащих на постоянных участках уравнения Ω_v. При доказательстве леммы 3.2 мы видели, что $\rho''_v \le \rho$ и, следовательно, $\tau''_v \ge 0$. Кроме того, если $v_1 \to v_2$ - боковое ребро, то $\tau''_2 < \tau''_1$.

Определим совместной рекурсией по значению τ''_v <u>конечное</u> поддерево $T_0(\Omega_v)$ и натуральное число $s(\Omega_v)$. Дерево $T_0(\Omega_v)$ будет иметь вершину v в качестве корня и состоять из некоторых вершин и рёбер дерева $T(\Omega)$, лежащих выше вершины v.

Пусть $\tau''_v=0$. Тогда в дереве $T(\Omega)$ выше вершины v не может быть боковых рёбер, а также вершин типа I5. Поэтому поддерево $T_0(\Omega_v)$, состоящее из тех вершин v_1, лежащих выше v, для которых путь из v в v_1 не содержит запрещённых подпутей, будет конечным в силу леммы 3.2, леммы 3.3 и леммы Кёнига. Заметим, что свойство пути "быть запрешённым" легко проверяется алгоритмически, поэтому построение поддерева $T_0(\Omega_v)$ эффективно: надо лишь конструировать дерево $T(\Omega)$, начиная с вершины v, отсекая при этом все вершины, которые приводят к запрещённому пути; дерево, полученное по окончании этого процесса и будет деревом $T_0(\Omega_v)$. Положим теперь

$$\mathfrak{I}(\Omega_w) = \max_w \max_{\langle P,R\rangle} \rho_w \cdot f_2(\Omega_w, P, R), \quad (3.5)$$

где w пробегает все вершины в дереве $T_0(\Omega_v)$, для которых $tp(w)=2$ и Ω_w нетривиально; $\langle P,R\rangle$ пробегает множество тех преиодических структур уравнения $\tilde{\Omega}_w$, относительно которых $\tilde{\Omega}_w$ регулярно, а f_2 – функция из леммы 2.II.

Допустим теперь, что $\tau''_v>0$ и для всех v_1 с $\tau''_1<\tau''_v$ дерево $T_0(\Omega_{v_1})$ и число $\mathfrak{I}(\Omega_{v_1})$ уже определены. Начнём с рассмотрения путей вида

$$\tau = v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m, \quad (3.6)$$

где $tp(v_i)=15\ (1\le i\le m)$, все рёбра главные, вершина v_1 лежит выше v и $\tau_i \ge \tau''_v (1\le i\le m)$. Из доказательства леммы 3.2 вытекает, что в пути, соединяющем v и v_1, не могут встретиться вершины типа I2, поэтому из леммы 3.Iв/ получаем $\tau''_i=\tau''_v\ (1\le i\le m)$. Через μ_i будем обозначать основу-носитель уравнения Ω_{v_i}. Путь (3.6) назовём μ - р е д у ц и р у ю щ и м, если $\mu_1=\mu$ и либо изв вершины v_2 не выходят боковые рёбра и основа μ встречается в последовательности $\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}$ по крайней мере ещё один раз, либо из вершины v_2 выходят боковые рёбра $v_2\to w_1$, $v_2\to w_2,\ldots, v_2\to w_k$ и основа μ встречается в последовательности $\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}$ по крайней мере $\max\limits_{1\le i\le k}\mathfrak{I}(\Omega_{w_i})$ раз.

Далее, путь вида 3.6 назовём з а п р е щ ё н н ы м, если он может быть представлен в виде

$$\tau = \tau_1 \mathfrak{s}_1 \tau_2 \mathfrak{s}_2 \ldots \tau_\ell \mathfrak{s}_\ell \tau' \quad (3.7)$$

так, что для некоторой последовательности основ $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_\ell$ выполнены следующие три утверждения:

а/ всякая основа, хотя бы один раз входящая в последовательность $\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}$, по крайней мере $40n^2 f_1(\Omega_{v_2})+20n+1$

раз /где n - число пар основ уравнений Ω_{v_i}, а $f_1(\Omega_{v_2}) = \max\limits_{\Omega} f_1(\Omega)$; Ω пробегает множество локально линейных уравнений, которые можно получить из Ω_{v_2} способом, указанным в начале параграфа/ входит в последовательность $\eta_1, \dots, \eta_l$;

б/ путь τ_i является η_i -редуцирующим $(1 \leq i \leq l)$;

в/ всякая основа, являющаяся переносной основой некоторого уравнения пути τ, является переносной основой некоторого уравнения пути τ'.

Очевидно, свойство пути (3.6) "быть запрещённым" алгоритмически разрешимо. Проверим, что всякий бесконечный путь, аналогичный (3.6), содержит запрещённый подпуть. В самом деле, пусть ω - множество всех основ, ~~являющихся переносным~~ встречающихся бесконечно часто в последовательности $\mu_1, \dots, \mu_m, \dots$; $\tilde{\omega}$ - множество всех основ, являющихся переносными основами бесконечного числа уравнений Ω_{v_i}. Отсекая от данного пути слева конечную часть, можно считать, что все основы в последовательности $\mu_1, \dots, \mu_m, \dots$ принадлежат ω, а все основы, являющиеся переносными хотя бы в одном Ω_{v_i}, принадлежат $\tilde{\omega}$. Легко видеть, что данный бесконечный путь для любого $\mu \in \omega$ содержит бесконечно много непересекающихся μ -редуцирующих /конечных/ подпутей. Поэтому можно сконструировать подпуть (3.7) данного пути, удовлетворяющий пунктам а,б/ определения запрещённого пути. Удлинив τ', мы построим искомый запрещённый подпуть.

Построим теперь поддерево $T'(\Omega_v)$ дерева $T(\Omega)$, состоящее из всех вершин v_1, для которых путь из v в v_1 не содержит ни запрещённых подпутей, ни вершин v_2 с $\tau''_2 < \tau''_v$, кроме, быть может, v_1. Таким образом, в концевых вершинах дерева $T'(\Omega_v)$ стоят либо вершины v_1, для которых

$\tau_1'' < \tau_v''$, либо концевые вершины дерева $T(\Omega_v)$. Как и раньше, поддерево $T'(\Omega_v)$ конечно в силу леммы 3.2 и может быть эффективно построено. $T_0(\Omega_v)$ получается из $T'(\Omega_v)$ приклеиванием уже имеющихся по предположению рекурсии деревьев $T_0(\Omega_{v_1})$ к тем конецевым вершинам v_1 дерева $T'(\Omega_v)$, для которых $\tau_1'' < \tau_v''$. Функцию $J(\Omega_v)$ по-прежнему определим равенством (3.5).

Определение поддеревьев $T_0(\Omega_v)$ закончено. Положим $T_0(\Omega) \rightleftharpoons T_0(\Omega_{v_0})$.

Отметим, что если $tp(v) \geq 6$ и $v \to w_1, \dots, v \to w_m$ - полный список главных рёбер, выходящих из вершины v , то обобщённые уравнения $\Omega_{w_1}, \dots, \Omega_{w_m}$ получены из Ω_v путём последовательного применения нескольких элементарных преобразований. Этой композиции соответствует некоторая функция e , являющаяся композицией соответствующих функций e из определения элементарного преобразования. Функция e парам вида $(\Omega_v, \overline{H})$ ставит в соответствие пары вида $(\Omega_{w_i}, \overline{H}^{(i)})$. Аналогично определяется функция e при $tp(v) = 3$, с заменой главных рёбер на боковые. При $tp(v) = 4, 5$ функцию e возьмём тождественной.

Пусть $tp(v) = 15$ и из вершины v выходят боковые рёбра $v \to w_1, \dots, v \to w_m$,т.е. основа-носитель μ уравнения Ω_v пересекается с $\Delta(\mu)$. По каждому решению $\overline{H}$ уравнения Ω_v можно построить решение $\overline{H}'$ уравнения $\Omega_{v'}$ /см. описание случая 15.1/, положив $H'_{\rho_v+1} \doteq H[1, \beta(\Delta(\mu))]$ /это слово несократимо, т.к. основы μ и $\Delta(\mu)$ пересекаются/. Положим $e'(\Omega_v, \overline{H}) = e(\Omega_{v'}, \overline{H}')$. Функция e' отображает пары вида $(\Omega_v, \overline{H})$ в пары вида $(\Omega_{w_i}, \overline{H}^{(i)})$.

Некоторым вершинам v дерева $T_0(\Omega)$ с $tp(v)>1$ в начале параграфа были поставлены в соответствие группы автоморфизмов P_v, которые порождаются конечным числом канонических групп автоморфизмов. Обозначим через P группу автоморфизмов группы $G(\Omega^*)$, порождённую всевозможными группами $\pi(v_0,v)^{-1} P_v \pi(v_0,v)$ /$\pi(v_0,v)$ - изоморфизм, так как $tp(v)\neq 1$ /.

В доказательстве следующей леммы под минимальным решением уравнения Ω_v понимается решение уравнения Ω_v, минимальное относительно группы $\pi(v_0,v) P \pi(v_0,v)^{-1}$. Соответственно, запись $\bar{H}^{(1)} \lesssim_{\pi(v_0,v)P\pi(v_0,v)^{-1}} \bar{H}^{(2)}$ сокращается до $\bar{H}^{(1)} \lesssim \bar{H}^{(2)}$.

ЛЕММА 3.4. Для любого решения $\bar{H}$ обобщённого уравнения Ω существует концевая вершина w дерева $T_0(\Omega)$, имеющая тип I или 2 и решение $\bar{H}^{(w)}$ обобщённого уравнения Ω_w такие, что:

а/ $\pi_{\bar{H}} = \bar{\pi}\, \pi_{\bar{H}^{(w)}}\, \pi(v_0,w)\, \sigma$, где $\bar{\pi}$ - эндоморфизм группы F_2 и $\sigma \in P$,

б/ если $tp(w)=2$ и уравнение Ω_w нетривиально, то существует простое циклически приведённое слово P такое, что $\bar{H}^{(w)}$ периодическое относительно периода P, а уравнение Ω_w сингулярно относительно периодической структуры $\mathcal{P}(\bar{H}^{(w)}, P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим последовательность

$$(\Omega, \bar{H}) = (\Omega_{v_0}, \bar{H}^{(0)}) \to (\Omega_{v_1}, \bar{H}^{(1)}) \to \ldots \to (\Omega_{v_u}, \bar{H}^{(u)}) \to \ldots \quad (3.8)$$

в которой v_i - некоторые вершины дерева $T(\Omega)$, следующим образом.

Положим $v_1 = v_0$; в качестве $\bar{H}^{(1)}$ возьмём какое-нибудь минимальное решение уравнения Ω, обладающее свойством $\bar{H} \gtrsim \bar{H}^{(1)}$.

Пусть $i \geq 1$ и член $(\Omega_{v_i}, \bar{H}^{(i)})$ последовательности (3.8) уже построен.

Если $7 \leq tp(v_i) \leq 12$ и Ω_{v_i} обладает <u>минимальным</u> решением $\bar{H}^+$ таким, что $\bar{H}^{(i)} \gtrsim \bar{H}^+, \partial(\bar{H}^{(i)}) > \partial(\bar{H}^+)$ и $H_k^+ \doteq H_k^{(i)}$ для всех неизвестных h_k, принадлежащих постоянным участкам, то полагаем $v_{i+1} = v_i, \; \bar{H}^{(i+1)} = \bar{H}^+$.

Если $tp(v_i) = 15$, из вершины v_i выходят боковые рёбра $v_i \to w_1, \ldots, v_i \to w_m$, т.е. основа-носитель μ уравнения Ω_{v_i} пересекается со своим двойником $\Delta(\mu)$, и существует простое слово P такое, что

$$H^{(i)}[1, \beta(\Delta(\mu))] \doteq P^r P_1, \; P \doteq P_1 P_2, \; r \geq \max_{1 \leq j \leq m} s(\Omega_{w_j}), \tag{3.9}$$

то полагаем $(\Omega_{v_{i+1}}, \bar{H}^{(i+1)}) = e'(\Omega_{v_i}, \bar{H}^{(i)})$.

Во всех остальных случаях полагаем $(\Omega_{v_{i+1}}, \bar{H}^{(i+1)}) = e(\Omega_{v_i}, \bar{H}^{(i)})$. Построение последовательности (3.8) заканчивается, если $tp(v_i) \leq 2$. Наиболее трудная часть доказательства заключается в проверке того, что в последовательности (3.8) на самом деле $v_i \in T_0(\Omega)$.

Отметим, прежде всего, что из построения и леммы 2.I вытекает, что при $i \geq 1$ решение $\bar{H}^{(i)}$ минимально. Лёгкой индукцией по $q-p$ доказывается, что при $p < q$ решения $\bar{H}^{(p)}$ и $\bar{H}^{(q)}$ в последовательности (3.8) связаны соотношением

$$\pi_{\bar{H}^{(p)}} = \pi \pi_{\bar{H}^{(q)}} \pi(v_0, v_q) \, \sigma \, \pi(v_0, v_p)^{-1}, \tag{3.10}$$

где π - эндоморфизм группы F_2, а $\sigma \in P$.

Предположим, что $v_i \notin T_0(\Omega)$, и пусть i_0 - первый из таких номеров. Из конструкции дерева $T_0(\Omega)$ вытекает, что найдётся $i_1 < i_0$ такое, что путь из v_{i_1} в v_{i_0} содержит подпуть, запрещённый при построении дерева $T'(\Omega_{v_{i_1}})$. Из минимальности i_0 вытекает, что этот запрещённый подпуть ведёт из v_{i_2} $(i_1 \leq i_2 < i_0)$ в v_{i_0}.

Допустим, что $7 \leq tp(v_i) \leq 10$ для всех $i_2 \leq i \leq i_0$. По определению запрещённого пути, найдутся такие индексы $i_2 \leq i_3 < i_4 < \ldots < i_{r+2} \leq i_0$, что $\Omega_{v_{i_3}} = \ldots = \Omega_{v_{i_{r+2}}}$ $(r = 2^{(4\delta^2)}+1)$ и $v_{i_3} \neq v_{i_4} \neq \ldots \neq v_{i_{r+2}}$. Можно при этом считать, что $v_{i_k+1} \neq v_{i_k}$ $(3 \leq k \leq r+1)$, т.е. i_k+1 -й член последовательности (3.8) строится с помощью функции e. Среди $i_3, i_4, \ldots, i_{r+2}$ найдётся пара индексов $p<q$ такая, что $T(\bar{H}^{(p)}) = T(\bar{H}^{(q)})$. В силу леммы 3.3, автоморфизм $\pi(v_p, v_q)$ инвариантен относительно ядра уравнения Ω_{v_p} и, в силу леммы 2.5, лежит в группе автоморфизмов $\pi(v_0, v_p)\, P\, \pi(v_0, v_p)^{-1}$. Поэтому из (3.I0) следует, что $\bar{H}^{(q)} \doteq \bar{H}^{(p)}$. Преобразования случаев 7-I0 уменьшают длину решения, поэтому $d(\bar{H}^{(q)}) < d(\bar{H}^{(p)})$. Они могут лишь увеличить число неизвестных, лежащих на постоянных участках, поэтому, в силу $\Omega_{v_p} = \Omega_{v_q}$, это число одно и то же для всех уравнений Ω_{v_i} $(p \leq i \leq q)$. Отсюда вытекает, что $H_k^{(q)} \doteq H_k^{(p)}$ для всех таких неизвестных h_k. Мы получили противоречие, так как согласно построению последовательности (3.8), должно быть $v_{p+1} = v_p$.

Аналогично, на основании леммы 2.7, получается противоречие в случае $tp(v_i) = 12$ $(i_2 \leq i \leq i_0)$.

Перейдём к наиболее трудному случаю, $tp(v_i) = 15$ $(i_2 \leq i \leq i_0)$. Будем использовать обозначения, принятые при определении дерева $T_0(\Omega_v)$, т.е. предположим, что у нас есть некоторый путь вида (3.6), которому соответствует фрагмент

$$(\Omega_{v_1}, \bar{H}^{(1)}) \to (\Omega_{v_2}, \bar{H}^{(2)}) \to \ldots \to (\Omega_{v_m}, \bar{H}^{(m)}) \quad (3.11)$$

последовательности (3.8). При этом $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ - вершины дерева $T_0(\Omega)$, решение $\overline{H}^{(1)}$ обобщённого уравнения Ω_{v_1} минимально и для всех вершин v_i, из которых ведут боковые рёбра, условие (3.9) нарушается.

Как и ранее, пусть μ_i обозначает основу-носитель уравнения Ω_{v_i}; $\omega = \{\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}\}$; $\widetilde{\omega}$ - множество всех основ, являющихся переносными основами хотя бы одного уравнения в (3.11). Через ω_1 обозначим множество тех основ μ, для которых либо μ либо $\Delta(\mu)$ лежит в $\omega \cup \widetilde{\omega}$; через ω_2 - множество всех остальных основ. Через $\alpha(\omega)$ обозначим следующую границу:

$$\alpha(\omega) \rightleftharpoons \min\left(\min_{\mu \in \omega_2} \alpha(\mu), j\right),$$

где j - граница, отделяющая рабочие участки от постоянных. Введём постоянно действующее обозначение

$$X_\mu \doteq H[\alpha(\mu), \beta(\mu)].$$

Если $(\Omega, \overline{H})$ - член последовательности (3.11), то через $\partial_\omega(\overline{H})$ и $\xi_\omega(\overline{H})$ обозначим следующие числа:

$$\partial_\omega(\overline{H}) = \sum_{i=1}^{\alpha(\omega)-1} \partial(H_i), \tag{3.12}$$

$$\xi_\omega(\overline{H}) = \sum_{\mu \in \omega_1} \partial(X_\mu) - 2\partial_\omega(\overline{H}). \tag{3.13}$$

Каждая неизвестная h_i участка $[1, \alpha(\omega)]$ принадлежит по крайней мере двум основам, и обе эти основы лежат в ω_1, поэтому $\xi_\omega(\overline{H}) \geq 0$.

Превратим $\widetilde{\Omega}_{v_1}$ в локально линейное уравнение, объявив линейной частью объединение всех закрытых участков, лежащих левее $\alpha(\omega)$ и таких, что $\gamma_i = 2$ для неизвестных h_i, принадлежащих этим участкам. Так как группа автоморфизмов из леммы 2.8

для этого уравнения содержится в $\bar{\pi}(v_0, v_1)\, P\, \bar{\pi}(v_0, v_1)^{-1}$ по построению, то решение $\bar{H}^{(1)}$ минимально относительно этой группы автоморфизмов в силу леммы 2.1. Применив лемму 2.8, получим

$$\partial_1(\bar{H}^{(1)}) \leq \partial_2(\bar{H}^{(1)}) \cdot f_1(\Omega_{v_1}), \tag{3.14}$$

где числовые характеристики ∂_1 и ∂_2 определены формулами (2.31), (2.32). Оценим на основании неравенства (3.14) величину $\partial_\omega(H^{(1)})$ сверху через $\zeta_\omega(\bar{H}^{(1)})$.

Обозначим через $\gamma_i(\omega)$ количество основ $\mu \in \omega_1$, которым принадлежит неизвестная h_i. Тогда

$$\sum_{\mu \in \omega_1} \partial(X_\mu^{(1)}) = \sum_{i=1}^{\rho} \partial(H_i^{(1)}) \cdot \gamma_i(\omega). \tag{3.15}$$

Введём обозначения $I \rightleftharpoons \{ i \mid 1 \leq i \leq \alpha(\omega) - 1 \ \&\ \gamma_i = 2 \}$ и $J \rightleftharpoons \{ i \mid 1 \leq i \leq \alpha(\omega) - 1 \ \&\ \gamma_i > 2 \}$. Согласно определению (3.12),

$$\partial_\omega(\bar{H}^{(1)}) = \sum_{i \in I} \partial(H_i^{(1)}) + \sum_{i \in J} \partial(H_i^{(1)}) = \partial_1(\bar{H}^{(1)}) + \sum_{i \in J} \partial(H_i^{(1)}). \tag{3.16}$$

Пусть теперь $(\lambda, \Delta(\lambda))$ - пара постоянных основ рассматриваемого локально линейного уравнения $\tilde{\Omega}_{v_1}$, причём в нелинейной части лежит основа λ. При переходе от Ω_{v_1} к $\tilde{\Omega}_{v_1}$ эта пара могла образоваться только из основ $\mu \in \omega_1$. Возможны два типа постоянных основ.

<u>Тип</u> 1. <u>Основа</u> λ <u>лежит</u> <u>левее</u> <u>границы</u> $\alpha(\omega)$. Тогда основа λ целиком составлена из неизвестных $\{ h_i \mid i \in J \}$ и, значит, $\partial(X_\lambda) \leq \sum_{i \in J} \partial(H_i^{(1)})$. Поэтому сумма длин $\partial(X_\lambda) + \partial(X_{\Delta(\lambda)})$ по парам постоянных основ первого типа не превосходит $2n' \cdot \sum_{i \in J} \partial(H_i^{(1)})$.

<u>Тип</u> 2. <u>Основа</u> λ <u>лежит</u> <u>правее</u> <u>границы</u> $\alpha(\omega)$. Сумма длин постоянных основ второго типа не превосходит $2 \sum_{i=\alpha(\omega)}^{\rho} \partial(H_i^{(1)}) \cdot \gamma_i(\omega)$.

С учётом определения (2.32), получаем

$$\delta_2(\bar{H}^{(1)}) \leq \max\left\{2n' \cdot \sum_{i\in J} \delta(H_i^{(1)}) + 2\sum_{i=\alpha(\omega)}^{\varsigma} \delta(H_i^{(1)}) \cdot \gamma_i(\omega),\ 1\right\}. \quad (3.17)$$

Из (3.13), (3.15) вытекает

$$\varsigma_\omega(\bar{H}^{(1)}) \geq \sum_{i\in J} \delta(H_i^{(1)}) + \sum_{i=\alpha(\omega)}^{\varsigma} \delta(H_i^{(1)}) \cdot \gamma_i(\omega). \quad (3.18)$$

Из неравенств (3.16), (3.14), (3.17), (3.18) получаем искомую оценку:

$$\delta_\omega(\bar{H}^{(1)}) \leq \max\left\{\varsigma_1(\Omega_{v_1}),\ \varsigma_\omega(\bar{H}^{(1)}) \cdot (2n'\varsigma_1(\Omega_{v_1}) + 1)\right\}. \quad (3.19)$$

Из определения преобразований случая 15 вытекает, что все слова $H^{(i)}[1, \varsigma_i + 1]$ являются концами слова $H^{(1)}[1, \varsigma_1 + 1]$, т.е.

$$H^{(1)}[1, \varsigma_1 + 1] \doteq V_i H^{(i)}[1, \varsigma_i + 1] \quad (3.20)$$

С другой стороны, основы $\mu \in \omega_2$ не участвуют в этих преобразованиях ни в качестве основ-носителей, ни в качестве переносных, поэтому $H^{(1)}[\alpha(\omega), \varsigma_1 + 1]$, в свою очередь, является концом слова $H^{(i)}[1, \varsigma_i + 1]$, т.е.

$$H^{(i)}[1, \varsigma_i + 1] \doteq \bar{V}_i H^{(1)}[\alpha(\omega), \varsigma_1 + 1]. \quad (3.21)$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} &\delta_\omega(\bar{H}^{(i)}) - \delta_\omega(\bar{H}^{(i+1)}) = \delta(\bar{V}_i) - \delta(\bar{V}_{i+1}) = \\ &= \delta(V_{i+1}) - \delta(V_i) = \delta(X_{\mu_i}^{(i)}) - \delta(X_{\mu_i}^{(i+1)}). \end{aligned}\right\} \quad (3.22)$$

В частности, из (3.13), (3.22) вытекает, что $\varsigma_\omega(\bar{H}^{(1)}) = \varsigma_\omega(\bar{H}^{(2)}) = \ldots = \varsigma_\omega(\bar{H}^{(m)}) = \varsigma_\omega$. Обозначим через δ_i число (3.22).

Пусть теперь путь (3.6) является μ-редуцирующим, т.е. $\mu_1 = \mu$ и либо из вершины v_2 не выходят боковые рёбра и основа μ встречается в последовательности $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ по крайней мере ещё один раз, либо из вершины v_2 выходят боковые рёбра $v_2 \to w_1, \ldots, v_2 \to w_k$ и основа μ встречается в последовательности $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ по крайней мере $\max\limits_{1 \le i \le k} \jmath(\Omega_{w_i})$ раз. Оценим при этих условиях $\partial(V_m) = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \delta_i$ снизу.

Проверим вначале, что если $\mu_{i_1} = \mu_{i_2} = \mu \ (i_1 < i_2)$ и $\mu_i \ne \mu$ при $i_1 < i < i_2$, то

$$\sum_{i=i_1}^{i_2-1} \delta_i \geqslant \partial\left(H^{(i_1+1)}[1, \alpha(\Delta(\mu_{i_1+1}))]\right). \tag{3.23}$$

В самом деле, если $i_2 = i_1 + 1$, то $\delta_{i_1} = \partial(H^{(i_1)}[1, \alpha(\Delta(\mu))]) = \partial(H^{(i_1+1)}[1, \alpha(\Delta(\mu))]$. Если же $i_2 > i_1 + 1$, то $\mu_{i_1+1} \ne \mu$ и основа μ - переносная в уравнении $\Omega_{v_{i_1+1}}$. Поэтому $\delta_{i_1+1} + \partial(H^{(i_1+2)}[1, \alpha(\mu)]) = \partial(H^{(i_1+1)}[1, \alpha(\Delta(\mu_{i_1+1}))])$.

Теперь (3.23) вытекает из легко проверяемого неравенства $\sum\limits_{i=i_1+2}^{i_2-1} \delta_i \geqslant \partial(H^{(i_1+2)}[1, \alpha(\mu)])$.

Таким образом, если из вершины v_2 не выходят боковые рёбра, т.е. основы μ_2 и $\Delta(\mu_2)$ не пересекаются в уравнении Ω_{v_2}, то из (3.23) следует $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \delta_i \geqslant \partial(H^{(2)}[1, \alpha(\Delta(\mu_2))]) \geqslant \partial(X^{(2)}_{\mu_2}) \geqslant \geqslant \partial(X^{(2)}_{\mu}) = \partial(X^{(1)}_{\mu}) - \delta_1$, откуда

$$\sum_{i=1}^{m-1} \delta_i \geqslant \frac{1}{2} \partial(X^{(1)}_{\mu}). \tag{3.24}$$

Пусть теперь из вершины v_2 выходят боковые рёбра $v_2 \to w_1, \ldots, v_2 \to w_k$; $H^{(2)}[1, \alpha(\Delta(\mu_2))] \doteq Q$ и P - простое слово такое, что $Q \doteq P^d$. $X^{(2)}_{\mu_2}$ и $X^{(2)}_{\mu}$ являются началами слова $H^{(2)}[1, \beta(\Delta(\mu_2))]$, которое, в свою очередь, является началом слова P^∞. По построению последовательности (3.8), соотношение (3.9) не имеет места для вершины v_2, т.е.

$$X^{(2)}_{\mu} \doteq P^r P_1, \ P \doteq P_1 P_2, \ r < \max_{1 \le i \le k} \jmath(\Omega_{w_i}). \tag{3.25}$$

Пусть $\mu_{i_1}=\mu_{i_2}=\mu;\ i_1<i_2;\ \mu_i\neq\mu$ при $i_1<i<i_2$. Если

$$\partial\left(X^{(i_1+1)}_{\mu_{i_1+1}}\right)\geq 2\,\partial(P) \qquad (3.26)$$

и $H^{(i_1+1)}[1,\varrho_{i_1+1}]$ начинается со слова, являющегося циклической перестановекой слова P^3, то в силу леммы I.2.9 [I] $\partial\left(H^{(i_1+1)}[1,\ell(\Delta(\mu_{i_1+1}))]\right)\geq\partial(P)$, что в сочетании с (3.23) даёт $\sum_{i=i_1}^{i_2-1}\delta_i\geq\partial(P)$. Так как в последовательности $\mu_1,\dots,\mu_{m-1}$ по крайней мере $\max_{1\leq i\leq k} j(\Omega_{w_i})$ раз встречается основа μ, то мы получаем, что либо соотношение (3.26) нарушено для какого-либо $i_1\leq m-1$ либо $\sum_{i=1}^{m-1}\delta_i\geq(\tau-3)\,\partial(P)$.

Если (3.26) нарушено, то из неравенства $\partial\left(X^{(i+1)}_{\mu_i}\right)\leq\partial\left(X^{(i+1)}_{\mu_{i+1}}\right)$, определения (3.22) и (3.25) получим $\sum_{i=1}^{i_1}\delta_i\geq\partial\left(X^{(1)}_{\mu}\right)-\partial\left(X^{(i_1+1)}_{\mu_{i_1+1}}\right)\geq(\tau-2)\cdot\partial(P)$, т.е всё сводится ко второму случаю.

Пусть $\sum_{i=1}^{m-1}\delta_i\geq(\tau-3)\cdot\partial(P)$. Отметим, что из (3.23) при $i_1=1$ вытекает также $\sum_{i=1}^{m-1}\delta_i\geq\partial(Q)\geq\partial(P)$, так что $\sum_{i=1}^{m-1}\delta_i\geq\partial(P)\cdot\max\{1,\tau-3\}$. Отсюда и из (3.25) получим $\sum_{i=1}^{m-1}\delta_i\geq\frac{1}{5}\partial\left(X^{(2)}_{\mu}\right)=\frac{1}{5}\left(\partial\left(X^{(1)}_{\mu}\right)-\delta_1\right)$. Итак,

$$\sum_{i=1}^{m-1}\delta_i\geq\frac{1}{10}\,\partial\left(X^{(1)}_{\mu}\right). \qquad (3.26)$$

Сравнивая (3.24) и (3.26) получаем окончательно, что для μ-редуцирующего пути (3.6) всегда выполнено неравенство (3.26).

Предположим теперь, что путь (3.6) является запрещённым, т.е. обладает представлением вида (3.7). Из определения (3.13) получаем $\sum_{\mu\in\omega_1}\partial\left(X^{(m)}_{\mu}\right)\geq\varrho_{\omega}$, поэтому хотя бы для одной основы $\mu\in\omega_1$ выполнено $\partial\left(X^{(m)}_{\mu}\right)\geq\frac{1}{2n}\varrho_{\omega}$. Так как

$X_{\mu}^{(m)} \mathrel{\bar{\circ}} \left(X_{\Delta(\mu)}^{(m)}\right)^{\pm 1}$, можно считать, что $\mu \in \omega \cup \tilde{\omega}$. Пусть m_1 - длина пути $\tau_1 s_1 \tau_2 s_2 \ldots \tau_\ell s_\ell$ в (3.7). Если $\mu \in \tilde{\omega}$, то, согласно пункту в/ определения запрещённого пути, найдётся $m_1 \le i \le m$ такое, что μ - переносная основа уравнения Ω_{v_i}. Получаем $\partial(X_{\mu_i}^{(m_1)}) \ge \partial(X_{\mu_i}^{(i)}) \ge \partial(X_{\mu}^{(i)}) \ge \partial(X_{\mu}^{(m)}) \ge \frac{1}{2n} \zeta_\omega$. Если же $\mu \in \omega$, то возьмём в качестве μ_i саму основу μ. Мы доказали существование основы $\mu \in \omega$ такой, что

$$\partial(X_{\mu}^{(m_1)}) \ge \frac{1}{2n} \zeta_\omega. \tag{3.27}$$

Далее, в силу пунктов а,б/ определения запрещённого пути, неравенства $\partial(X_{\mu}^{(i)}) \ge \partial(X_{\mu}^{(m_1)}) (1 \le i \le m_1)$, (3.26) и (3.27), получим

$$\sum_{i=1}^{m_1-1} \delta_i \ge \max\left\{\frac{1}{20n}\zeta_\omega, 1\right\} \cdot (40n^2 \zeta_1 + 20n + 1). \tag{3.28}$$

В силу (3.22), сумма в левой части неравенства (3.28) равна $\partial_\omega(\bar{H}^{(1)}) - \partial_\omega(\bar{H}^{(m_1)})$, поэтому $\partial_\omega(\bar{H}^{(1)}) \ge \max\left\{\frac{1}{20n}\zeta_\omega, 1\right\} \times (40n^2 \zeta_1(\Omega_{v_1}) + 20n + 1)$, что противоречит (3.19).

Полученное противоречие было выведено из предположения о существовании запрещённых фрагментов (3.11) в последовательности (3.8). Следовательно, в последовательность (3.8) не входят запрещённые пути ни одного из трёх типов. Отсюда вытекает, что $v_i \in T_0(\Omega)$ для всех v_i в (3.8).

Для всех i либо $v_i = v_{i+1}$ и $\partial(\bar{H}^{(i+1)}) < \partial(\bar{H}^{(i)})$, либо $v_i \to v_{i+1}$ - ребро конечного дерева $T_0(\Omega)$. Поэтому последовательность (3.8) конечна. Пусть $(\Omega_w, \bar{H}^{(w)})$ - заключительный член этой последовательности. Проверим, что пара $(\Omega_w, \bar{H}^{(w)})$ удовлетворяет всем требуемым в доказываемой лемме свойствам.

$tp(w) \in \{1, 2\}$ по построению. Пункт а/ доказываемой леммы вытекает из (3.10). Пусть $tp(w)=2$ и Ω_w нетривиально. Из построения последовательности (3.8) вытекает, что если $[j,k]$ - постоянный участок некоторого уравнения Ω_{v_i}, то $H^{(i)}[j,k] \doteq H^{(i+1)}[j,k] \doteq \ldots \doteq H^{(w)}[j,k]$. Следовательно, из неравенства (3.9) и определения (3.5) функции $\mathfrak{f}(\Omega_v)$ вытекает, что слово $h_1 \ldots h_{\rho_w}$ может быть разбито на подслова $h[i_1,i_2], \ldots, h[i_{k-1},i_k]$ таким образом, что для любого a либо $H^{(w)}[i_a,i_{a+1}]$ имеет длину I, либо $h[i_a,i_{a+1}]$ не входит в основные и коэффициентные уравнения либо $H^{(w)}[i_a,i_{a+1}]$ может быть записано в виде

$$\left.\begin{array}{l} H^{(w)}[i_a,i_{a+1}] \doteq P_a^r P_a',\ P_a \doteq P_a' P_a'',\ P_a \text{ - простое слово} \\ \qquad r \geqslant \max\limits_{\langle \mathcal{P},R\rangle} \rho_w \cdot f_2(\Omega_w,\mathcal{P},R) \end{array}\right\} (3.29)$$

/$\langle \mathcal{P},R\rangle$ пробегает все периодические структуры уравнения $\tilde{\Omega}_w$ относительно которых $\tilde{\Omega}_w$ регулярно/. Пусть P - слово наибольшей длины среди P_a /выбранное произвольно, если их несколько/. Так как Ω_w нетривиально, то такое P_a существует. В силу (3.29) решение $\bar{H}^{(w)}$ периодично относительно P. Пусть $\langle \mathcal{P},R\rangle = \mathcal{P}(\bar{H}^{(w)},P)$. Нам осталось доказать, что $\tilde{\Omega}_w$ сингулярно относительно $\langle \mathcal{P},R\rangle$.

В самом деле, если бы $\tilde{\Omega}_w$ было регулярным относительно $\langle \mathcal{P},R\rangle$, то в силу (3.29) нашёлся бы $h_k \in \mathcal{P}$ такой, что $\partial(H_k^{(w)}) \geqslant f_2(\Omega_w,\mathcal{P},R)$. В силу леммы 2.II, это противоречит минимальности решения $\bar{H}^{(w)}$ уравнения Ω_w.

Лемма 3.5 полностью доказана.

§3. <u>Построение дерева решений</u> $T_2(\Omega)$.

Пусть w - заключительная вершина дерева $T_0(\Omega)$ такая, что $tp(w)=2$ и Ω_w нетривиально. Пусть $\langle \mathcal{P}, R\rangle$ - некоторая периодическая структура, относительно которой $\tilde{\Omega}_w$ сингулярно и C - некоторый цикл в графе Γ, определённом в §4 гл.II. Пусть $h(c) \rightleftharpoons h_{i_1}\dots h_{i_k}$ - метка этого цикла.

Применим к системе уравнений $\bar{\varphi}(\bar{h},\bar{a})=1$ в свободной группе, состоящей из уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \left\{ h[\alpha(\mu),\beta(\mu)]^{\varepsilon(\mu)} h[\alpha(\Delta(\mu)),\beta(\Delta(\mu))]^{-\varepsilon(\Delta(\mu))} = 1 \mid \mu \in \mathcal{P} \right\}, \\ h_{i_1}\dots h_{i_k} = 1 \end{array}\right\} \quad (3.30)$$

алгоритм построения обобщённых уравнений, описанный в доказательстве леммы 1.5. Введём при этом, помимо (1.27), ещё одно ограничение на таблицу разбиения $T = \{V_{ij}(z_1,\dots,z_p)\}$:

г/ $z_1,\dots,z_p \in G_p(\{V_{ij}\})$ /в свободной группе/. $\quad (3.31)$

Пусть Ω_T /T - таблица разбиения, удовлетворяющая (3.31) / - обобщённое уравнение, построенное в соответствии с леммой 1.5; $\pi^T: G(\bar{\varphi}) \to G(\Omega_T^*)$ - соответствующий гомоморфизм. Очевидно, из (3.31) вытекает, что π^T сюрьективен.

Пусть обобщённое уравнение $\check{\Omega}_w$ получено из Ω_w удалением всех основ и неизвестных из $\mathcal{P}$. Построим обобщённое уравнение $\Omega_w(\mathcal{P},R,c,T)$, взяв в качестве списка его неизвестных и списка коэффициентных уравнений объединение соответствующих /выбранных дизъюнктными/ списков уравнений $\check{\Omega}_w$ и Ω_T. В список же основных уравнений занесём, кроме основных уравнений обобщённых уравнений $\check{\Omega}_w, \Omega_T$, дополнительные основные уравнения вида $h_k = \hat{\pi}^T(h_k)\ (h_k \notin \mathcal{P})$, где h_k в левой части рассматривается как неизвестная уравнения $\check{\Omega}_w$, а $\hat{\pi}^T(h_k)$ является некоторым участком уравнения Ω_T.

Очевидный гомоморфизм $\pi^{w,c,T}: G(\Omega^*_w) \to G(\Omega^*_w(P,R,c,T))$ является сюрьективным в силу сюрьективности π^T. Кроме того, из построения вытекает

$$\pi^{w,c,T}(h(c)) = 1. \qquad (3.32)$$

Для каждой тройки $(\langle P,R\rangle, c, T)$, где $\langle P,R\rangle$ – периодическая структура уравнения $\tilde{\Omega}_w$, относительно которой Ω_w сингулярно, c - один из циклов $c_1,\dots,c_r$ леммы 2.10 и T - таблица разбиения для системы (3.30), удовлетворяющая (3.31), добавим к дереву $T_0(\Omega)$ ребро $w \to w'$, положив $\Omega_{w'} = \Omega_w(P,R,c,T)$, $\pi(w,w') = \pi^{w,c,T}$. Обозначим через $T_1(\Omega)$ дерево, полученное после применения этой операции ко всем заключительным вершинам w дерева $T_0(\Omega)$ таким, что $tp(w)=2$ и Ω_w нетривиально.

Согласно лемме 2.10, $h(c) \neq 1$ в группе $G(\Omega^*_w)$. Поэтому из (3.32) вытекает, что если w' - концевая вершина дерева $T_1(\Omega)$, не являющаяся вершиной дерева $T_0(\Omega)$, то сюрьективный гомоморфизм $\pi(v_0, w)$ не является изоморфизмом.

Итерируем теперь процесс построения дерева $T_1(\Omega)$, приклеив дерево $T_1(\Omega_w)$ к тем концевым вершинам w дерева $T_1(\Omega)$, для которых Ω_w нетривиально; поступим аналогичным образом с концевыми вершинами полученного дерева и.т.д. Пусть $T_2(\Omega)$ - построенное дерево. $T_2(\Omega)$ не содержит бесконечных ветвей в силу леммы I.I, Следовательно, на основании леммы Кёнига, $T_2(\Omega)$ конечно. Построение дерева $T_2(\Omega)$ по уравнению Ω эффективно, так как свойство обобщённого уравнения "быть тривиальным" легко проверяется.

Теперь мы готовы к доказательству теоремы I. Пусть дана система уравнений в свободной группе $\varphi(\bar{x},\bar{a})=1$. Применим к ней, прежде всего, лемму I.5. Пусть $\Omega_1,\dots,\Omega_r$ - построенные уравнения. Каждой концевой вершине w одного из деревьев $T_2(\Omega_i)(1 \le i \le r)$, для которой Ω_w тривиально, и имеет совместно, поставим в соответствие каноническую фундаментальную последовательность $\Phi_{i,w}$ следующим образом.

Пусть $v_0, u_0, v_1, u_1, \ldots, v_r, u_r = w$ - вершины пути, ведущего из корня v_0 дерева $T_2(\Omega_i)$ в вершину w такие, что u_i - концевая вершина дерева $T_0(\Omega_{v_i})$ и либо $tp(u_i) = 1$ в дереве $T_0(\Omega_{v_i})$ и $u_i = v_{i+1}$ либо $\Omega_{v_{i+1}} = \Omega_{u_i}(\mathcal{P}, R, c, T)$ для некоторых $\langle \mathcal{P}, R \rangle, c, T$.

В качестве списка $\mathfrak{M}$ систем уравнений фундаментальной последовательности $\Phi_{i,w} = \langle \mathfrak{M}, Hom, Aut \rangle$ возьмём список $\bar{\varphi}, \Omega^*_{v_0}, \Omega^*_{u_0}, \Omega^*_{v_1}, \Omega^*_{u_1}, \ldots, \Omega^*_{v_r}, \Omega^*_w$. Система Ω^*_w, в силу тривиальности уравнения Ω_w, состоит из уравнений вида $h^{\pm 1} = a^{\pm 1}$ и, значит, эквивалентна тривиальной системе, неизвестными которой служат все фиктивные неизвестные уравнения Ω_w, в силу пункта д/ определения совместных уравнений.

В качестве гомоморфизмов из Hom возьмём гомоморфизм $G(\bar{\varphi}) \to G(\Omega^*_{v_0})$ из леммы I.5, а также гомоморфизмы $\pi(v_0, u_0), \pi(u_0, v_1), \ldots, \pi(v_r, w)$.

Каждой системе $G(\Omega^*_{v_i})$ поставим в соответствие группу автоморфизмов $P_i \subseteq Aut(G(\Omega_{v_i}))$, построенную в начале предыдущего параграфа. Каждой системе $\Omega^*_{u_i}$ $(0 \le i \le r-1)$ такой, что $\Omega_{v_{i+1}} = \Omega_{u_i}(\mathcal{P}, R, c, T)$, поставим в соответствие каноническую группу автоморфизмов из леммы 2.10, применённой к периодической структуре $\langle \mathcal{P}, R \rangle$.

Покажем, что построенное множество фундаментальных последовательностей $\{\Phi_{i,w}\}$ описывает все решения системы $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{a}) = 1$. В самом деле, пусть $\bar{X}$ - некоторое решение этой системы.

Выберем $i\ (1 \le i \le r)$ и пару $(\Omega_i, \bar{H}^{(i)})$ так, как в лемме I.5. Применив теперь лемму 3.5 к решению $\bar{H}^{(v_0)} \rightleftarrows \bar{H}^{(i)}$ обобщённого уравнения $\Omega_{v_0} \rightleftarrows \Omega_i$, построим пару $(\Omega_w, \bar{H}^{(w)})$. Если Ω_w тривиально, то возьмём $\Phi_{i,w}$ в качестве искомой последовательности.

В противном случае, в силу леммы 3.5, либо $tp(w)=1$ либо $\bar{H}^{(w)}$ периодично относительно некоторого периода P и Ω_w сингулярно относительно $\mathcal{P}(\bar{H}^{(w)}, P)$. Если $tp(w)=1$, то положим $u_0=w,\ v_1=w,\ \bar{H}^{(u_0)}=\bar{H}^{(v_1)}=\bar{H}^{(w)}$.

Пусть имеет место второй случай. Применим к решению $\bar{H}^{(w)}$ лемму 2.I0; получим некоторое решение $\bar{H}^{+}$ системы $\tilde{\Omega}^{*}_{w}$. Пусть c – цикл из пункта б/ заключения леммы 2.I0 такой, что $H^{+}(c)=1$. Вектор $\bar{H}^{+}$ является решением системы (3.30). Все уравнения системы (3.30) имеют вид $h(c')=1$, где $h(c')$ – метка некоторого цикла в графе, соответствующем периодической структуре $\mathcal{P}(\bar{H}^{(w)}, P)$. Поэтому, если $r_1 r_2 \dots r_l = 1$ – уравнение системы (3.30) и $R_1^{+}, R_2^{+}, \dots, R_l^{+}$ – соответствующие компоненты решения $\bar{H}^{+}$, то из пункта в/ леммы 2.I0 вытекает, что сокращение слова $R_1^{+} R_2^{+} \dots R_l^{+}$, равного единице в свободной группе, можно провести так, что сокращение всякого промежуточного произведения AB "полное", т.е. либо $A \doteq A' B^{-1}$ либо $B \doteq A^{-1} B'$. Пусть T – таблица разбиения, соответствующая этому процессу сокращения. Ясно, что для таблицы T выполнено свойство (3.3I).

Пусть теперь $u_0 = w$, $\Omega_{v_1} = \Omega_w(\mathcal{P}, R, c, T)$. В силу леммы I.5 существует решение $\bar{H}^{(T)}$ уравнения Ω_T такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G(\bar{\mathcal{P}}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_{\bar{H}^{+}}"'] & & G(\Omega^{*}_{T}) \arrow[dl, "\pi_{\bar{H}^{(T)}}"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. В силу пункта в/ леммы 2.10, если удалить из вектора $\bar{H}^{+}$ компоненты $\{H_k^+ \mid h_k \in \mathcal{P}\}$, получится решение $\check{\bar{H}}^{+}$ уравнения $\check{\Omega}_w$. Объединив вместе списки $\check{\bar{H}}^{+}$ и $\bar{H}^{(T)}$, получим решение $\bar{H}^{(v_1)}$ обобщённого уравнения $\Omega_{v_1} = \Omega_w(\mathcal{P}, R, c, T)$. Из построения вытекает, что

$$\pi_{\bar{H}^{(u_0)}} = \pi_{\bar{H}^{(v_1)}} \pi(u_0, v_1) \qquad (3.33)$$

Аналогично, отправляясь от пары $(\Omega_{v_1}, \bar{H}^{(v_1)})$, построим вершины $u_1, v_2, \ldots$ и решения $\bar{H}^{(u_1)}, \bar{H}^{(v_2)}, \ldots$. Так как дерево $T_2(\Omega)$ конечно, этот процесс рано или поздно закончится и мы придём в вершину w, для которой Ω_w тривиально.

Легко видеть, что последовательность Φ_{iw} описывает решение $\bar{X}$. Для этого достаточно заметить, что представление (1.6) гомоморфизма $\pi_{\bar{X}}$ может быть получено последовательным применением равенства (1.25), равенств пункта а/ леммы 3.5, равенств пункта а/ леммы 2.10 и равенств (3.33). Теорема I доказана.

В заключение докажем результат, сформулированный в замечании 2 к теореме I. Заменим для этого буквы $a_1, \ldots, a_\omega$ на новые переменные $p_1, \ldots, p_\omega$ и добавим ко всем системам уравнений, используемым при построении фундаментальных последовательностей Φ_{iw}, уравнения $p_1 = \ldots = p_\omega = 1$. Тогда число всевозможных сокращений между вхождениями неизвестных для любого процесса сокращения данной системы $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{a}) = 1$ не превышает величины $L(\bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{l_i(l_i - 1)}{2}$. Если T - таблица сокращения этого процесса, то группа $G(\Omega_T^*)$ может быть порождена $L(\bar{\varphi})$ элементами /напомним, что мы заменили все коэффициентные уравнения $h_i = a_j^{\pm 1}$ на уравнения $h_i = 1$ /. Аналогичный вывод справедлив для всех групп в последовательностях Φ_{iw}, так как все гомоморфизмы в них, кроме, быть может, первого, сюрьективны.

Пусть в фундаментальной последовательности Φ_{iw} используется каноническая группа автоморфизмов, соответствующая разбиению вида (1.7). Добавив к списку $\bar{\Theta} \cup \bar{\Psi}$ уравнения $\bar{z}=1$, мы получим: тривиальную систему для типа I, единственное уравнение $q(\bar{y})=1$ для типа 2 и список уравнений $\bar{u}=1,\ q(\bar{v})=1$ для типа 3. Однако такая система уравнений имеет очевидное решение ранга $\left[\frac{|y|}{2}\right]$. Значит, соответствующая группа $G(\bar{\Theta} \cup \bar{\Psi} \cup \bar{z}=1)$ не может быть порождена менее, чем $\left[\frac{|y|}{2}\right]$ элементами. Следовательно, $|\bar{y}| \leq 2L(\bar{\Psi})+1$,ч.т.д.

Мне хотелось бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю С.И.Адяну за постоянное внимание к работе.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ЛИТЕРАТУРА

I. Адян С.И. "Проблема Бернсайда и тождества в группах".- М.: Наука, 1975.

2. Булитко В.К., Учёные записки мат. кафедр, 1970, вып.2, с.242-253.

3. Губа В.С., Матем.зам., 1986, т.40, №3, с.321-324.

4. Кейслер Г.,Чэн Ч.Ч. "Теория моделей".- М.: Мир, 1977.

5. "Коуровская тетрадь".- Н., изд. 9, 1984.

6. Курош А.Г. "Теория групп". - М.: Наука, 1967.

7. Линдон Р., Шупп П. "Комбинаторная теория групп".- М.: Мир, 1980.

8. "Логическая тетрадь". - Н., 1986.

9. Лоренц А.А., ДАН СССР, 1968, т.178, с.290-292.

10. Маканин Г.С., Матем.сб., 1977, т.103/145/, №2/6/, с.147-236.

11. Маканин Г.С., Изв. АН СССР, сер.матем., 1979, т.43, №3, с.547-602.

12. Маканин Г.С., Изв. АН СССР, сер. матем., 1982, т.46, №6, с.1199-1273.

13. Маканин Г.С., Изв. АН СССР, сер.матем., 1984, т.48, №4, с.735-749.

14. Маканин Г.С., Тезисы докладов 4 всесоюзной конференции "Применение методов математической логики".- Т., 1986, с.144-146.

15. Мальцев А.И., Алгебра и логика, 1962, т.1, с.45-50.

16. Мерзляков Ю.И., Алгебра и логика, 1966, т.5, с.25-42.

17. Ожигов Ю.И., "Уравнения с двумя неизвестными в свободной группе". - канд. дисс.

18. Разборов А.А., Изв. АН СССР, сер.матем., 1984, т.48, №4, с.779-832.

19. Разборов А.А., Тезисы 9 всесоюзного симпозиума по теории групп.- М., 1984, с.54.

20. Хмелевский Ю.И. I- Изв. АН СССР, сер.матем.,1971, т.35, №6, с.1237-1268; II - Изв. АН СССР, сер. матем., 1972, т.36, №1, с.110-179.

21. Appel K.I., Proc. Amer. Math. Soc., 1968, v. 19, p. 912-918.

22. Lyndon R.C., Michigan Math. J., 1959, v. 6, p. 155-164

23. Lyndon R.C., Trans. Amer. Math. Soc., 1960, v. 96, p. 445-457.

24. Lyndon R.C., Trans. Amer. Math. Soc., 1960, v. 96, p. 518–533.

25. Lyndon R.C., Schützenberger M.P., Michigan Math. J., 1962, v. 9, p. 289–298.

26. Nielsen J., Acta Math., 1927, v. 50, p. 189–358.

27. Quine W., J. Symbol. Log., 1946, v. 11, p. 105–114.

28. Saserdote G.S., Trans. Amer. Math. Soc., 1972, v. 178, p. 127–138.

29. Schupp P.E. – in: Word Problems II. Oxford, 1980, p. 347–372.