О топологии числа 64

Е. В. Щепин, М. В. Шевелев, Н. Е. Щепин *

Введение

Основной результат. Число 64 является одновременно квадратом $64 = 8^2$ и кубом $64 = 4^3$. Поэтому 64 элемента (пикселя) можно расположить в виде квадрата, а можно в виде куба. В данной работе исследуется вопрос: *можно ли 64-пиксельный квадрат комбинаторно-непрерывно отобразить на 64-пиксельный куб?* 64-пиксельный квадрат можно представлять себе в виде шахматной доски, клетки которой и играют роль пикселей. А 64-пиксельный куб, можно представлять себе в виде кубика Рубика типа $4 \times 4 \times 4$, составленного из 64 монолитных кубиков. Отображение цифрового квадрата на цифровой куб называется комбинаторно-непрерывным, если оно переводит соседние клетки в соседние кубики.

На цифровом квадрате рассматриваются два отношения соседства: 4-соседство и 8-соседство. А именно, 4-*соседними* называются пикселы, соответствующие клеткам шахматной доски имеющим общую границу, то есть лежащими в одном ряду или в одном столбце. Такое отношение соседства рассматривается в игре *го.* Соответственно 8-*соседними* называются пикселы соответствующие клеткам с пересекающимися границами. Другими словами 8-соседними для данной клетки являются все клетки, куда с нее можно пойти шахматным королем.

На цифровом кубе рассматриваются следующие три отношения соседства. 6-*соседними* называются пикселы, которым соответствуют кубики с общей гранью. 18-*соседними* называются пикселы, которым соответствуют кубики с общим ребром (или гранью). 26-*соседними* называются пикселы, которым соответствуют кубики с общей вершиной (или гранью, или ребром).

Отображение, переводящее m-соседей в n-соседей, называется *n:m-непрерывным.* Следующая теорема дает сводку результатов о существовании комбинаторно-непрерывных отображений цифрового квадрата на цифровой куб для вышеперечисленных типов соседства.

Теорема 1. *64-пиксельный квадрата можно $m : n$-непрерывно отобразить на 64-пиксельный куб в том и только том случае, когда $m > 3n$.*

Наиболее замечательным результатом работы нам представляется построение $26 : 8$-непрерывного отображения квадрата на куб. Этот результат был получен в результате 8-часового счета компьютера по специально написанной для этой цели Н. Щепиным компьютерной программе [1].

*Работа написана в рамках программы "Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики"Отделения Математики Российской академии наук.

Проблема Арнольда. Исследования комбинаторно-непрерывных отображений, содержащиеся в данной статье, были мотивированы проблемой В. И. Арнольда [2] о существовании отображения квадрата на куб с показателем Гельдера 2/3. А именно, попытка построения гельдеровского отображения квадрата на куб методом дихотомии, предложенная Е. В. Щепиным (см. параграф 6), опровергается теоремой 4 настоящей статьи. А теорема 5 о несуществовании 26:12-непрерывного отображения 64-пиксельного цифрового треугольника на 64-пиксельный куб показывает невозможность построения отображения треугольника на куб методом деления на четыре части. В то же время приведенные в параграфе 2 примеры комбинаторно-непрерывных отображений 64-пиксельного квадрата на 64-пиксельный куб являются косвенными свидетельствами в пользу возможного положительного решения проблемы Арнольда.

Теорема Колмогорова. *Графом соседства* цифрового объекта (куба, квадрата, треугольника) называется граф, вершины которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с пикселами объекта, а ребрам, которого соответствуют пары соседних симплексов. Таким образом для отношения n-соседства, в рассмотренных выше примерах, большинство вершин графа соседства имеют индекс ветвления (то есть число ребер инциндентных данной вершине) равным n, а остальные имеют меньший индекс.

Существование комбинаторно-непрерывного отображения одного цифрового объекта на другой, имеющий равное количество пикселей, как легко видеть, равносильно существованию вложения графа соседства отображаемого объекта в граф соседства другого. Поэтому построенные с помощью теоремы 1 вложения графов представляют собой весьма специфические *реализации* в смысле А. Н. Колмогорова [3] квадратной и треугольной сетей в трехмерном пространстве. Реализации сетей в трехмерном пространстве посвящена одна из последних теорем Колмогорова, доказанная им в начале шестидесятых годов. Реализация сети представляется как размещенная в пространстве проволочная сеть (проволока имеет фиксированную положительную толщину) с заданной топологией. Колмогоров предложил конструкцию, позволяющую реализовать любую n-вершинную сеть в сфере радиуса $O(\sqrt{n})$, а Бардзинь показал ее оптимальность в том смысле, что для почти всех сетей объем любой их реализации не может быть меньшим чем $Cn\sqrt{n}$, для некоторой константы. В конструкции Колмогорова все узлы сети располагаются на плоскости, а типичное ребро имеет длину порядка $\sqrt{n}$. В предложенной выше конструкции вершины сети равномерно распределены по пространству и длины ребер ограничены. Конструкция Колмогорова оправдывает расположение нейронов на поверхности мозга. Возможно, что найденная в работе конструкция встречается в природе. Может быть в биологии, а может быть в физике. Повышающие размерность отображения кубов имеют также применение в теории передачи информации [4].

1 Обозначения и терминология.

Цифровой квадрат. Цифровым квадратом мы будем называть множество упорядоченных пар натуральных чисел из диапазона $1-8$, называемых *клетками*. *Угловыми* называются клетки $(1,1),(1,8),(8,1),(8,8)$. *Крайни-*

ми называются клетки, одна из координат которых равна 1 или 8. Клетки не являющиеся крайними называются *внутренними*. Клетки (a, b) и (c, d) называются 4-*соседними*, если $|a-c|+|b-d| = 1$ и называются 8-*соседними*, если $\max\{|a-c|, |b-d|\} = 1$. Любая внутренняя клетка имеет ровно 8 соседей типа 8 и ровно 4 соседа типа 4, что и объясняет выбор названия для типа соседства. Изоморфизм цифрового квадрата и шахматной доски устанавливается выбором координат клеток.

Цифровой куб. Цифровым кубом мы будем называть множество упорядоченных троек натуральных чисел диапазона $1-4$, называемых *кубиками*. Кубики делятся на четыре категории: угловые, реберные, граневые и центральные. *Угловые* кубики имеют в качестве координат только единицы и четверки. Угловых кубиков 8. *Реберные* кубики имеют две координаты единицы и четверки и одну координату двойку или тройку. Реберных кубиков — 24. *Граневые* кубики имеют одну координату единица или четверка и две координаты двойка или тройка. Граневых кубиков — 24. И, наконец, *центральные* кубики имеют координаты только двойки и тройки и их имеется 8 штук.

Кубики (a, b, c), (a', b', c'), называются 6-*соседними*, если $|a-a'|+|b-b'|+|c-c'| = 1$. То есть 6-соседними являются кубики, отличающиеся (не более чем на единицу) лишь одной координатой. Например, 6-соседними являются кубики с координатами 111 и 112, а имеющие координаты 121 и 211 не являются 6-соседями. Все центральные кубики имеют ровно 6 соседей типа 6.

Кубики (a, b, c), (a', b', c'), называются 18-*соседними*, если $1 \le |a-a'|+|b-b'|+|c-c'| \le 2$ и $\max\{|a-a'|, |b-b'|, |c-c'|\} = 1$. То есть кубики являются 18-соседними, если хотя бы одна координата у них совпадает, а две другие отличаются не более чем на единицу. Например, 18-соседями будут 121 и 211 и не будут 121 и 212. Все центральные кубики имеют по 18 соседей типа 18.

Кубики (a, b, c), (a', b', c'), называются 26-*соседними*, если $\max\{|a-a'|, |b-b'|, |c-c'|\} = 1$. Таким образом 26-соседями являются кубики, у которых все координаты отличаются не более чем на единицу. Например, 26-соседними являются номера: 112 и 221, 331 и 231, 414 и 324. А пары: 111 и 311, 234 и 113 не являются 26-соседними. Все центральные кубики имеют по 26 соседей типа 26.

2 Примеры комбинаторно-непрерывных отображений.

Отображение f цифрового квадрата в цифровой куб можно представлять с помощью квадратной таблицы, у которой в клетке, i-го ряда и j-ой строки стоит кубик $f(i, j)$. Такого рода таблицы мы будем именовать *раскладками*.

111	121	211	311	411	421	431	441
112	122	212	312	412	422	432	442
113	123	213	313	322	321	331	341
114	124	223	323	222	221	231	241
214	224	234	233	332	232	131	141
314	324	334	333	342	242	132	142
413	423	433	443	343	243	133	143
414	424	434	444	344	244	134	144

Приведенной выше раскладке мы присвоим код 333-46, который означает, что кубик 333 занимает в таблице четвертый столбец и шестую строку. Раскладка 333-46, как нетрудно проверить, является одновременно 26:8 и 18:4 непрерывной. Кроме того она обладает следующим свойством *симметрии* четвертого порядка: *если в i-ой строке и j-ом столбце находится кубик xyz, то в i-ом столбце и $(9-j)$-ой строке находится кубик* $(5-x)(5-z)y$.

И, наконец, эта раскладка удовлетворяет следующему *граничному* условию: в крайних столбцах и строках таблицы (то есть в множестве $D' = \{(i,j) \in D \mid i(8-i)j(8-j) = 0\}$) находятся элементы множества $C' = \{(x,y,z) \mid x(4-x)+y(4-y)+z(4-z) \leq 4\}$, соответствующие реберным и угловым кубикам. Вычисления, проведенные программой [1] показали, что существует ровно четыре 26:8-непрерывных симметричных пограничных раскладок, (то есть удовлетворяющих описанным выше условиям симметрии и граничному), для которых в левом верхнем углу стоит 111. Эти четыре раскладки различаются позицией кубика 333 и кодируются в соответствие с его позицией как 333-46, 333-57, 333-64 и 333-75. И все эти раскладки, к тому же оказались 18:4-непрерывными.

Совокупность четырех транспозиций: $312 \leftrightarrow 322$, $231 \leftrightarrow 232$, $343 \leftrightarrow 333$, $224 \leftrightarrow 223$ производит из раскладки 333-46 следующую симметричную непрерывную раскладку этой серии — раскладку, с кодом 333-57.

Существенно отличается от этих раскладок следующая с кодом 333-64:

111	121	131	141	241	341	431	441
112	122	132	142	242	342	432	442
211	221	231	232	243	343	433	443
311	321	331	332	233	333	434	444
411	421	322	222	323	324	334	344
412	422	312	212	223	224	234	244
413	423	313	213	113	123	133	143
414	424	314	214	114	124	134	144

И наконец, раскладка 333-75 получается из раскладки 333-64 посредством четверки транспозиций: $321 \leftrightarrow 322$, $242 \leftrightarrow 232$, $334 \leftrightarrow 333$, $213 \leftrightarrow 223$.

Приведенные примеры доказывают существование $m : n$-непрерывных раскладок при $m > 3n$.

3 6:4-непрерывные отображения.

В этом параграфе доказывается несуществование 6:4-непрерывных отображений цифрового квадрата на цифровой куб. Этот результат выводится из более общего результата о строении 6:4-непрерывных отображений цифровых прямоугольников на цифровые параллелепипеды. Через $[1, m]$ мы обозначаем *цифровой отрезок* — подмножество натурального ряда состоящее из чисел $1, 2, \ldots, m$. Цифровым прямоугольником и цифровым параллелепипедом мы называем произведения двух и трех цифровых отрезков соответственно.

Теорема 2. *Пусть P является цифровым прямоугольником $[1, m] \times [1, n]$, а Q является цифровым параллелепипедом $[1, p] \times [1, q] \times [1, r]$ и пусть $p \times q \times r = m \times n$. Тогда $6 : 4$-непрерывная биекция $f \colon P \to Q$ существует в том и только том случае, когда $\{m, n\} \cap \{p, q, r\} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Предположим $p = m$. Тогда $n = q \times r$ и 6:4-непрерывное отображение f может быть задано формулой, в которой квадратные скобки использованы для обозначения целой части числа:

$$f(i, j) = (i, [j/q] + 1, (j \mod q) + 1), \tag{1}$$

В противоположном направлении теорема следует из Леммы 5, доказательству которой посвящен остаток параграфа. Из доказательства леммы 5 также следует, что любое 6:4-непрерывное отображение имеет вид (1). □

Тройки целочисленных функций. Любое отображение цифрового прямоугольника $[1, m] \times [1, n]$ в цифровой параллелепипед $[1, p] \times [1, q] \times [1, r]$ распадается в тройку целочисленных функций — координат образов.

Тройка целочисленных функций $x(i, j), y(i, j), z(i, j)$ двух целочисленных переменных определенная на цифровом прямоугольнике $[1, n] \times [1, m]$

является $6:4$-*непрерывной* если неравенство $|i-i'|+|j-j'|\leq 1$ для любых i,i',j,j' влечет неравенство

$$|x(i,j)-x(i',j')|+|y(i,j)-y(i',j')|+|z(i,j)-z(i',j')|\leq 1 \tag{2}$$

Тройка целочисленных функций $x(i,j),y(i,j),z(i,j)$ называется *инъективной* если левая сторона неравенства (2) равна нулю в том и только том случае, когда $i=i'$ и $j=j'$.

Лемма 1. *Пусть $x(i,j),y(i,j),z(i,j)$ инъективная $6:4$-непрерывная тройка целочисленных функций, тогда следующие три условия равносильны для пары k,l:*

1. $x(k,l+1)=x(l,k+1)$
2. $x(k,l)=x(k+1,l+1)$
3. $x(k,l)=x(k+1,l)=x(k,l+1)=x(k+1,l+1)$

Доказательство. Докажем что (1) влечет (2). Предположим, что $x(k,l)\neq x(k+1,l)=x(k,l+1)$. В силу 6:4-непрерывности это влечет $y(k+1,l)=y(k,l)=y(k,l+1)$ и $z(k+1,l)=z(k,l)=z(k,l+1)$. Значит $a(k,l+1)=a(k+1,l)$ для $a=x,y,z$. И мы получаем противоречие с инъективностью тройки. Такие же аргументы доказывают, что $x(k+1,l+1)=x(k+1,l)=x(k,l+1)$. Доказательство импликации (1) $\Rightarrow$(2) аналогично. Импликация (2) $\Rightarrow$(1) тривиальна. $\square$

Числа цифрового интервала называем 2-соседними, если модуль их разности не превосходит единицы. Отображение цифрового квадрата в цифровой интервал называется 2:4-непрерывным, если оно переводит 4-соседние пары в 2-соседние. Заметим, что все функции тройки осуществляющей 6:4-непрерывное отображение цифрового прямоугольника на цифровой параллелепипед являются 2:4-непрерывными.

Лемма 2. *Если $x(i,j)$ является $2:4$-непрерывной целочисленной функцией, такой что $x(k+1,l+1)\neq x(k,l)\neq x(k+1,l)\neq x(k+1,l+1)$, то $2x(k+1,l)=x(k,l)+x(k+1,l+1)$ и $|x(k,l)-x(k+1,l+1)|=2$.*

Доказательство. Имеется ровно два решения уравнения $|x-x(k+1,l)|=1$. Следовательно $x(k+1,l+1)=x(k+1,l)\pm 1$ и $x(k,l)=x(k+1,l)\mp 1$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $x(i,j),y(i,j),z(i,j)$ инъективная $6:4$-непрерывная тройка целочисленных функций. Для любой пары k,l натуральных чисел по крайней мере одно из следующих условий выполнено:*

1. $x(k,l)=x(k+1,l)$ *и* $x(k,l+1)=x(k+1,l+1)$
2. $x(k,l)=x(k,l+1)$ *и* $x(k+1,l)=x(k+1,l+1)$

Доказательство. Предположим, что $x(k,l)\neq x(k+1,l)$ и $x(k+1,l)\neq x(k+1,l+1)$. Тогда в силу леммы 1 получаем $x(k,l)\neq x(k+1,l+1)$, а благодаря лемме 2 получаем $x(k+1,l)=\frac{1}{2}(x(k,l)+x(k+1,l+1))$. Неравенства $|x(k,l+1)-x(k,l)|\leq 1\geq |x(k,l+1)-x(k+1,l+1)|$ и равенство $|x(k,l)-x(k+1,l+1)|=2$ (Лемма 2) влекут $x(k,l+1)=\frac{1}{2}(x(k,l)+x(k+1,l+1))$. Следовательно $x(k+1,l)=x(l+1,k)$ и мы приходим к противоречию с леммой 1.

Теперь рассмотрим случай $x(k,l) = x(k+1,l)$. Если $x(k,l+1) \neq x(k+1,l+1)$, то в силу леммы 1 $x(k+1,l+1) \neq x(k,l) \neq x(k,l+1)$, и лемма 2 дает $|x(k+1,l+1) - x(k+1,l)| = |x(k+1,l+1) - x(k,l)| = 2$. Это противоречит 2:4-непрерывности x.

Аналогичные рассуждения доказывают, что $x(k,l+1) = x(k+1,l+1)$ влечет $x(k,l) = x(k+1,l)$. Итак, если одно из равенств (1) выполнено, то и другое тоже.

Так же обстоит дело с равенствами (2). $\square$

Лемма 4. *Пусть $x(i,j)$, $y(i,j)$, $z(i,j)$ является $6:4$-непрерывной инъективной тройкой функций. Тогда при любых k,l справедливо равенство*

$$x(k,l) + x(k+1,l+1) = x(k+1,l) + x(k,l+1) \tag{3}$$

Доказательство. Это является непосредственным следствием леммы 3, потому что равенство(3) вытекает из (1) точно также как и из (2). $\square$

Лемма 5. *Если тройка $x(i,j), y(i,j), z(i,j)$ биективно и $6:4$-непрерывно отображает цифровой прямоугольник $[1,m] \times [1,n]$ на цифровой параллелепипед $[1,a] \times [1,b] \times [1,c]$, то $\{m,n\} \cap \{a,b,c\} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Тройки $x(1,1), y(1,1), z(1,1)$ и $x(1,2), y(1,2), z(1,2)$ совпадают за исключением одной координаты. Не теряя общности, можем предположить, что $x(1,1) \neq x(1,2)$ тогда как $y(1,1) = y(1,2)$ и $z(1,1) = z(1,2)$.

В силу леммы 3 равенство $y(1,1) = y(1,2)$ влечет $y(2,1) = y(2,2)$, последнее равенство в свою очередь влечет $y(3,1) = y(3,2)$ и так далее. Отсюда следует, что $y(i,1) = y(i,2)$ для $i = 1,2,\dots m$. Аналогичные рассуждения дают $z(i,1) = z(i,2)$ для $i = 1,2,\dots m$. Значит инъективность тройки влечет $x(i,1) \neq x(i,2)$ для $i = 1,2,\dots m$.

В силу леммы 3 равенство $x(i,1) \neq x(i,2)$ влечет равенство $x(i,1) = x(i+1,1)$ для $i = 1,\dots m-1$. Равенства $x(i,1) = x(i+1,1)$ в свою очередь дают $x(i,2) = x(i+1,2)$ (благодаря той же лемме 3), равенства $x(i,2) = x(i+1,2)$ производят равенства $x(i,3) = x(i+1,3)$ и так далее.

Следовательно равенство

$$x(i,j) = x(i+1,j) \tag{4}$$

доказано для всех i,j. Такие же рассуждения позволяют вывести (4) для всех i,j из неравенства $x(i,j) \neq x(i,j+1)$ для какого-нибудь i,j. Аналогичные аргументы применимы для y и z. Итак мы доказали, что любая функция тройки $x(i,j), y(i,j), z(i,j)$ зависит только от одной переменной. Не теряя общности можем предположить, что $x(i,j)$ зависит от i, в то время как $y(i,j)$ и $z(i,j)$ не зависят от i. В этом случае отображение $i \to x(i,j)$ осуществляет $2:2$-непрерывную биекцию $[1,m] \to [1,a]$. Значит, $m = a$. $\square$

4 Выделенные ходы и позиции.

Количество всех раскладок измеряется астрономическим числом 64!. Простой перебор такого количества случаев недоступен даже современным суперкомпьютерам. Описываемая ниже теория позволяет существенно сократить количество просчитываемых позиций, не потеряв ни одной непрерывной раскладки. На этой теории и основаны компьютерные вычисления, подсчитывающие точное число непрерывных раскладок, какого-то типа.

Частичные раскладки, соответствующие отображениям определенным на подмножествах цифрового квадрата мы будем называть *позициями.* Будем называть *свободными* клетки доски незанятые кубиками, то есть не входящие в область определения частичного отображения, представляющего данную позицию. Позиции без свободных полей называются *полными.* *Ходом* называется помещение свободного (то есть не поставленного ранее) кубика на свободную клетку позиции. Построение полной раскладки ведется, начиная с пустой позиции ход за ходом.

Функцией выделения называется способ сопоставления любой позиции свободной клетки. Например, можно в качестве выделенного поля рассматривать первое свободное поле относительно лексикографического порядка: поле с координатами x, y (x — номер столбца, y — номер строки) получает номер $(y-1)+8(x-1)$.

Последовательность ходов называется *выделенной цепочкой ходов*, исходящей из позиции A, если первый ход последовательности выполняется на выделенное поле для A и каждый следующий ход делается на выделенное поле позиции, возникшей после выполнения предыдущих ходов.

Лемма 6. *Если позиция A достраивается до полной позиции B, то она достраивается до B с помощью выделенной цепочки ходов.*

Доказательство. Выделенная цепочка ходов, достраивающая A до B, определяется следующим образом: на выделенное поле позиции A делается ход тем кубиком, который стоит на этом поле в позиции B. Так получается позиция A', в которой на одно поле больше заполнено, чем в A. Теперь на выделенное поле позиции A' делается ход тем кубиком, который стоит на этом поле в B. Получается позиция A'' и так далее. Ясно, что в конце концов мы получим в результате позицию B. □

Позиция называется *выделенной*, если она получается из начальной (т.е. пустой) позиции выделенной цепочкой ходов. Из леммы 6 вытекает, что все полные непрерывные позиции являются выделенными.

Позиция A называется *выделенным продолжением* позиции B, если позиция A получается из позиции B посредством выполнения выделенной цепочки ходов. Таким образом лемма 6 утверждает, что всякая полная позиция является выделенным продолжением любой своей части.

Лемма 7. *Если A является выделенным продолжением B, то существует единственная выделенная цепочка ходов, которая дает A из B.*

Доказательство. Предположим, что имеются две различные выделенные цепочки ходов C и C', исходящие из позиции B. Докажем, что в этом случае, позиции, возникающие из B после выполнения этих цепочек ходов, различны. Доказательство ведем индукцией по длине цепочки. Если длина 1, то две цепочки представляют ход различными кубиками на одно и то же поле — выделенное поле позиции B, поэтому возникающие позиции различны. Пусть утверждение доказано для цепочек длины k. И пусть C и C' являются различными цепочками длины k+1. Если первые ходы этих цепочек различны, то поскольку они делаются на одно и то же поле, то они делаются различными кубиками и поэтому приводят к позициям, различающимся по клетке первого хода. Если же первые ходы цепочек совпадают и дают позицию B', для которой выделенными будут усеченные, без первого хода, цепочки C и C'. Эти усеченные цепочки различны и имеют длину k. Поэтому к ним применимо предположение индукции. Что и доказывает различие позиций, возникающих из B' после совершения усеченных цепочек ходов. Но эти же позиции возникают в результате выполнения цепочек C и C' в позиции B. $\square$

Алгоритм, реализованный в [1], перебирает все выделенные цепочки ходов заданной длины. А леммы 6 и 7 позволяют на основе вычислений, проведенных с выделенными цепочками, делать выводы о количестве непрерывных полных раскладок, которые можно получить из данной позиции.

Окончательные результаты о количестве того или иного рода полных непрерывных раскладок не зависят от функции выделения. Поэтому выбирать функцию выделения следует таким образом, чтобы по возможности сократить количество выделенных цепочек. Множество выделенных цепочек, продолжающих данную позицию, можно представить в виде ориентированного дерева, узлами которого являются свободные клетки доски, и на ребрах которого указаны кубики, ход которыми был сделан на клетку, из которой исходит данное ребро. Для сокращения количества выделенных цепочек естественно поэтому выбирать выделенное поле из полей с наименьшей *энтропией*: то есть таких на которые возможно сделать наименьшее количество ходов (не нарушая непрерывности позиции).

Так достаточно хорошо себя зарекомендовала функция выделения, которая выбирает среди полей с наименьшей энтропией лексикографически первое. Еще более эффективена в смысле сокращения количества выделенных цепочек функция выделения, которая из полей с наименьшей энтропией выбирает клетку с наименьшим произведением *связностей* кубиков, которые можно на него поставить. Связность кубика определяется как количество свободных кубиков (включая его самого), являющихся его соседями в кубе. Но функция выделения, использующая связности, дольше считается по сравнению с использующей лексикографический порядок, что снижает эффект от сокращения перебора.

5 18:8-непрерывные отображения

Для доказательства теоремы 1 нам осталось убедится в несуществовании 18:8-непрерывных биекций 64-пиксельного квадрата на 64-пиксельный куб. Этому доказательству и посвящен данный параграф. Представленное доказательство не является классическим математическим доказательством, оно — *виртуально*, поскольку апеллирует к компьютерным вычислениям, которые читатель может воспроизвести с помощью программы [1] или проверять с помощью своей собственной программы. Представленный текст отражает динамику развития теории, приведшей к этому доказательству. В этом доказательстве, можно сокращать реальную "человеческую"часть, за счет увеличения виртуальной "компьютерной"и наоборот. Более совершенная программа или более мощный компьютер могут позволить полностью исключить "человеческую"составляющую.

В этом параграфе мы будем пользоваться "шахматным"представлением цифрового квадрата, представляя отображения цифрового квадрата на цифровой куб в виде раскладок кубиков по клеткам шахматной доски. Раскладка f будет называться $m : n$*-непрерывной в клетке* x, если для любой n-соседней с x, клетки y, кубики $f(x)$ и $f(y)$ являются m-соседями.

Мы будем мерять расстояния между клетками доски в количестве ходов (минимальном), которые необходимо сделать шахматному королю для попадания из одной клетки доски в другую.

Клетки, не принадлежащие краю доски, называются *внутренними*.

Тип соседства 18 в координатах выражается следующим образом: кубики с координатами xyz и $x'y'z'$ являются 18-соседями если и только если одна пара координат у них совпадает, а другие отличаются не более чем на единицу. При типе соседства 18 угловые кубики имеют 6 соседей, реберные — 9, граневые — 13 и центральные — 18 соседей.

Лемма 8. *Если раскладка f является* $18 : 8$*-непрерывной во внутренней клетке C, то $f(C)$ не является угловым кубиком.*

Доказательство. У углового кубика имеется всего 6 соседей типа 18. Такого количества соседей не хватит, чтобы заполнить все поля соседние с клеткой x, расположенной внутри доски, потому что полей таких 8. $\square$

Лемма 9. *Если раскладка f является* $18 : 8$*-непрерывной на клетках C и D, таких что $f(C)$ является реберным кубиком, а $f(D)$ соседним с ним угловым, то C находится на расстоянии не более единицы от края доски.*

Доказательство. Обозначим через O множество 8-соседних с C клеток, включая ее саму. В доказательстве нуждается только случай внутренней клетки C, тогда количество клеток в O равно 9. Так как D стоит на краю доски в силу леммы 8, то множество OD клеток края доски соседних с OD, включая саму D состоит из трех клеток. Если же мы предположим, что D отстоит от края доски более чем на ход, то пересечение $OD \cap OC$ пусто. Следовательно, число клеток в объединении $OC \cup OD$ равно двенадцати и все они должны быть заполнены кубиками $f(C)$, $f(D)$ и их соседями. Но соседей у $f(C)$ и $f(D)$, включая их самих только 11. Противоречие. $\square$

Лемма 10. *Если пара граневых кубиков лежит в одной грани куба, то, никакой граневый кубик из другой грани куба не является их общим* 18*-соседом.*

Доказательство. Действительно, пару граневых кубиков K_1, K_2, не нарушая общности, можно представлять имеющими координаты $1xy$ и $1x'y'$, а граничащий с ними обоими кубик K_3 из другой грани, имеющим координаты $ab1$. Поскольку a не может быть единицей, постольку оно должно быть двойкой, чтобы оставить возможность соседства для этих кубиков. По аналогичным соображениям $y = y' = 2$. Таким образом первые и третьи координаты у K_1 и K_3 различны, поэтому они могут быть 18-соседями лишь при условии совпадения вторых координат. По тем же соображениям вторые координаты должны совпасть у K_2 и K_3. Но в таком случае у K_1 и K_2 должны совпасть все координаты. $\square$

Лемма 11. *Если четыре граневых кубика являются попарными* 18*-соседями, то все они лежат в одной и той же грани куба и не существует никакого другого граневого кубика, который был бы* 18*-соседним одновременно для двух кубиков из этой четверки*

Доказательство. Действительно, если четыре кубика все принадлежат разным граням, то среди этих граней найдется пара противоположных и принадлежащие этой паре граней кубики не будут даже 26-соседями. Следовательно, среди четырех попарно соседних кубиков найдется пара принадлежащих одной грани. Тогда в силу леммы 10 все четыре принадлежат одной грани. Поскольку в одной грани лежит ровно 4 граневых кубика, постольку никакой другой граневый кубик не принадлежит этой грани и потому не может быть соседом ни для какой пары кубиков из этой четверки в силу той же леммы 10. □

Лемма 12. *Если раскладка является* $18:8$*-непрерывной во всех клетках, находящихся на расстоянии более хода от края доски, то имеются по крайней мере* 4 *центральных кубика, которые находятся на расстоянии более хода от края доски.*

Доказательство. Рассмотрим четверку клеток, составляющих квадрат с углами $(3,3)$, $(4,4)$. Согласно леммам 8 и 9 в этом квадрате нет угловых и реберных кубиков. Предположим, что все кубики в нем граневые. Тогда кубики, поставленные на поля $(3,5)$, $(4,5)$, $(5,3)$, $(5,4)$ не могут быть угловыми и реберными в силу лемм 8 и 9 и не могут быть граневыми в силу леммы 11. Поэтому все они — центральные. Таким образом в этом случае лемма доказана. Если же мы предположим, что не все кубики в этом квадрате граневые, то в нем найдется по крайней мере один центральный. Аналогичные рассуждения примененные к квадратам $(5,5)-(6,6)$, $(3,5)-(4,6)$ и $(5,3)-(6,4)$ показывают, что либо в любом из них стоит центральный кубик, и тогда общее количество центральных кубиков в квадрате $(3,3)-(6,6)$ достигает четырех, либо один из этих квадратов целиком заставлен граневыми кубиками и потому на его границах находится четверка центральных кубиков, подобно тому как это было доказано для квадрата $(3,3)-(4,4)$. □

Скажем, что две клетки доски, с координатами (a,b), (a',b') являются 2×4-*близкими*, если $\min\{|a-a'|,|b-b'|\}\leq 2$ и $\max\{|a-a'|,|b-b'|\}\leq 4$.

Лемма 13. *Пусть* $\{C_i\}$, $i=0,1,2,\dots,7$ *последовательность клеток края доски, занумерованных в порядке обхода края доски по часовой стрелке. Если она не содержит угловых клеток и попарные расстояния между* $C_i, C_{(i+1) \bmod 8}$ *для* $i\leq 7$ *больше двух (ходов короля), то все эти попарные расстояния равны трем, все пары* $C_i, C_{(i+1) \bmod 8}$ *являются* 2×4*-близкими и любая тройка* $C_i, C_{(i+1) \bmod 8}, C_{(i+2) \bmod 8}$ *подряд идущих клеток этой последовательности изометрична тройке* $(1,2)$*,* $(1,5)$*,* $(4,1)$

Доказательство. Так как три клетки C_i не могут поместиться на одной стороне доски, то на каждой стороне доски имеются ровно две клетки этого типа. Не теряя общности будем считать, что C_0 и C_1 лежат на одной стороне доски. Тогда C_2, C_3 лежат на второй стороне, C_4, C_5 — на третьей, а C_6, C_7 — на четвертой стороне доске.

Клетку, по диагонали соседнюю с угловой клеткой доски назовем *надугловой*. Клетку назовем *контролируемой* стороной доски, если она является соседней для одной из клеток C_i принадлежащих этой стороне. Заметим, что из условия на расстояние между различными C_i вытекает, что контролируемые одной стороной клетки не могут быть контролируемыми никакой другой стороной.

Докажем, что каждая сторона контролирует ровно одну надугловую клетку. Действительно, если сторона не контролирует ни одной надугловой клетки, то обе ее клетки C_i находятся на расстоянии больше 2 от углов доски и потому должны находится ближе чем на 2 друг к другу. Если же какая-то сторона контролирует сразу две надугловых клетки, то одной из сторон не контролирует ни одной.

Итак, имеется два варианта: или C_0 соседствует с надугловой клеткой, или это делает C_1. В первом случае C_1 находится на расстоянии 4 от ближайшего к ней угла. Тогда C_0 находится на расстоянии 1 от ближайшего к ней угла. Аналогично однозначно определяются положения остальных C_i. Другой случай сводится к разобранному, если перенумеровать C_i, начиная с C_2, против часовой стрелки. □

Лемма 14. *Не существует полной* 18 : 8*-непрерывной раскладки, продолжающей позицию, в которой на полях* $(1,2)$, $(1,5)$ *и* $(4,1)$ *соответственно, стоят кубики* 111, 114 *и* 411.

Доказательство. Программа [1] определяет, что не существует выделенной цепочки ходов длины 9, продолжающей указанную позицию. □

Цепочку кубиков назовем *непрерывной*, если любые два последовательных кубика цепочки являются соседними.

Лемма 15. *Не существует* 18 : 8*-непрерывного отображения цифрового прямоугольника* 2×4 *в цифровой куб, образ которого содержал бы кубики* 111 *и* 444.

Доказательство. Предположим напротив, что 111 и 444 стоят в непрерывной раскладке на полях C_1 и C_2 прямоугольника 2×4. Во-первых C_1 и C_2 не могут иметь общих соседей, потому что 111 и 444 не имеют общих соседей. Следовательно C_1 и C_2 находятся на расстоянии трех ходов друг от друга. В этом прямоугольнике имеются различные (всего четыре) непрерывные цепочки клеток длины 4 соединяющие C_1 и C_2. Стоящие на этих цепочках клеток кубики образуют различные непрерывные цепочки длины 4 соединяющие кубики 111 с 444. Но существует единственная 26-непрерывная цепочка длины 4, соединяющая эти кубики — это цепочка $111, 222, 333, 444$. А 18-непрерывной цепочки длины 4, соединяющей 111 с 444 вообще не существует. □

Лемма 16. *Если образ цифрового прямоугольника* P *типа* 2×4 *при* 18 : 8*-непрерывном отображении* f *в* 64*-пиксельный цифровой куб содержит кубики* 111 *и* 144, *то этот образ также содержит кубики* 222 *и* 233.

Доказательство. Пусть $f(C_1) = 111$ и $f(C_2) = 144$. Те же соображения, что были приведены при доказательстве леммы 15 показывают, что при данных условиях клетки C_1 и C_2 находятся в трех ходах друг от друга, и существуют такие клетки B_1, B_2, C_1, C_2 в P, для которых 8-непрерывны цепочки C_1, B_1, B_2, C_2 и C_1, D_1, D_2, C_2. Пусть K_1 K_2 пара кубиков, для которых 18-непрерывной является цепочка 111, K_1, K_2, 144. Тогда очевидно, что K_1 равно либо 122 либо 222, а для K_2 имеются только две возможности: 133 и 233. Так как последовательности кубиков, лежащие на клетках C_1, D_1, D_2, C_2 и C_1, B_1, B_2, C_2 будут 18-непрерывными цепочками, соединяющими 111 с 144, то на клетках D_1, D_2, B_1, B_2 могут находиться только кубики $122, 222, 133, 233$. Следовательно, все эти кубики и находятся на указанных клетках. □

Лемма 17. *Во всякой полной* $18:8$*-непрерывной раскладке имеется угловой кубик, стоящий в углу доски.*

Доказательство. Согласно лемме 8 все угловые кубики стоят на полях C_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 7$ края доски, которые мы считаем перенумерованными по часовой стрелке. Условие 18:8-непрерывности влечет, что различные C_i не имеют общих 8-соседей, а потому находятся друг от друга на расстоянии более двух ходов. Если среди C_i нет угловых клеток, то эта последовательность удовлетворяет всем условиям леммы 13. Поэтому все пары $C_i, C_{(i+1) \mod 8}$ являются 2×4-близкими.

Клетку C_i назовем правильной, если кубики, стоящие на ней и на следующей по часовой стрелке клетке, принадлежат одному и тому же ребру куба, то есть различаются лишь одной координатой. Докажем, что за исключением максимум двух клеток, все остальные — правильные. Действительно, если клетка C_i неправильная, то согласно лемме 15 кубики, стоящие на клетках C_i и C_{i+1} отличаются ровно двумя координатами, то есть изометричны паре 111, 144, и на основании леммы 16 заключаем, что в непосредственной близости от C_i и C_{i+1} находятся два центральных кубика (т. е. кубика имеющих наибольшее число соседей). Поэтому если неправильных пар имеется более двух, то более 4-х центральных кубиков располагаются на расстоянии не более чем 1 от края.

В таком случае найдется тройка $C_i C_{(i+1) \mod 8} C_{(i+2) \mod 8}$ правильных клеток, которую, не теряя общности, можно считать тройкой полей $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(4, 1)$. Тогда на этих полях находится тройка кубиков, изометричная тройке 111, 114 и 411 и мы приходим к противоречию с компьютерной леммой 14.

□

Теорема 3. *Не существует полной* $18:8$*-непрерывной раскладки.*

Доказательство. Компьютерный расчет позиции с помощью [1], в которой на поле с координатами $(1, 1)$ стоит кубик 111 доказывает что не существует выделенной цепочки ходов длины более 18 после любого хода на поле $(4, 4)$. Поэтому позиция, в которой в углу доски стоит угловой кубик, не продолжается до полной 18:8-непрерывной раскладки, и теорема вытекает из леммы 17. □

6 Алгоритм дихотомии.

В этом параграфе будет доказана невозможность построения непрерывного отображения квадрата на куб с помощью следующего описанного ниже *алгоритма дихотомии.* Чтобы определить отображение квадрата I^2 на куб I^3 мы можем шаг за шагом подразделять квадрат I^2 в прямоугольники и куб I^3 в параллелепипеды и устанавливать взаимно однозначное соответствие между построенными разбиениями. Такие соответствия порождают отображение $f\colon I^2 \to I^3$ по следующему правилу: $f(x)$ определяется как пересечение всех параллелепипедов соответствующих прямоугольникам, содержащим точку x. Такая конструкция определяет однозначное отображение в случае, если диаметры параллелепипедов стремятся к нулю по мере роста их количества. Непрерывность отображения f обеспечивается *комбинаторной непрерывностью* соответствий между разбиениями, то есть условием: *параллелепипеды соответствующие пересекающимся прямоугольникам пересекаются между собой.*

Следующий алгоритм предлагает способ построения описанной выше последовательности разбиений.

Алгоритм дихотомии Текущее состояние алгоритма заключается в том, что уже построены разбиение квадрата I^2 в последовательность прямоугольников $I^2_1 \dots I^2_k$ и разбиение куба I^3 в последовательность параллелепипедов $I^3_1, I^3_2, \dots I^3_k$, такие что соответствие $I^2_i \to I^3_i$, $i = 1, \dots, k$ комбинаторно непрерывно.

1. (инициализация) Целому квадрату I^2 ставится в соответствие целый куб I^3;
2. (начало цикла) Выбираем первое i для которого параллелепипед I^3_i имеет наибольший объем.
3. Выбираем координату с максимальным диаметром проекции параллелепипеда I^3_i.
4. Выбираем координату с максимальной проекцией прямоугольника I^2_i.
5. Подразделяем выбранный I^3_i в два равных параллелепипеда I^3_+ и I^3_- с помощью плоскости ортогональной выбранной оси координат.
6. Подразделяем выбранный прямоугольник I^2_i на два равных прямоугольника I^2_+ и I^2_- линией ортогональной к выбранной оси координат.
7. Заменяем последовательность $I^2_1 \dots I_i \dots I^2_k$ на $I^2_1, \dots, I^2_{i-1}, I^2_-, I^2_+, I^2_{i+1}, \dots, I^2_k$.
8. Заменяем последовательность $I^3_1 \dots I^3_i \dots I^3_k$ на $I^3_1 \dots I^3_{i-1}, I^3_-, I^3_+, I^3_{i+1}, \dots, I^3_k$ или на $I^3_1 \dots I^3_{i-1}, I^3_+, I^3_-, I^3_{i+1}, \dots, I^3_k$ чтобы выполнить условие комбинаторной непрерывности и переходим к шагу 2 (конец цикла).

Единственную трудность в приведенном выше алгоритме представляет шаг 8. Всегда ли возможно удовлетворить условию комбинаторной непрерывности после подразделения? Как мы сейчас покажем ответ на этот вопрос отрицателен. А точнее приведенный выше алгоритм не может работать более 62 циклов.

Обозначим через S квадрат размера 8×8 и через C — куб размера $4 \times 4 \times 4$. Разбиение квадрата S (куба C) на 64 единичных квадратика (кубика) будем называть *единичным разбиением.*

Лемма 18. *После* 63 *циклов алгоритм дихотомии, примененный к паре* S, C, *порождает биекцию между единичными разбиениями.*

Доказательство. Во-первых заметим, что каждый цикл алгоритма увеличивает на единицу и количество прямоугольников и количество параллелепипедов текущих разбиений. Следовательно после 63 циклов алгоритм дает соответствие между 64-элементными разбиениями квадрата и куба.

Докажем, что все параллелепипеды разбиениии, полученном после 63 циклов алгоритма, являются единичными кубами. Пусть на k-ом цикле алгоритма впервые возник параллелепипед, у которого имеется сторона длины не являющейся степенью двойки. Параллелепипед с этим свойством получен распополамивающим сечением из параллелепипеда P с длинами сторон являющимися степенями двойки поперек его максимальной стороны. Следовательно, P — единичный куб. Но P явяется параллелепипедом максимального объема в разбиениии возникшем после $k-1$ цикла алгоритма. Следовательно, сумма объемов параллелепипедов не может превосходить k. Но эта сумма должна быть равна объему куба C, который равен 64. Получаем $k \geq 64$. Итак, разбиение куба, порожденное алгоритмом дихотомии после 63 циклов, содержит только параллелепипеды с целыми длинами сторон. Следовательно, все элементы разбиения имеют объем по меньшей мере 1. Так как сумма из 64 объемов равна 64, то все объемы единичны 1. Это возможно лишь при единичном разбиении куба.

Такие же рассуждения доказывают, что алгоритм дихотомии после 63 циклов порождает единичное разбиение квадрата S, потому что алгоритм подразделяет только прямоугольники наибольшей площади. Чтобы убедиться в этом можно по индукции доказать, что алгоритм сопоставляет любому прямоугольнику параллелепипед, объем которого равен площади прямоугольника. □

Лемма 19. *Не существует* $26:8$*-непрерывной раскладки* f, *в которой на клетках со первой координатой* ≤ 4 *стоят кубики с первой координатой* ≤ 2.

Доказательство. Предположим напротив, что существует раскладка f, опровергающая условия леммы.

Скажем, что 4-непрерывная цепочка клеток $\{C_1, \dots C_k\}$ $(k \geq 3)$ является *прямой цепочкой*, если у всех клеток имеется одна совпадающая координата. Пусть $C_1, \dots C_{14}$ последовательность всех клеток края доски с первой координатой ≤ 4 занумерованная по часовой стрелке. Тогда она является объединением трех прямых цепочек: $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, $\{C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}\}$, $\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}$. Здесь C_4 и C_{11} являются угловыми клетками. Обозначим через K_1, K_2, K_3 и K_4 угловые кубики с первой координатой 1. В силу леммы 8 кубики K_i должны стоять на клетках C_i $i = 1, \dots 14$. Обозначим через i' номер клетки C_j на которой стоит кубик K_i. Без потери общности предположим что $1' < 2' < 3' < 4'$.

Во-первых, заметим, что $1 < 1'$ и $4' < 14$. Действительно, как легко видеть, все K_i не имеют 26-соседей с первой координатой > 2. С другой стороны клетки C_1 и C_{14} имеют 8-соседей C'_1 и C'_{14} с первыми координатами > 4. В силу условия на клетках C'_1 и C'_{14} в раскладке f стоят кубики со первой координатой > 2. Поэтому из 18:8-непрерывности раскладки f вытекает, что стоящие на клетках C_1 и C_{14} кубики имеют 26-соседей с первой координатой > 2 и потому они не являются угловыми.

Обозначим через $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ надугловые клетки, из которых $\mathcal{C}_1$ имеет 8-соседями C_i при $i = 2, 3, 4, 5, 6$ и $\mathcal{C}_2$ имеет 8-соседями C_i для $i = 9, 10, 11, 12, 13$.

Докажем, что $2' \geq 7$. Действительно, если $1' \leq 6$ то $C_{1'}$ имеет $\mathcal{C}_1$ своим 8-соседом. Это влечет, что $C_{2'}$ не является 8-соседом $\mathcal{C}_1$. В противном случае, K_1 и K_2 оба являлись бы 26-соседями кубика, стоящего в f на $\mathcal{C}_1$. Но не существует кубика имеющего 26-соседями различные угловые кубики. Если $C_{2'}$ не 8-соседствует с $\mathcal{C}_1$, то $2' \geq 7$. Такие же аргументы, примененные к $\mathcal{C}_2$, позволяют доказать неравенство $3' \leq 8$. В этом случае $C_{2'}$ 8-соседствует с $C_{3'}$, что противоречит 26:8-непрерывности f. □

Теорема 4. *Алгоритм дихотомии не может корректно отработать более* 62 *циклов*

Доказательство. Предполагая противное, мы согласно лемме 18, получим, что алгоритм построит 26:8-непрерывное отображение 64-пиксельного квадрата на 64-пиксельный куб. Поскольку первый шаг алгоритма устанавливает соответствие между половиной куба, образованной сечением куба пополам поперек первой координаты и половиной квадрата, полученной сечением квадрата пополам поперек первой координаты, постольку отображение, построенное с помощью этого алгоритма, противоречит лемме 18. □

7 Цифровой треугольник.

Если в треугольнике провести все средние линии, то он разобьется на четыре треугольника. Если в каждом из получившихся четырех треугольников провести средние линии, то мы получим 16 треугольников. Наконец, если с получившимися 16-ю треугольниками проделать тоже самое, то мы получим 64 треугольника, которые будем именовать *треугольничками.* Два треугольничка называются 3-*соседними*, если они имеют общую сторону и они называются 12-*соседними*, если они имеют хотя бы общую вершину.

В этой секции по умолчанию на цифровом кубе рассматривается отношение 26-соседства, а на цифровом треугольнике — отношение 12-соседства.

Теорема 5. *Не существует* $26 : 12$-*непрерывного отображения цифрового* 64-*пиксельного треугольника на цифровой* 64-*пиксельный куб.*

Доказательство этой теоремы получается из сопоставления результатов лемм 24 и 25, доказанных ниже.

Из этой теоремы подобно тому как это было сделано для алгоритма дихотомии, можно сделать вывод о невозможности построения непрерывного отображения треугольника на куб методом деления на четыре части. А именно, треугольники подразделяются на четыре треугольника описанным выше способом. А параллелепипеды подразбиваются на четыре части методом *3-пополам*: сначала пополам, как в алгоритме дихотомии, а потом пополам каждую половину, также по методу дихотомии, то есть сечением поперек самого длинного ребра.

Треугольничек, имеющий 12 соседей (типа 12) называется *внутренним.* А треугольничек не являющийся внутренним, называется *внешним.* Внешние треугольнички пересекают границу исходного большого треугольника, образованного совокутностью всех треугольничков.

Лемма 20. *64-пиксельный цифровой треугольник содержит* 25 *внутренних и* 39 *внешних треугольничков.*

Доказательство. Предоставляется читателю. □

Треугольнички, содержащие вершины исходного треугольника называются *угловыми*. Всего имеется три угловых треугольничка.

Граневые и центральные кубики цифрового куба будем называть *внутренними*, а реберные и угловые *внешними*.

Лемма 21. *Если f является* $26:12$*-непрерывной биекцией цифрового треугольника на цифровой квадрат, f переводит внутренние треугольнички во внутренние кубики.*

Доказательство. Так как внутренний треугольничек имеет 12 соседних треугольничков, то f-образ этого треугольничка имеет соседями 12 кубиков, являющихся f-образами его соседей. Но внешние кубики имеют меньше 12 соседей. □

Лемма 22. *Всякий угловой кубик имеет трех внешних кубиков в качестве* 26*-соседей а всякий внешний кубик имеет не более четырех внешних кубиков в качестве* 26*-соседей.*

Доказательство. Предоставляется читателю. □

Последовательность $T_0, T_2, \ldots T_n$ треугольничков называется *3-непрерывной цепочкой* (длины n), если при любом i треугольнички T_i и T_{i+1} являются 3-соседними. Назовем *цепным расстоянием* между двумя треугольничками наименьшую возможную длину 3-непрерывной цепочки их соединяющей (то есть начинающейся с одного и заканчивающейся другим).

Множество треугольничков находящихся на цепном расстоянии ≤ 4 от данного углового треугольника содержит 9 треугольничков, образующих треугольник, который мы называем 9*-уголоком*.

Лемма 23. *Если f является* $26:12$*-непрерывной биекцией цифрового треугольника на цифровой куб, то образ всякого* 9*-уголка содержит не менее трех внутренних кубиков.*

Доказательство. Во-первых 9-уголок содержит один внутренний треугольничек, обозначаемый V, которому соответствует внутренний кубик в силу леммы 21. Обозначим через T и T' пару треугольничков находящихся на цепном расстоянии 2 от углового. Тогда оба эти треугольничка имеют по шесть соседей в 9-уголке не считая V. Если один из них, скажем $f(T)$ внешний, то согласно лемме 22 он имеет не более четырех внешних соседей, поэтому по-крайней мере образы еще пары соседних с T треугольничков являются внутренними. Если же $f(T)$ и $f(T')$ оба внутренние, то лемма также доказана. □

Лемма 24. *Если f является* $26:12$*-непрерывной биекцией цифрового треугольника на цифровой куб, то найдется 3-непрерывная цепочка длины* 4 *из внешних треугольничков, которую f переводит в цепочку внешних кубиков.*

Доказательство. Внешние треугольнички, переводимые отображением f во внутренние кубики будем называть *исключительными.* Поскольку всем внутренним треугольничкам, которых имеется 25 штук, соответствуют внутренние кубики, которых имеется 32 штуки, постольку имеется ровно 7 исключительных треугольничков. В силу леммы 23, в каждом 9-уголке имеется пара исключительных треугольничков. Поэтому за пределами 9-уголков имеется максимум один исключительный треугольничек. Множество внешних треугольничков не принадлежащих ни одному из трех 9-уголков представляет собой объединение трех 3-непрерывных цепочек длины 4. Поэтому по крайней мере одна из этих цепочек не содержит исключительного треугольничка. □

Лемма 25. *Не существует* $26:12$*-непрерывного отображения* 3*-непрерывной цепочки треугольничков длины* 4 *в множество внешних кубиков.*

Доказательство. Пусть T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 — 3-непрерывная цепочка треугольников. Тогда T_i является 12-соседом для T_{i+2} при $i = 0, 1, 2$. Предположим, что имеется 26-непрерывная цепочка C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 внешних кубиков, для которой соответствие $T_i \to C_i$ является 26:12-непрерывным. Тогда C_2 является 26-соседом для всех C_i, так как T_2 является 12-соседом для всех T_i. В цифровом кубе множество из внешних соседей любого реберного кубика изометрично следующей четверке кубиков $111, 211, 121, 112, 113$. При этой изометрии T_2 соответствует 112. Обозначим через $_k$, кубик, соответствующей при этой изометрии кубику 113. У треугольничка T_k имеется среди T_i по крайней мере два соседа. Поэтому есть и сосед T_m, отличный от T_2. Но, тогда T_m нельзя сопоставить кубика, не нарушая непрерывности соответствия, поскольку 112 является единственным соседом 113 в рассматриваемой четверке. □

8 Нерешенные вопросы.

Скажем, что клетки (a, b) и (c, d) являются *6-соседями*, если они являются 8-соседями и дополнительно $(a - c)(c - d) \geq 0$. Тип соседства 6 имитирует шестиугольную сетку, в этом режиме диагональные соседи по одному направлению соседями считаются, а по другому направлению не считаются.

Вопрос 1. *Существует ли* $18:6$*-непрерывное отображение* 64*-пиксельного цифрового квадрата на цифровой куб?*

Вопрос 2. *Существует ли* $8:3$*-непрерывное отображение* 64*-пиксельного цифрового треугольника на цифровой квадрат.*

Вопрос 3. *Существует ли* $18:3$*-непрерывное отображение* 64*-пиксельного цифрового треугольника на цифровой куб?*

Вопрос 4. *Существует ли* $26:8$*-непрерывное отображение двумерного* 64*-пиксельного цифрового тора на трехмерный?*

Вопрос 5. *Получить не аппелирующее к компьютерным вычислениям доказательство несуществования* $18:8$*-непрерывного отображения* 64*-пиксельного цифрового квадрата на куб.*

Следующим числом после 64, которое является кубом и квадратом одновременно является $3^6 = 729$. Поэтому все сформулированные выше вопросы можно отнести к 729-пиксельным объектам. Более того в этом случае неизвестен также и ответ на следующий вопрос.

Вопрос 6. *Верна ли теорема 1 для отображений* 729*-пиксельного квадрата на* 729*-пиксельный куб?*

Если в описанном выше алгоритме дихотомии заменить деление пополам делением на три равные части парой параллельных плоскостей для шага 5 и парой параллельных линий для шага 6, то получится алгоритм *трихотомии.*

Вопрос 7. *Можно ли построить непрерывное отображение квадрата на куб алгоритмом трихотомии?*

Список литературы

[1] Н. Е. Щепин, *Компьютерная программа "Пасьянс 64"*, www.mi.ras.ru/~scepin

[2] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, задача 1988-5, Фазис, Москва, 2000

[3] Я. М. Бардзинь, А. Н. Колмогоров *О реализации сетей в трехмерном пространстве*, Проблемы кибернетики, 1967, вып. 19, 261–268.

[4] Е. В. Щепин. Повышающие размерность отображения и непрерывная передача информации. *Вопросы чистой и прикладной математики*, том 1, страницы 148–155. Тула. Приокское книжное издательство, 1987.