Об умножении бесконечных сумм.

Е. В. Щепин

16 июня 2004 г.

Жадная сумма. Определим *числовой массив* $\{a_i\}_{i\in I}$, как индексированное множество (комплексных) чисел, где в качестве индексного множества I выступает множество произвольной природы. Например, всякий числовой ряд, а также всякий двойной ряд являются числовыми массивами.

В статье используется нотация Айверсона (см. [6]) — заключенное в квадратные скобки, условие, обозначает единицу, если условие в скобках выполнено и ноль в противном случае.

Массив $\{a_i\}_{i\in I}$ называется *жадно (greedy) суммируемым*, если существует предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i\in I} a_i[|a_i|\geq\varepsilon]$, называемый *жадной суммой* массива и обозначаемый $\sum_{i\in I} a_i$.

Всякий числовой ряд можно рассматривать как числовой массив над множеством натуральных чисел. Жадную сумму этого массива, если она существует, мы будем называть *жадной суммой* числового ряда. Любой абсолютно сходящийся числовой ряд жадно суммируем к своей обычной сумме, но для условно сходящегося ряда это можно гарантировать лишь тогда, когда члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине.

В работах П.Л.Ульянова [3, 4] и В.Н.Темлякова [5] рассматривался специальный тип жадных сумм: так называемые A-суммы, которые удовлетворяют дополнительному условию на скорость роста членов ряда, обеспечивающему для A-сумм следующее свойство *линейности*:

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I}(a_i+b_i) \tag{1}$$

Жадная сумма не удовлетворяет, вообще говоря, указанному свойству линейности и в данной статье свойство линейности не применяется.

Жадное суммирование *аддитивно* по отношению к индексным множествам, то есть если $I\cap J=\varnothing$, то

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in I\cup J} a_i \tag{2}$$

Нелинейность жадного суммирования влечет нарушение аддитивности по отношению к разбиениям на бесконечное число множеств, то есть отсутствие *счетной аддитивности*.

Мультипликативность. Определим *прямое или декартово произведение* числовых массивов $\{a_i\}_{i\in I}$ и $\{b_j\}_{j\in J}$, как числовой массив $\{a_ib_j\}_{(i,j)\in I\times J}$.

Следующая теорема составляет основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Если массивы $\{a_i\}_{i\in I}$ и $\{b_j\}_{j\in J}$ и их прямое произведение $\{a_ib_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ жадно суммируемы, то имеет место равенство*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in J} b_j \tag{3}$$

Производящая функция массива *Положительной полуплоскостью* называется множество комплексных чисел вида $\operatorname{Re} z > 0$ и обозначается $\mathbb{C}^+$.

Лемма 1. *Если числовой массив $\{a_i\}_{i\in I}$ жадно суммируем, то при любом $z\in\mathbb{C}^+$ жадно суммируем массив $\{a_i|a_i|^z\}_{i\in I}$.*

Сформулированная лемма по существу является элементарным фактом теории обобщенных рядов Дирихле. *Рядом Дирихле* называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}, \tag{4}$$

в котором все λ_n — *показатели ряда Дирихле* — вещественны и монотонно возрастают к бесконечности, а c_n — *коэффициенты ряда Дирихле* комплексны и $z = x + iy$ является комплексной переменной.

Для числового массива $\{a_i\}_{i\in I}$ определим *ассоциированный ряд Дирихле* $\sum c_k e^{-\lambda_k z}$ следующим образом: $-\lambda_k$ определяется как k-ый по величине элемент множества $\{\ln|a_i| \mid i\in I\}$. В частности $-\lambda_1$ — это наибольший элемент множества $\{\ln|a_i| \mid i\in I\}$. Коэффициент c_k определяется как сумма $\sum_{i\in I} a_i[\ln|a_i| = -\lambda_k]$.

Из данного определения непосредственно вытекает, что $\sum_{i\in I} a_i|a_i|^z$ совпадает со значением суммы ряда Дирихле массива $\{a_i\}$ в точке z, поэтому лемма 1 вытекает из следующего факта теории рядов Дирихле: для каждого ряда Дирихле существует такое вещественное число λ, называемое его *абсциссой сходимости*, что этот ряд сходится при всех z, таких что $\operatorname{Re} z > c$ и расходится при всех z, для которых $\operatorname{Re} z < c$.

Лемма 1 показывает, что формула

$$A(z) = \sum_{i\in I} a_i|a_i|^z \tag{5}$$

определяет в положительной полуплоскости функцию комплексного переменного $A(z)$, называемую *производящей функцией* числового массива, совпадающую с функцией, представленной ассоциированным с этим массивом рядом Дирихле. Так как ряд Дирихле в открытой полуплоскости сходимости равномерно сходится на компактах, то производящая функция жадно суммируемого массива аналитична и регулярна в положительной полуплоскости.

В силу обобщенной леммы Абеля для рядов Дирихле справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Существует предел при $\lim\limits_{z\to+0} A(z)$ равный жадной сумме массива.*

В силу леммы 2 теорема 1 непосредственно вытекает из следующей леммы о производящих функциях:

Лемма 3. *Если массивы $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ и их прямое произведение жадно суммируемы, то производящая функция прямого произведения равна произведению производящих функций этих массивов.*

Заметим, что лемма 3 в свою очередь вытекает из теоремы 1. Действительно, при любом z массив, жадной суммой которого выражается значение производящей функции произведения, совпадает с прямым произведением массивов соответствующих значениям производящих функций сомножителей, ввиду равенств

$$a_i|a_i|^z \cdot b_j|b_j|^z = a_ib_j|a_ib_j|^z \tag{6}$$

Таким образом числовая теорема мультипликативности (теорема 1) равносильна функциональной (лемма 3).

Лемма 4. *Пусть ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n z)$ *сходится к функции* $f(z)$ *в* $\mathbb{C}^+$. *Тогда* $\frac{f(z)\exp\omega z}{z}$ *ограничено в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geq 1$ *при любом* $\omega < \lambda_1$

Доказательство. Пусть $g(z) = f(z)\exp(\omega z)$. Тогда $g(z)$ также представима рядом Дирихле. Поэтому $g(z) = o(\operatorname{Im} z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 1$ (см. [1] глава 2, параграф 1 пункт 6) и, следовательно, $\frac{g(z)}{z}$ будет ограничено в дополнении к некоторой полосе $|\operatorname{Im} z| > C$. В самой же полосе $\lim g(z) = 0$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ (см. [1] глава 2, параграф 1 пункт 3). Поэтому в этой полосе $g(z)$, а ,следовательно, и $\frac{g(z)}{z}$, будет ограничено. Получаем, что $\frac{g(z)}{z}$ ограничено во всей полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 1$. □

Следующая лемма является следствием теоремы Фрагмена-Линделефа (см. например, [2]). Ниже приведено доказательство, основанное на преобразовании Фурье.

Лемма 5. *Пусть $f(z)$ аналитическая функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq C$, для которой при любом вещественном ω в $\mathbb{C}^+$ ограничено произведение $f(z)\exp\omega z$. Тогда $f(z)$ тождественно равна нулю.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, можем предположить, что $C = 0$. Рассмотрим интеграл от $\frac{f(z)\exp\omega z}{(z+1)^2}$ по границе полукруга $\{z \in \mathbb{C}^+ : |z| \leq R\}$ большого радиуса R. Поскольку функция $\frac{f(z)\exp\omega z}{(z+1)^2}$ регулярна внутри полукруга, интеграл этот равен нулю. Следовательно, интеграл $\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f(z)\exp\omega z}{(z+1)^2}$ по модулю равен пределу интегралов от $\frac{f(z)\exp\omega z}{(z+1)^2}$ по полуокружностям $\{z \in \mathbb{C}^+ : |z| = R\}$. В силу ограниченности $f(z)\exp\omega z$ интегралы по полуокружностям стремятся к нулю, когда R стремится к бесконечности. Поэтому при любом вещественном ω справедливо равенство

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f(z)\exp(\omega z)}{(z+1)^2}\, dz = 0 \tag{7}$$

Замена $z = it$ преобразует этот интеграл в интеграл Фурье

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\frac{f(it)\exp i\omega t}{(1+it)^2}\, dt \tag{8}$$

Откуда следует, что преобразование Фурье функции $\frac{f(it)}{(1+it)^2}$ равно нулю. Следовательно, и сама эта функция нулевая. Откуда $f(it)$ равно нулю при вещественном t, и по теореме единственности отсюда следует, что $f(z)$ равно нулю при любом z. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть $A(z)$ — производящая функция Дирихле ряда $\sum a_n$, $B(z)$ — производящая функция Дирихле ряда $\sum b_n$ и $C(z)$ — производящая функция Дирихле их прямого произведения. Рассмотрим $f(z) = C(z) - A(z)B(z)$ и докажем ограниченность $\frac{f(z)\exp\omega z}{z}$ при любом вещественном ω в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$. Пусть $m(\omega)$ — наименьшее натуральное число n, для которого $\omega < \log|a_n|$ и $\omega < \log|b_n|$. Положим $E_\omega(z) = \sum\limits_{n=1}^{m(\omega)} a_n|a_n|^z$, $F_\omega(z) = \sum\limits_{n=1}^{m(\omega)} b_n|b_n|^z$, $A_\omega(z) = A(z) - E_\omega(z)$, $B_\omega(z) = B(z) - F_\omega(z)$ и $C_\omega(z) = C(z) - E_\omega(z)F_\omega(z)$. Тогда $f(z) = C_\omega(z) - F_\omega(z)B_\omega(z) - A_\omega(z)E_\omega(z) - A_\omega(z)B_\omega(z)$. Поэтому произведение $f(z)\exp\omega z$ представляется в виде суммы функций, разлагающихся в ряды Дирихле. Поэтому на основании леммы 4 мы сможем заключить, что отношение $\frac{f(z)\exp\omega z}{z}$ ограничено в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$. Теперь мы можем, на основании леммы 5 заключить, что $f(z) = 0$ всюду. $\square$

Жадное суммирование матриц Доказанная выше теорема мультипликативности допускает обобщение на матрицы. Пусть $\{A_t\}_{t\in T}$ представляет собой невырожденный матричный массив, то есть индексированное множество невырожденных (т.е. имеющих ненулевой определитель) комплексных квадратных матриц. Для матрицы A будем обозначать через $|A|$ модуль ее определителя. Таким образом для любых матриц имеет место мультипликативность модуля

$$|AB| = |A||B| \tag{9}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ определим множество $T_\varepsilon \subset T$ как множество тех $t \in T$, для которых абсолютная величина определителя матрицы A_t, больше или равна ε. Предположим, что при любом $\varepsilon > 0$ множество T_ε конечно. Определим *ε-жадную сумму* этого матричного массива как $\sum\limits_{t\in T_\varepsilon} A_t$ и определим *жадную сумму* матричного массива $\sum_{t\in T} A_t$ как предел его ε-жадных сумм при ε стремящемся к нулю.

Доказательство матричной теоремы мультипликативности следует той же схеме, что и числовой.

Определим *матричную производящую функцию* матричного массива как жадную сумму $A(z) = \sum_{t\in T} A_t|A_t|^z$. Если матричный массив A_t был жадно суммируем, то матричная производящая функция $A(z)$ определена при любом $z \in \mathbb{C}^+$. Действительно, сходимость матричной последовательности равносильна сходимости последовательностей ее компонент: элементов из (i,j)-ой позиции (i-ый столбец, j-ая строка). Для любой компоненты значение производящей функции $A[i,j](z)$ выражается рядом Дирихле ассоциированным с $\sum_{t\in T} A[i,j]|A_t|^z$. Заметим, что в рядах Дирихле, ассоциированных с компонентами матрицы коэффициенты при экспонентах не расположены монотонно по убыванию модуля в отличие от случая числовой производящей функции, но этого теория рядов Дирихле и не требует. Поэтому в силу теории рядов Дирихле на любой позиции матрицы имеет место сходимость производящих функций во всей полуплоскости и матричная производящая функция определена и аналитична[1] в положительной полуплоскости в силу определенности и аналитичности ее компонент. Таким образом доказывается справедливость матричных аналогов лемм 1 и 2, что приводит к доказательству равносильности матричной теоремы умножения и приведенного ниже ее функционального аналога:

Лемма 6. *Если матричные массивы $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ и их прямое произведение жадно суммируемы, то производящая функция прямого произведения равна произведению производящих функций этих массивов.*

Доказательство леммы 6 идет тем же путем, что и доказательство леммы 3, основываясь на теории матричных рядов Дирихле (рядов $\sum A_n \exp(-\lambda_n z)$, где коэффициенты A_n суть матрицы, а показатели λ_n неотрицательны и монотонно возрастают к бесконечности), которую легко вывести из теории обычных рядов Дирихле.

Основным фактом матричной теории рядов Дирихле является теорема о росте на вертикалях. А именно, если матричная функция, представлена матричным рядом Дирихле сходящимся в положительной полуплоскости, то максимум модулей ее компонент имеет тип $o(\operatorname{Im} z)$. Справедливость этого утверждения для конечных матриц очевидно вытекает из того, что все компоненты матричного ряда Дирихле в этом случае имеют тип $o(\operatorname{Im} z)$. Это замечание позволяет без изменений провести доказательство следующего матричного аналога леммы 4:

Лемма 7. *Пусть матричный ряд Дирихле $\sum A_n \exp(-\lambda_n z)$ сходится в $\mathbb{C}^+$ к функции $F(z)$. Тогда $\frac{F(z)\exp\omega z}{z}$ ограничено в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 1$ при любом $\omega < \lambda_1$*

А из этой леммы вывести из него следующий матричный аналог леммы 5:

Лемма 8. *Пусть $F(z)$ матричная аналитическая функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq C$, для которой при любом вещественном ω в $\mathbb{C}^+$ ограничено произведение $F(z)\exp\omega z$. Тогда $F(z)$ тождественно равна нулю.*

Из леммы 8 выводится лемма 6 точно по той же схеме, как это было сделано при выводе леммы 3.

В результате получаем доказательство следующей теоремы:

Теорема 2. *Пусть A_i, B_j — жадно суммируемые семейства невырожденных матриц. Тогда если их прямое произведение также жадно суммируемо, то жадная сумма этого произведения равна произведению жадных сумм.*

Так как кватернионы и октавы Кэли представляются матрицами, то доказанная выше матричная теорема умножения влечет за собой соответствующие теоремы для сумм кватернионов и октав Кэли, которые формулируются в точности аналогично комплексной теореме умножения.

[1] Матричную функцию называем аналитической, если таковыми являются все ее компоненты

Заключительные замечания. Автор благодарен С. В. Бочкареву за идею поиска векторного аналога теоремы умножения, которая способствовала нахождению матричной теоремы умножения. Если в теореме умножения вместо чисел рассматривать векторы а умножение заменить на скалярное произведение, то теорема перестает быть справедливой. Произведение на векторах обязательно должно удовлетворять условию: модуль произведения равен произведению модулей. С этим условием доказательство теоремы умножения проходит практически без изменений по сравнению с рассмотренным случаем, без этого условия теорема умножения неверна.

Список литературы

[1] А. Ф. Леонтьев *Ряды экспонент*, Наука, Москва, 1976

[2] М. А. Евграфов *Асимптотические оценки и целые функции*, Москва "Наука", 1978

[3] П.Л.Ульянов *Об A-сходимости рядов*, 368, N 2, стр. 160–163, 1999

[4] П.Л.Ульянов *О свойствах рядов*, 378, N 3, стр. 307–310, 2000

[5] S.V.Konyagin, V.N. Temlyakov *Convergence of greedy approximations I. General systems*, Industrial Math. Institute, Research Report 2020:8, Math.Dept. University of South Carolina

[6] Грэхем, Кнут, Паташник *Конкретная математика* R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994