Лекции по анализу в НОЦ.
Ряд и интеграл.

Е. В. Щепин

октябрь–декабрь 2010 года

Оглавление

1 Интегральная формула Коши.

Комплексная дифференцируемость. Формально определение комплексно-дифференцируемой функции выглядит также как вещественной:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1.1}$$

Из этого определения на основании бинома Ньютона можно получить правило дифференцирования степени $(z^n)' = nz^{n-1}$. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного имеют ту же форму, что и вещественные и также доказываются. То же самое относится к производной сложной функции. При этом сложная функция может быть композицией комплексной функции комплексного аргумента с комплексной функцией вещественного аргумента. Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда доказывается точно также как в вещественном случае. Поэтому производная комплексной экспоненты $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ вычисляется почленным дифференцированием $(e^z)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z$. Производные комплексных тригонометрических функций можно получить из производной экспоненты с помощью формулы Эйлера. Производные обратных функций находятся с помощью правила дифференцирования сложной функции.

Модульное неравенство для производной Следующая теорема аналогична соответствующей вещественной теореме, которую обычно доказывают с помощью формулы Лагранжа, которая неверна в комплексном случае.

Теорема 1. *Если производная $f'(z)$ функции комплексного переменного $f(z)$ определена и по модулю не превосходит M во всех точках прямолинейного отрезка $[z_0, z_1]$, то*

$$|f(z_1) - f(z_0)| \leq M|z_1 - z_0| \tag{1.2}$$

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\zeta(t) = z_0 + \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}t$ вещественного отрезка $[0, |z_1 - z_0|]$ на отрезок $[z_0, z_1]$. Так как $|\zeta'(t)| = 1$ при любом t, то производная комплексной функции вещественного переменного $f(\zeta(t))$ по абсолютной величине всюду совпадает с комплексной производной $f'(z)$ (по теореме о производной сложной функции). Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $f(t)$ является комплексной функцией вещественного переменного определенной на отрезке $[0, T]$, для $T = |z_1 - z_0|$. В этом случае неравенство приобретает вид

$$|f(T) - f(0)| \leq MT \tag{1.3}$$

Пусть α таково что $f(T) - f(0) = |f(T) - f(0)|e^{i\alpha}$. Рассмотрим вещественную функцию $\varphi(t) = \operatorname{Re} f(t)e^{-i\alpha}$. Ее производная, являясь вещественной частью производной функции $f(t)e^{-i\alpha}$, по абсолютной величине совпадает с $f'(t)$ и, следовательно, не превосходит M. Поэтому, как нам известно из прошлой лекции, справедливо неравенство

$$|\varphi(T) - \varphi(0)| \leq MT.$$

Но $\varphi(T) - \varphi(0) = \mathrm{Re}(f(T) - f(0))e^{-i\alpha} = |f(T) - f(0)|$. Поэтому последнее неравенство влечет (1.3). $\square$

Следствие 2. *Если производная функции комплексного переменного тождественно равна нулю, то функция постоянна.*

Однако понятие теория комплексной дифференцируемости существенно отличается от вещественной, что можно проиллюстрировать следующей теоремой.

Теорема 3. *Если комплексно-дифференцируемая функция комплексного переменного принимает только вещественные значения, то она постоянна.*

Доказательство. Возьмем в качестве Δz вещественную последовательность $\{\frac{1}{n}\}$. Тогда вычисленная с ее помощью производная будет вещественной. Если же мы рассмотрим чисто мнимую последовательность $\Delta z = \{\frac{i}{n}\}$, то вычисленная с ее помощью производная оказывается чисто мнимой. А так как результаты вычислений должны быть одинаковы, то они оба нулевые. Следовательно, $f'(z)$ тождественно равно нулю и $f(z)$ — константа. $\square$

Принцип максимума.

Лемма 1.1. *Пусть функция $f(z)$ определена и n раз комплексно дифференцируема на круге $|z - z_0| < \varepsilon$, ее n-ая производная ограничена а модуль принимает в z_0 наименьшее значение. Тогда или $f(z_0) = 0$ или $f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$*

Доказательство. Предположим противное, $f(z_0) \neq 0$ и $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ является первой отличной от нуля производной. Тогда, многочлен Тэйлора степени m для $f(z)$ в точке z_0 совпадает с $f(z_0) + \frac{f^{(m)}(z_0)(z-z_0)^m}{m!}$, а разность между ним и самой функцией $R(z)$ оценивается сверху по модулю величиной $M|z - z_0|^{m+1}$, для некоторой константы M. Пусть $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\varphi}$. Пусть $\Delta z = re^{i\varphi/m+1}$ где

$$M|r| < \frac{f^{(m)}(z_0)}{2m!} \tag{1.4}$$

В таком случае

$$|f(z_0 + \Delta z)| = \left| f(z_0) + \frac{f^{(m)}(z_0)(z - z_0)^m}{m!} + R(z) \right| \geq$$
$$\left| f(z_0) + \frac{f^{(m)}(z_0)(z - z_0)^m}{m!} \right| - |R(z)| =$$
$$= |f(z_0)| + \left| \frac{f^{(m)}(z_0)(z - z_0)^m}{m!} \right| - |R(z)| \geq |f(z_0)| + \left| \frac{f^{(m)}(z_0)r^m}{2m!} \right|,$$

что противоречит предположению о минимальности $|f(z_0)|$. $\square$

Теорема 4 (принцип максимума). *Аналитическая функция комплексного переменного принимает максимальное по модулю значение на границе области определения.*

Доказательство. Если предположить, что $f(z)$ принимает максимальное по модулю значение во внутренней точке области z_0, то $1/f(z)$ принимает минимальное значение по модулю в некоторой окрестности z_0. Из леммы 1.1 вытекает, что все производные $1/f(z)$ в точке z_0 равны нулю, откуда в силу аналитичности $f(z)$ следует что $f(z)$ постоянна. □

Основная теорема алгебры.

Теорема 5. *Всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Доказательство. Во-первых, на бесконечности модуль многочлена стремится к бесконечности, поэтому минимум модуля достигается в некоторой точке плоскости. Так как многочлен совпадает со своим многочленом Тэйлора, то в любой точке не все его производные равны нулю. Если минимум модуля многочлена достигается в некоторой точке, то в силу леммы 1.1 эта точка и будет корнем многочлена. □

Криволинейный интеграл. Интеграл от комплексной функции вещественного переменного определяется раздельным интегрированием ее вещественной и мнимой частей.

$$\int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt \tag{1.5}$$

Пусть теперь $f(z)$ и $g(z)$ представляют собой пару функций комплексного переменного и задан *путь* интегрирования, то есть отображение вещественного интервала в комплексную плоскость $p\colon I \to \mathbb{C}$. Интеграл от дифференциальной формы $f\,dg$ вдоль пути p обозначается $\int_p f(z)\,dg(z)$ и определяется посредством следующего равенства:

$$\int_p f(z)\,dg(z) = \int_a^b f(p(t))g'(p(t))p'(t)\,dt \tag{1.6}$$

Таким образом комплексный интеграл по любому пути сводится к вещественным интегралам.

Например, вычислим интеграл от формы $\frac{dz}{z}$. Рассмотрим представленный в полярных координатах путь $p(t) = r(t)e^{it}$, $t \in [0,T]$, с началом $p(0) = 1$ и концом в точке $p(T) = Z$. Тогда

$$\int_p \frac{dz}{z} = \int_0^T \frac{dr(t)e^{it}}{r(t)e^{it}} = \int_0^T \frac{e^{\ it}dr(t)}{r(t)e^{it}} + i\int_0^T \ dt = \ln|Z| + i\arg Z \tag{1.7}$$

Таким образом $\int \frac{dz}{z}$ по дуге окружности с раствором φ оказывается равным $i\varphi$. И, в частности, интеграл по полной окружности дает $2\pi i$. Интегралы по путям с совпадающими началом и концом называются *контурными* и имеют специальное обозначение: $\oint$. Применяя это обозначение, мы можем записать следующее равенство:

$$\boxed{\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i} \tag{1.8}$$

Где интеграл берется по любому замкнутому пути, один раз обходящему начало координат против часовой стрелки.

Модульное неравенство Пусть $z(t)$ является комплексной функцией вещественного переменного. Тогда справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b z(t)\,dt\right| \le \int\limits_a^b |z(t)|\,dt \tag{1.9}$$

Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ представляет собой разложение на действительную и мнимую часть. Интегрирование неравенств $-|f(t) \le x(t) \le |f(t)|$ дает следующее неравенство для интегралов

$$\left|\int\limits_a^b x(t)\,dt\right| \le \int\limits_a^b |f(t)|\,dt \tag{1.10}$$

Если $\int\limits_a^b y(t)\,dt = 0$, то последнее неравенство равносильно неравенству (1.9). В общем случае положим

$$c = \frac{\left|\int\limits_a^b z(t)\,dt\right|}{\int\limits_a^b z(t)\,dt}, z'(t) = cz(t) = x'(t) + y'(t)$$

Тогда $|c| = 1$ и $\int\limits_a^b y'(t)\,dt = 0$. Поэтому для $z'(t)$ неравенство (1.9) справедливо. Но условие $|c| = 1$ дает равенства $|z'(t)| = |z(t)|$ и $\left|\int\limits_a^b z'(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_a^b z(t)\,dt\right|$. Поэтому справедливость неравенства (1.9) для $z(t)$ вытекает из его справедливости для $z'(t)$.

Комплексная Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 6. *Для любой комплексно-дифференцируемой функции $f(z)$, определенной вдоль кусочно-гладкого пути $p(t)\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_p f'(z)\,dz = f(p(b)) - f(p(a)) \tag{1.11}$$

Доказательство.

$$\int_p f'(z)\,dz = \int_a^b f'(z(t))\,dz(t) = \int_a^b f'(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b f(z(t))'\,dt =$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re} f(z(t))'\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f(z(t))'\,dt =$$

$$= \operatorname{Re} f(p(b)) - \operatorname{Re} f(p(a)) + i(\operatorname{Im} f(p(b)) - \operatorname{Im} f(p(a))) = f(p(b)) - f(p(a)).$$

□

Длина кривой. *Интеграл длины* для пути $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ определяется как $\int\limits_a^b |p'(t)|\,dt$. При монотонно-возрастающей замене переменной значение интеграла не меняется. Действительно, если $t(\tau)\colon [c,d] \to [a,b]$ и $t'(\tau)$ положительно, то замена переменной дает

$$\int_c^d |p'(t(\tau)|\,dt(\tau) = \int_c^d |p'(t(\tau))|t'(\tau)\,d\tau = \int_c^d |p'(t(\tau))t'(\tau)|\,d\tau = \int_c^d |p'_\tau(t(\tau))|\,d\tau$$

Если $p(t) = a+t(b-a)$ прямолинейный путь, то $|p'(t)| = |b-a|$ и $\int\limits_p |\,dz| = \int\limits_0^1 |b-a|\,dt = |b-a|$, то есть для прямолинейного пути интеграл длины действительно дает его длину.

Если путь идет по дуге окружности $p(t) = c+re$ при $t \in [\alpha,\beta]$, то $|p'(t)| = r$ и интеграл длины дает $r(\beta-\alpha)$, что и является длиной дуги окружности. Таким образом для любого простого пути интеграл длины действительно дает длину пройденного пути.

Лемма 1.2 (об оценке интеграла)**.** *Для простого пути $p(t)$ длины L и комплексной функции $f(z)$, удовлетворяющей неравенству $|f(z)| \le C$ при всех z из образа p, справедливо неравенство:*

$$\left|\int_p f(z)\,dz\right| \le LC$$

Доказательство. Имеем $\int\limits_p f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(p(t))\,dp(t) = \int\limits_a^b f(p(t))p'(t)\,dt$ Далее имеем неравенства

$$\left|\int_a^b f(p(t))p'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(p(t))p'(t)|\,dt \le \int_a^b C|p'(t)|\,dt = LC$$

□

Лемма 1.3 (о треугольнике)**.** *Пусть функция $f(z)$ определена и комплексно дифференцируема в области, содержащий треугольник ABC, тогда*

$$\int\limits_A^B dz + \int\limits_B^C f(z)\,dz = \int\limits_A^C f(z)\,dz$$

Доказательство. Обозначим через $\oint\limits_{ABC} f(z)\,dz$ интеграл по замкнутому контуру — границе треугольника ABC. Обозначим через A', B', C' середины сторон треугольника ABC. Возникает разбиение нашего треугольника на четыре подобных с коэффициентов половина треугольника. Тогда легко проверить следующее равенство.

$$\oint\limits_{ABC} f(z)\,dz = \oint\limits_{AC'B'} f(z)\,dz + \oint\limits_{BA'C'} f(z)\,dz + \oint\limits_{CB'A'} f(z)\,dz + \oint\limits_{A'B'C'} f(z)\,dz$$

Из этого равенства вытекает, что если $|\oint\limits_{ABC} f(z)\,dz|$ обозначить за I, то максимум из модулей интегралов четырех треугольников разбиения обозначаемый I_1 будет не меньшим, чем $I/4$. Возьмем из четырех "половинных"тот для которого модуль интеграла максимален и, в свою очередь, разобьем его на четыре подобных треугольника. Так мы получим треугольник в четыре раза меньший исходного модуль интеграла по которому будет $\geq I/16$. Продолжая построение мы получим последовательность вложенных треугольников $A_nB_nC_n$ подобных первоначальному с коэффициентом $1/2^n$ и с модулем контурного интеграла $I_n \geq I/4^n$. Обозначим через P периметр исходного треугольника, тогда периметр n-го треугольника будет $P_n = P/2^n$. Обозначим через z_0 общую точку полученной последовательности треугольников. В силу дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0 имеем $f(z_0+\Delta z) = f(z_0)+f'(z_0)\Delta z+o(1)\Delta z$. Поскольку интегралы по замкнутому контуру от первых двух слагаемых нулевые, постольку модуль интеграла от $f(z)$ по треугольнику $A_nB_nC_n$ оценивается сверху произведением периметра треугольника на максимум модуля $o(1)\Delta z$ то есть сам имеет вид $o(1)P_n^2$, что противоречит полученной ранее оценке снизу для модуля этого интеграла. □

Лемма 1.4 (о сегменте)**.** *Если функция $f(z)$ дифференцируема в некоторой выпуклой области содержащей криволинейный путь конечной длины P с началом в точке z_0 и концом в точке z_1, то*

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \int\limits_P f(z)\,dz$$

Доказательство. Обозначим через $D(P)$ модуль разности сравниваемых интегралов и назовем его *дефектом пути* P. Пусть z_2 точка, делящая наш кривой путь пополам (по длине). Тогда обозначим через P_0 — первую, а через P_1 — вторую половину пути. Имеем два равенства

$$\int\limits_{P_0} f(z)\,dz + \int\limits_{P_1} f(z)\,dz = \int\limits_P f(z)\,dz \qquad \int\limits_{z_0}^{z_2} f(z)\,dz + \int\limits_{z_2}^{z_1} f(z)\,dz = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$$

Откуда следует равенство для дефектов $D(P_0) + D(P_1) = D(P)$. Назовем средним дефектом отношение дефекта к длине пути. Таким образом одна из половин пути имеет средний дефект не меньший чем исходный путь. Разделим эту половину пополам и повторим рассуждение. Так возникает последовательность вложенных путей P_n с длинами стремящимися к нулю а средними дефектами отграниченными от нуля. Рассмотрим точку z общую для этой последовательности. В окрестности этой точки имеем $f(z+\Delta z) = f(z) + o(1)$. Поскольку для константы дефект любого интеграла нулевой, постольку дефект для пути P_n оценивается сверху как произведение длины пути на $o(1)$. То есть средний дефект стремится к нулю вопреки нашим оценкам снизу. □

Лемма 1.5 (о кольце)**.** *Если функция комплексно дифференцируема в дополнении к центру некоторого круга то интеграл по любой окружности меньшего радиуса с центром в этой точке одинаков.*

Доказательство. Из леммы о сегменте легко получить, что интеграл по окружности равен интегралу по вписанному треугольнику. Поэтому достаточно доказать лемму для подобных треугольников. ABC и $A'B'C'$. Интеграл от $f(z)$ по отрезку прямой соединяющей пару точек ниже обозначаем просто указанием этой пары точек. Тогда в силу леммы о треугольнике можем записать такие равенства.

$$AB = AA' + A'B' + B'B \quad BC = BB' + B'C' + C'C \quad CA = CC' + C'A' + A'A$$

складывая эти три равенства получаем нужный результат. □

Следующая формула Коши считается основной формулой комплексного анализа.

Теорема 7 (Интегральная формула Коши)**.** *Если $f(z)$ комплексно дифференцируема в круге D, то*

$$\boxed{\oint\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)}$$

Доказательство. В силу леммы о кольце интеграл по границе области совпадает с интегралом по малой окружности с центром в z_0. Поэтому теорема будет доказана, если мы докажем равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

Так как $\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{z-z_0} = 2\pi i$, то требуемое равенство равносильно следующему

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0,$$

которое легко получить из леммы об оценке интеграла. Действительно, подинтегральная функция ограничена ввиду дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0, а длина пути интегрирования стремится к нулю. □

Теорема 8. *Если $f(z)$ комплексно дифференцируема в круге $|z-z_0| \le R$, то для $|z-z_0| < R$ имеет место равенство*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0}^{R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta, \tag{1.12}$$

где ряд в правой части абсолютно сходится для $|z-z_0| < R$.

Доказательство. Фиксируем точку z такую что $|z-z_0| < R$ и рассмотрим ζ как переменную. Для $|\zeta - z_0| > |z-z_0|$ получим

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \tag{1.13}$$

На круге $|\zeta - z_0| = R$ ряд в правой части мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{R^{k+1}}$ для $r > |z-z_0|$. Функция $f(\zeta)$ ограничена на $|\zeta - z_0| = R$ (как непрерывная функция). Следовательно после умножения (1.13) на $f(\zeta)$ выполнены условия теоремы о почленном интегрировании.

$$2\pi i f(z) = \oint_{z_0}^{R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \oint_{z_0}^{R} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \tag{1.14}$$

□

2 Особые точки и вычеты.

2.1 Топология плоскости.

Интеграл вращения

Лемма 2.1. *Пусть $z(t), t \in [a, b]$ путь в комплексной плоскости, не проходящий через ноль, и пересекающий вещественную ось конечное число раз. Тогда существует непрерывная функция $\varphi(t)$, такая что $z(t) = |z(t)|e^{i\varphi(t)}$*

Доказательство. Обозначим через $\arg^+ z$ функцию, определенную в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, дающую значение аргумента z в интервале $[0, \pi]$ и через $\arg^- z$ функцию, определенную в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z \leq 0$, дающую значение аргумента z в интервале $[-\pi, 0]$.

Пусть $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ все значения переменной t, при которых $z(t)$ вещественно. Положим также $a = t_0$, $b = t_{n+1}$ и $\varphi(a) = \arg z(a)$. Тогда образ любого интервала $[t_k, t_{k+1}]$ содержится или в верхней или в нижней полуплоскости, поэтому можно последовательно, определить значения $\varphi(t_k)$ из условия $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \arg^\pm z(t_{k+1}) - \arg^\pm z(t_k)$, где значение аргумента выбирается в зависимости от полуплоскости, в которой содержится интервала $[t_k, t_{k+1}]$.

При этом автоматически будет выполняться условие $e^{\varphi(t_k)}|z(t_k)| = z(t)$. Теперь для любого $t \in [t_k, t_{k+1}]$ положим $\varphi(t) = \varphi(t_k) + (\arg(z(t)) - \arg(z(t_k)))$. Построенная таким образом функция будет непрерывна внутри отрезка $t \in [t_k, t_{k+1}]$, ввиду непрерывности функций $\arg^\pm z$. □

Пусть $p(t)$ представляет собой замкнутый путь, не проходящий через точку z_0. Вещественную часть следующего интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_p \frac{dz}{z_0 - z} \tag{2.1}$$

мы будем называть *вращением* пути $p(t)$ относительно точки z_0, а сам интеграл *интегралом вращения.*

Лемма 2.2. *Вращение замкнутого пути всегда целое число.*

Доказательство. Действительно, согласно лемме (2.1) имеем представление $p(t) - z_0 = r(t)e^{i\varphi(t)}$, $t \in [0, l]$, где $r(t) = |p(t) - z_0|$ и $p(l) = p(0)$. Поэтому

$$\oint_p \frac{dz}{z_0 - z} = \int_0^l \frac{r'(t)e^{i\varphi(t)} + ir(t)e^{i\varphi(t)}\varphi'(t)}{r(t)e^{i\varphi(t)}}\, dt = \tag{2.2}$$

$$\int_0^l d\ln r(t) + \int_0^l i\, d\varphi(t) = \ln r(l) - \ln r(0) + i(\varphi(l) - \varphi(0))$$

А так как $r(0)e^{i\varphi(0)} = r(l)e^{i\varphi(l)}$, то $\varphi(l) - \varphi(0) = 2\pi k$ для целого k. □

Лемма 2.3. *Если точка z не принадлежит выпуклой оболочке образа пути $p(t)$, то его вращение относительно z равно нулю.*

Доказательство. Выберем систему координат так, чтобы начало координат совпало с z, а образ пути целиком находился в правой полуплоскости (с положительной вещественной частью). Тогда $\varphi(t) = \arg p(t)$ непрерывно зависит от t и значения $\varphi(t)$ вначале и в конце пути интегрирования совпадают и значение интеграла вращения равно нулю согласно формуле 2.2. $\square$

Лемма 2.4. *Интеграл* $\int\limits_{p(t)} \frac{dz}{z_0 - z}$ *непрерывно зависит от* z_0 *при фиксированном пути интегрирования.*

Доказательство. Пусть ε таково, что в ε-окрестности z_0 нет точек пути. Тогда при $|z_1 - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ имеем неравенство

$$\left|\frac{1}{z_0 - z} - \frac{1}{z_1 - z}\right| = \left|\frac{z_1 - z_0}{(z_0 - z)(z_1 - z)}\right| \leq \frac{4|z_1 - z_0|}{\varepsilon^2},$$

из которого видно, что при $z_1 \to z_0$ максимум модуля разности подъинтегральных функций стремится к нулю. По лемме об оценке отсюда следует что и

$$\int\limits_{p(t)} \frac{dz}{z_1 - z} \to \int\limits_{p(t)} \frac{dz}{z_0 - z}$$

$\square$

Лемма 2.5. *Для любого замкнутого пути* $p(t)$ *множество точек плоскости с заданным вращением открыто.*

Доказательство. Пусть z лежит вне образа пути. Тогда, согласно лемме о непрерывной зависимости интеграла вращения от пути, у точки z есть окрестность, в которой значение этого интеграла отличается меньше чем на единицу. Но значение этого интеграла — целое число. Поэтому оно должно совпадать для всех точек окрестности с вращением относительно z. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть* $p(t), t \in [0, l]$ *представляет собой замкнутый путь, содержащий прямолинейный отрезок* $[p(t_0), p(t_1)]$, *на прообразе которого он взаимно однозначен. Пусть две точки* z_0 *и* z_1, *таковы, что соединяющий эти точки отрезок* $[z_0, z_1]$ *пересекает образ пути в единственной точке, принадлежащей отрезку* $[p(t_0), p(t_1)]$. *Тогда вращение пути* $p(t)$ *относительно точек* z_0 *и* z_1 *отличаются ровно на единицу.*

Доказательство. Пусть $z'_k, k = 0, 1$ обозначает точку отрезка $[z_0, z_1]$, лежащую по ту же сторону от $[p(t_0), p(t_1)]$, что и z_k. Тогда индекс вращения пути относительно z'_k такой же как у z_k, потому что индекс меняется непрерывно и принимает целые значения. Поэтому разность индексов вращения точек z_0 и z_1 совпадает с пределом разности индексов вращения точек z'_0 и z'_1, когда разность между ними стремится к нулю. Если обозначить ограничения пути $p(t)$ на отрезки $[0, t_0]$, $[t_0, t_1]$ и $[t_1, l]$ соответственно как $p_0(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$, то разность индексов z'_0 и z'_1 выражается в виде суммы трех разностей интегралов

$$\int\limits_{p_0} \frac{dz}{z'_0 - z} - \int\limits_{p_0} \frac{dz}{z'_1 - z} + \int\limits_{p_1} \frac{dz}{z'_0 - z} - \int\limits_{p_1} \frac{dz}{z'_1 - z} + \int\limits_{p_2} \frac{dz}{z'_0 - z} - \int\limits_{p_2} \frac{dz}{z'_1 - z} \tag{2.3}$$

При $z_0' - z_1' \to 0$ первая и третья разности стремятся к нулю в силу леммы **??**. Мнимая часть второй разности после интегрирования выглядит так:

$$i \arg \frac{p(t_1) - z_0'}{p(t_0) - z_0'} - i \arg \frac{p(t_1) - z_1'}{p(t_0) - z_1'} \tag{2.4}$$

Когда z_0 стремится к отрезку $[p(t_0), p(t_1)]$, то угол между направлениями на концы отрезка стремится к развернутому, также как и для z_1, но ориентированы эти углы по разному и потому при $(z_1 - z_0) \to 0$ выражение (2.4) стремится или к 2π или к -2π. □

Теорема Жордана. Открытое множество называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств.

Открытое связное множество V называется *компонентой связности* открытого множества U, если оно не содержится ни в каком большем открытом связном множестве, содержащемся в U.

Теорема 1. *Любые две точки открытого связного множества плоскости можно соединить ломаной, целиком лежащей в этом множестве. Если любые две точки открытого множества можно соединить непрерывным путем, то это множество связно.*

Доказательство. Пусть U представляет собой открытое связное множество. Фиксикуем в нем точку x_0 и обозначим через U_0 множество тех точек U, которые можно соединить с x_0 лежащей в U ломаной. Если какие-то две точки соединяются отрезком I, лежащим внутри U, и одна из них принадлежит U_0, то и другая принадлежит U_0, потому что ломаная, соединяющая другую точку с x_0, получается наращиванием ломаной, соединяющей с x_0 первую точку еще одним звеном: отрезком I.

Поэтому точки, соединенные отрезком, либо обе принадлежат U_0 либо обе не принадлежат U_0. А так как всякая точка открытого множества соединяется прямыми отрезками со всеми точками своей круглой окрестности, лежащей в U, то всякая точка U, принадлежащая U_0, принадлежит ему вместе со своей окрестностью, а не принадлежащая — не принадлежит вместе с окрестностью.

Поэтому открыты как U_0 так и $U \setminus U_0$. Так как U по предположению связно и U_0 непусто, то от противоречия со связностью U нас спасет только пустота $U \setminus U_0$. То есть все точки U соединяются ломаными с x_0, а потому соединяются ломаными друг с другом.

Если же множество U несвязно и представляется в виде объединения непересекающихся открытых множеств U_0 и U_1, то никакую пару точек $x_0 \in U_0$ и $x_1 \in U_1$ нельзя соединить непрерывным путем, лежащей в U. Действительно, пусть путь $p\colon [0,1] \to U$ начинается в x_0 и заканчивается в x_1. Рассмотрим функцию $h(z)$ на U, принимающую значение 0, в точках из $I \cap U_0$ и значение 1 в точках из $I \cap U_1$. Тогда функция $h(p(t))$ непрерывна и мы приходим к противоречию с теоремой о промежуточных значениях непрерывной функции. □

В начале двадцатого века французский математик Жордан доказал следующую замечательную теорему.

Теорема 2 (Жордан). *Всякий замкнутый путь без самопересечений разбивает плоскость на две связные открытые области ограниченную (внутреннюю) и не ограниченную (внешнюю), общей границей которых она является.*

Условие для пути $p\colon [a,b] \to$ не иметь самопересечений выглядит так: $p(t_1) \neq p(t_2)$ если $0 < t_1 - t_2 < b - a$.

Лемма 2.7. *Не замкнутая ломаная без самопересечений имеет связное дополнение.*

Доказательство. Доказательство ведется по числу звеньев ломаной. База индукции число звеньев ноль. Шаг индукции. Обозначим через L ломаную без первого звена и через I первое звено ломаной, через A начальную точку ломаной, а через B второй конец отрезка I, совпадающий с пересечением $L \cap I$, если L непусто.

Рассмотрим произвольную пару различных точек X, Y из дополнения $L \cup I$, не лежащих на прямой, содержащей I. Мы должны доказать существование соединяющего их пути, лежащего в дополнении к $L \cup I$. По предположению индукции имеется путь $p(t)$, с началом $p(0) = X$ и концом $p(1) = Y$, который не пересекает L.

Обозначим через t_0 наименьшее значение параметра t, при котором $p(t) \in I$, и через t_1 — наибольшее значение t, для которого $p(t) \in I$. Меняя, если нужно, направление пути на противоположное, можем добиться что $[A, p(t_0)] \subset [A, p(t_1)]$. Обозначим через ε расстояние от L до $[A, p(t_1)]$.

Возьмем положительное δ столь маленьким, что одновременно выполнялись неравенства

$$|p(t_0 - \delta) - p(t_0)| < \varepsilon \qquad |p(t_1 + \delta) - p(t_1)| < \varepsilon \tag{2.5}$$

Теперь путь, соединяющий X и Y и не пересекающий $L \cup I$ определяется так: на участке $t \in [0, t_0 - \delta]$ он совпадает с $p(t)$. На участке $t \in [t_0 - \delta, (t_0 + t_1)/2]$ путь идет по прямолинейному отрезку, соединяещему $p(t_0 - \delta)$ с точкой A_ε лежащей на продолжении отрезка I со стороны точки A на расстоянии ε от A. На участке $t \in [(t_0 + t_1)/2, t_1 + \delta,]$ путь идет по прямолинейному отрезку, соединяещему A_ε с $p(t_1 + \delta)$. И на последнем участке $t \in [t_1 + \delta, 1]$ путь опять совпадает с $p(t)$.

Если же, какая-то из рассматриваемых точек лежит на прямой, проходящей через I, то для соединения ее путем с другой точкой мы сначала можем немного сдвинутся в направлении перпендикулярном I, а потом пойти по пути соединяющем сдвинутую точку с целью. $\square$

Доказательство теоремы Жордана. Пусть на плоскости дана замкнутая ломаная $[A_0, A_1, \ldots, A_n]$ без самопересечений ($A_0 = A_n$). Обозначим через $p(t)$ непрерывный замкнутый путь без самопересечений последовательно проходящий все звенья этой ломаной. Обозначим через U_0 множество точек дополнения к ломаной, относительно которых вращение $p(t)$ равно нулю и через U_1 — множество с ненулевым вращением.

Тогда множество U_0 в силу леммы 2.3 неограничено, а множество U_1 — ограниченно. Оба множества открыты в силу леммы 2.5. Рассмотрим точку z звена A_k, A_{k+1}. Зафиксируем пару точек z^+ и z^- близких к z и лежащих по разные стороны от отрезка $[A_k, A_{k+1}]$, то есть такие что отрезок $[z^+, z^-]$

пересекает рассматриваемую ломаную в единственной точке, принадлежащей $[A_k, A_{k+1}]$.

Согласно лемме 2.7 существует путь $q(t)$, соединяющий $z^+ = q(0)$ с некоторой точкой $q(1)$ вне выпуклой оболочки ломаной и не пересекающий ломаную за исключением $[A_k, A_{k+1}]$. Пусть $q(t_0)$ — наибольшее значение t, для которого $q(t)$ принадлежит $[A_k, A_{k+1}]$. Тогда $q(t) \in U_0$ при $t > t_0$. Зафиксируем $t_1 > t_0$ столь близко, чтобы полуинтервал $[q(t_1), q(t_0))$ имел длину меньше, чем расстояние от $q(t_0)$ до ломаной с удаленным звеном $[A_k, A_{k+1}]$. Тогда какой-то из отрезков $[q(t_1), z^{\pm}]$ не пересекает ломаной (аксиома Паша). Следовательно, одна из этих точек принадлежит U_0. Тогда другая принадлежит U_1 на основании леммы 2.6. Таким образом установлено, что сколь угодно близко к z имеются точки обоих множеств U_0 и U_1. Следовательно ломаная принадлежит границам этих множеств . Точки не лежащие на ломаной принадлежат либо U_0, либо U_1 и не являются для них граничными в силу открытости этих множеств. Значит границы обоих этих множеств совпадают с ломаной, которая, таким образом, и является их общей границей.

Осталось установить их связность. Пусть даны $z_1, z_2 \in U_0$. Если они обе не принадлежат выпуклой оболочке ломаной, то .... В приведенном выше рассуждении на самом деле доказано, ломаная является границей не просто U_0 а компоненты связности бесконечности. Зафиксируем какую-то точку $z \in U_1$. Пусть w — другая точка U_1. Существует путь $q(t)$, соединяющий эти точки и не пересекающий редуцированную ломаную без первого звена A_1, A_2. Пусть t_0 первый, а t_1 — последний моменты пересечения отрезка $[A_1, A_2]$. Тогда при $t < t_0$ и при $t > t_1$ вращения $q(t)$ принадлежат одной компоненте связности.

□

Лемма 2.8. *Если для непрерывной комплексной функции $f(z)$, определенной на многоугольной области D равен нулю по любому треугольнику, лежащему в ней (вместе с внутренностью), то равен нулю и интеграл по границе области.*

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по числу сторон выпуклого многоугольника. Проводим диагональ. В общем случае доказательство ведем по числу углов больших развернутого. Если есть угол больший развернутого, то проводим его внутреннюю биссектриссу, рассекая наш многоугольник на два с меньшим числом внутренних углов больших развернутого. □

Теорема 3 (Морера). *Если для непрерывной комплексной функции $f(z)$ интеграл по любому треугольнику из области D со связной границей нулевой, то она имеет первообразную в D.*

Доказательство. Во-первых, заметим что интегралы по различным ломаным $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ с началом z_0 и концом z совпадают. Доказательство ведем индукцией по числу пересечений. Если пересечений нет, то в силу теоремы Жордана объединение двух ломаных ограничивает многоугольную область D'. Ограниченная область целиком содержится внутри D. Действительно, предположение противного приводит к выводу, что внутри D есть как точки внутренности, так и внешности D. Поэтому там есть и точки границы D (иначе D_0 распадется в объединение двух открытых множеств: внутренних точек D и его дополнения.) Но если там есть точки границы, то за пределами D' точек границы уже нет ввиду предположения о связности последней. Тогда мы получаем, что внутренность дополнения D' распадется в объединение двух открытых множеств: внутренних точек D и его дополнения. Итак, D' содержится в D и нужное нам утверждение следует из леммы 2.8.

Пусть z_1 является общей точкой ломаных. Тогда для обеих ломаных справедливо разложение $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta$, в котором слагаемые совпадают по предположению индукции.

Итак, корректно определена следующая функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ от верхнего предела, где интеграл вычисляется по любой ломаной. Покажем, что она имеет комплексную производную равную $f(z)$. Действительно, приращение $\Delta F(z)$ представляется интегралом $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$. Поскольку $f(\zeta) = f(z) + o(1)$ при $\Delta z \to 0$, то отношение приращения функции к приращению аргумента имеет вид $f(z) + o(1)$. □

Теорема 4 (Коши)**.** *Если $f(z)$ является комплексно-дифференцируемой функцией в области D со связной границей, то $\oint f(z)dz = 0$ для любого замкнутого пути, идущего по границе области.*

Доказательство. Из комплексной формулы Ньютона-Лейбница вытекает, что интеграл по замкнутому пути от производной равен нулю. Так как комплексно-дифференцируемая функция в односвязной области имеет первообразную в силу теоремы Морера и леммы о треугольнике, то теорема Коши вытекает из комплексной формулы Ньютона-Лейбница. □

2.2 Вычеты.

Лемма 2.9. *Если функция $f(z)$ комплексно-дифференцируема в области D со связной границей за исключением конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_n$, то для достаточно малого ε*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{z_k}^{\varepsilon} f(z)dz$$

Доказательство. Доказательство ведем индукцией по числу n особых точек. Если $n = 0$ утверждение следует из теоремы Коши. Выберем ε столь малым, чтобы круг с центром z_1 и радиусом ε содержался в D и не содержал других особых точек. Проведем луч из z_1 до пересечения с границей области D не пересекающий других особых точек. Обозначим через A точку этого луча, для которой $|A_\varepsilon - z_1| = 0$ и через B первую точку пересечения луча с границей. Рассмотрим также другой луч с соответствующими точками обозначенными A' и B', столь близкий к первому, чтобы в угол между ними не попало других особых точек. Обозначим через D' область полученную из D выбрасыванием области ограниченной криволинейным четырехугольником

$ABB'A'$ у которого AA' является большой дугой окружности с центром z_1, BB' является отрезком границы области D, а AB и BA — прямолинейные отрезки. В таком случае область D' содержит на одну особую точку меньше и по предположению индукции интеграл по ее границе равен сумме $\sum\limits_{k=2}^{n} \oint\limits_{z_k}^{\varepsilon} f(z)dz$. Но граница D отличается от границы D' заменой куска BB' на трехзвенную кривую $BAA'B'$ интеграл по которой при стремлении к нулю угла между лучами стремится к интегралу $\oint\limits_{z_1}^{\varepsilon} f(z)dz$, потому что интегралы по BA и $A'B'$ друг друга компенсируют. В пределе получаем требуемое. $\square$

Точка z_0 называется *особой точкой* аналитической функции $f(z)$, если $f(z)$ определена и аналитична в проколотой окрестности точки $f(z)$, а в самой точке функция или не определена или не аналитична.

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в особой точке z_0 называется интеграл (обозначается $\mathrm{res}_{z=z_0} f(z)$)

$$\mathrm{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{z_0}^{\varepsilon} f(z)dz, \tag{2.6}$$

где ε достаточно мало, чтобы в ε-окрестности z_0 не содержалась особых точек отличных от z_0.

Теорема 5 (Коши о вычетах)**.** *Если функция $f(z)$ аналитична в области D за исключением конечного числа особых точек, то*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z\in D} \mathrm{res}_z f$$

Доказательство. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ все особые точки функции $f(z)$ в области D. Выберем для каждой особой точки z_k круг D_k с центром z_k и столь малым радиусом r_k, что все эти круги попарно не пересекаются и содержатся в D. А из теоремы Коши следует, что интеграл по границе D равен сумме интегралов по границам D_k. $\square$

Устранимые особые точки Особая точка функции $f(z)$ называется *устранимой*, если функцию $f(z)$ можно доопределить в этой точке таким образом, что доопределенная функция является аналитической в этой точке.

Например, функция $\frac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особенность в нуле, поскольку ряд синуса делится на z.

Лемма 2.10. *Если функция $f(z)$ ограничена на контуре C, то функция, представленная интегралом Коши комплексно-дифференцируема и ее производная выражается интегралом $\oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$*

Доказательство. Производная интеграла Коши выражается пределом

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{1}{\Delta z}\left(\oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z - \Delta z} - \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) = \lim_{\Delta z\to 0} \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} \tag{2.7}$$

Разность между полученным выражением и его предполагаемым пределом выражается пределом при $\Delta z \to 0$ интеграла

$$\oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} - \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \oint \frac{\Delta z f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}, \tag{2.8}$$

модуль которого по лемме об оценке не превосходит произведения $M|\Delta z|L$, где M верхняя оценка модуля $f(z)$ на контуре интегрирования и L — длина контура интегрирования, откуда видно, что этот предел равен нулю. □

Теорема 6 (об устранимой особенности)**.** *Если $f(z)$ комплексно-дифференцируема в проколотой окрестности точки z_0 и $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, то существует $\lim_{z\to z_0} f(z)$ и, доопределяя $f(z)$ в точке z_0 значением этого предела, мы получаем комплексно-дифференцируемую функцию в окрестности z_0.*

Доказательство. Условие $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$ влечет равенство нулю вычета в точке z_0, ибо интеграл $\oint f(z)dz$ по окружности радиуса ε по лемме об оценке не превосходит произведения максимума модуля $f(z)$ на этой окружности на длину окружности и стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ по условию $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$

Поэтому теорема о вычетах дает для $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ равенство

$$2\pi i f(z) = \oint_{z_0}^{\varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

Но это равенство задает аналитическую функцию, определенную во всем круге $|z-z_0| < R$, которая продолжает $f(z)$ в z_0 в силу леммы о производной интеграла Коши. □

Следующая теорема является аналогом теоремы Безу для многочленов.

Теорема 7. *Если комплексно-дифференцируемая функция $f(z)$ обращается в ноль в точке z_0, то частное $\frac{f(z)}{z-z_0}$ имеет в z_0 устранимую особенность.*

Полюсы. Если при натуральном k существует конечный ненулевой предел $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$, то точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$ а число k называется *кратностью* полюса.

Лемма 2.11. *Если $f(z)$ имеет полюс порядка n в z_0, то имеет место разложение $f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(z-z_0)^k}$, где $g(z)$ не имеет особенности в z_0.*

Доказательство. Если k является наименьшим числом, для которого равен нулю предел $\lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)^k$, то z_0 является полюсом порядка $k - 1$. Действительно, в этом случае особенность произведения $f(z)(z-z_0)^{k-1}$ устранима и по теореме об устранимой особенности существует предел $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^{k-1}$, отличный от нуля в силу минимальности k. □

Теорема 8. *Вычет в полюсе порядка k вычисляется по формуле*

$$\operatorname{res} f(z_0) = (k-1)! \lim_{z \to z_0} \left(f(z)(z-z_0)^k\right)^{(k-1)} \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + f_0(z),$$

где $f_0(z)$ не имеет особенности в z_0. Умножив это равенство на $(z-z_0)^k$, продифференцировав полученное равенство $k-1$ раз и перейдя к пределу при $z \to z_0$ в правой части мы получим $(k-1)!a_{-1}$. Сравнив это с левой частью, получим обещанное равенство (2.9). □

Полюс первого порядка также называется *простым.* Вычет в простом полюсе дается формулой

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0) \tag{2.10}$$

Нули и полюса Говорят, что аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке z_0 ноль порядка k, если $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Следующая лемма весьма полезна для определения порядка полюса.

Лемма 2.12. *Отношение $P(z)/Q(z)$ двух аналитических в z_0 функций имеет в точке z_0 полюс порядка k, равного разности порядков нуля числителя и знаменателя.*

Доказательство. Если $P(z)$ имеет нуль порядка n, то ее ряд Тэйлора в z_0 начинается с $a_n(z-z_0)^n$. Аналогично ряд $Q(z)$ начинается с $b_{n+k}(z-z_0)^{n+k}$. Поэтому $\lim\limits_{z \to z_0} P(z)(z-z_0)^k/Q(z) = a_n/b_{n+k}$. □

Теорема 9 (правило Лопиталя)**.** *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими функциями такими что $f(z_0) = g(z_0) = 0$ и существует предел отношения производных $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ и имеет место равенство*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Доказательство. Пусть $f(z) = a_m(z-z_0)^m + \dots$ и $g(z) = b_n(z-z_0)^n + \dots$. Тогда $f'(z) = ma_m(z-z_0)^{m-1} + \dots$ и $g'(z) = na_n(z-z_0)^{n-1} + \dots$. Если $m > n$, то оба рассматриваемых предела равны нулю. Если $m < n$, то пределы отношения производных и функций бесконечны. Если $m = n$, то оба эти предела равны отношению первых ненулевых коэффициентов. □

Существенно особые точки. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)^k \neq 0$ ни для какого k, то точка называется существенно особой.

2.3 Применения вычетов.

Вычисление некоторых тригонометрических интегралов с помощью вычетов. Рассматриваются интегралы по периоду, представляющие собой отношения тригонометрических полиномов. Эти интегралы можно рассматривать как контурные интегралы от рациональных функций, сделав замену $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$. Эта замена обратна естественной параметризации окружности $z = e^{it}$.

Несобственные интегралы и вычеты. Интегралы по неограниченному промежутку называют *несобственными*. Вычеты с успехом применяются для вычисления несобственных интегралов. В качестве примера рассмотрим следующий интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \tag{2.11}$$

который легко посчитать и без вычетов, потому что нам известна первообразная подъинтегральной функции.

Рассмотрим полукруг $D = \{z \mid |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ радиуса R, тогда если $R > 1$, то D содержит единственную особую точку подъинтегральной функции — i, вычет в которой равен $\frac{1}{2i}$. Поэтому

$$\oint_{\partial D} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

Так как граница области D состоит из отрезка $[-R, R]$ вещественной прямой и полуокружности $\{z = Re^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi \leq \pi\}$, то интеграл по границе распадается в сумму двух интегралов, так что при любом $R > 1$ имеет место равенство

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + i\int_{0}^{\pi} \frac{Re^{i\varphi}}{1+R^2e^{2i\varphi}}\, d\varphi = \pi$$

Когда $R \to \infty$, то первый интеграл, очевидно стремиться к (2.11), а второй стремится к нулю. В результате предельного перехода получаем, что интеграл (2.11) равен π.

Предложенная схема работает для вычисления интегралов от рациональных функций, у которых степень знаменателя больше чем на единицу превосходит степень числителя.

Пусть $Re^{i[0,\pi]}$ — обозначает путь, проходящий по верхней полуокружности радиуса R.

Лемма 2.13. *Если функция $f(z)$ не имеет особенностей на вещественной оси и*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{Re^{i[0,\pi]}} f(z)\, dz = 0, \tag{2.12}$$

то[1]

$$(2.13)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z f(z)$$

Доказательство. Обозначим через через D_R^+ полукруг $|z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0$. Тогда по теореме Коши

$$(2.14)\qquad 2\pi i \sum_{z\in D_R^+} \operatorname{res}_z f(z) = \oint\limits_{\partial D_R^+} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{+R} f(t)\,dt + \int\limits_{Re^{i[0,\pi]}} f(z)\,dz$$

Если теперь устремить R к бесконечности, то левая часть равенства (2.14) превратится в правую часть равенства (2.13). Первое слагаемое в правой части (2.14) превратится в интеграл из левой части (2.13), тогда как второе слагаемое исчезнет в силу (2.12). То есть равенство (2.14) превратится в (2.13). □

Лемма 2.14. *Пусть $f(z)$ имеет в z_0 простой полюс. Тогда интеграл по дуге малой окружности вокруг z_0 стремится к произведению угловой меры дуги на вычет функции.*

Доказательство. Условие $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = A$ с помощью символов Ландау можно переписать $f(z)(z-z_0) - A = o(1)$. Откуда

$$f(z) = \frac{A}{z-z_0} + \frac{o(1)}{z-z_0}$$

Интегрируя полученное неравенство по дуге окружности $|z-z_0| = \varepsilon$ мы получим, первая дробь дает независимо от ε дает угловую меру дуги умноженную на A, тогда как вторая дробь дает $o(1)$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ получаем нужный результат. □

Лемма 2.15 (Жордана)**.** *Если $f(z) = o(1)$ при $|z| \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ и $\lambda > 0$, то*

$$(2.15)\qquad \int\limits_{|z|=R, \operatorname{Im} z\geq 0} f(z)e^{i\lambda z}\,dz = o(1)$$

Доказательство. Так как $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, что вытекает из выпуклости кверху $\sin\varphi$, на этом отрезке (ведь вторая производная неположительна). Отсюда получаем такое неравенство в первой четверти окружности $|z| = R$

$$(2.16)\qquad |e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R\sin\varphi} \leq e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi}$$

Если обозначить через C_1 первую четверть окружности $|z| = R$, то получим такую оценку интеграла

$$(2.17)\qquad \left|\int\limits_{C_1} f(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| \leq M(R)R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi}\,d\varphi = M(R)\frac{\pi}{2\lambda}(1-e^{-\lambda R}),$$

[1]интеграл понимается в смысле главного значения как и сумма вычетов

где $M(R)$ представляет собой максимум модуля $f(z)$ на C_1. Интеграл по второй четверти C_2 окружности $|z| = R$ оценивается аналогично ввиду тождества $\sin(\pi - t) = \sin t$. Поэтому интеграл (6.11) оценивается по модулю сверху величиной $M(R)\dfrac{\pi}{\lambda}$, которая стремится к нулю с ростом R по условию. □

Интеграл Дирихле $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Так как $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$, то мы будем рассматривать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$. Здесь возникает трудность, потому что последний интеграл расходится. Эта трудность возникает всегда, когда на путь интегрирования попадает полюс. Чтобы работать с такого сорта интегралами Коши ввел понятие *главного значения*.

Главное значение интеграла в смысле Коши. Если на пути интегрирования имеется особая точка подъинтегральной функции x_0, то *главное значение* интеграла $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ по интервалу содержащему x_0 определяется как предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{x_0-\varepsilon} f(t)\,dt + \int\limits_{x_0+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt \tag{2.18}$$

Например, главное значение расходящегося интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ равно нулю.

Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он является пределом собственных интегралов:

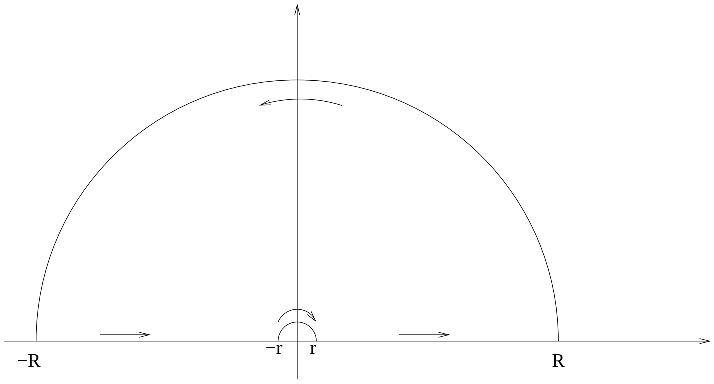
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(t)\,dt \tag{2.19}$$

Может случиться, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \infty$ и тем не менее предел в правой части (2.19) существует. Тогда этот предел также называется *главным значением* интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

Лемма 2.16. *Если замкнутый контур интегрирования содержит простые полюса, то главное значение интеграла по этому контуру равно произведение $2\pi i$ на половину суммы вычетов особых точек контура и сумму вычетов точек попавших внутрь контура.*

Вычисление интеграла Дирихле Обозначим через Ғ(r) полуокружность $\{z \mid |z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Рассмотрим подковообразную область $D(R)$, ограниченную полуокружностями Ғ(r), Ғ(R) и интервалами $[-R, -r]$ и $[r, R]$, где $r = \frac{1}{R}$ и $R > 1$.



Функция $\frac{e^{iz}}{z}$ не имеет сингулярных точек внутри $D(R)$. Следовательно, $\oint\limits_{\partial D(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. Значит, для любого R

$$\int\limits_{-r}^{-R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int\limits_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int\limits_{\Gamma(r)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int\limits_{\Gamma(R)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \tag{2.20}$$

Второй интеграл справа стремится к нулю, когда R стремится к бесконечности в силу леммы Жордана. Функция $\frac{e^{iz}}{z}$ имеет простой полюс в нуле, следовательно, в силу леммы 2.14 первый интеграл справа в (2.20) стремится к $\pi i \operatorname{res} \frac{e^{iz}}{z} = \pi i$. В результате правая часть (2.20) стремится к πi когда R стремится к бесконечности. Следовательно, и левая часть (2.20) также стремится к πi при $R \to \infty$. Мнимая часть левой части (2.20) равна $\int\limits_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx - \int\limits_{-r}^{r} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Последний интеграл стремится к нулю 0 когда $r \to 0$, потому что $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$. Следовательно, $\int\limits_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx$ стремится к π когда $R \to \infty$. Окончательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$.

Разрывный интеграл Дирихле

$$\boxed{\operatorname{sgn} x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} dt} \tag{2.21}$$

Суммирование ряда Эйлера. Производящая функция $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ при дифференцировании дает $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k}$ мы получаем $\varphi'(x)x = \ln(1-x)$. И по формуле Ньютона-Лейбница, ввиду того что $\varphi(0) = 0$, имеем

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = \int\limits_{0}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt.$$

Следовательно, сумма ряда обратных квадратов выражается интегралом $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$, который мы сейчас вычислим с помощью вычетов.

Замена $t^2 = x$ дает

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt^2 =$$
$$= 2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt + 2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = 2\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$$

Далее рассматривается интеграл $\oint\limits_{\partial D} \frac{\ln(1-z)}{z} dz$ по границе полукруга $D = \{z \mid |z| \le 1, \operatorname{Im} z \ge 0\}$. По пути интегрирования имеются устранимая особая точка в нуле и особая точка в единице, которую нужно обходить. Интеграл по обходящей дуге окружности радиуса ε стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, потому подъинтегральная функция растет как $\ln\varepsilon$, а путь интегрирования как ε. В результате интеграл убывает как $\varepsilon\ln\varepsilon$. Так как внутри рассматриваемого полукруга особых точек нет, получаем, что интеграл по верхней полуокружности равен интегралу по ее диаметру со знаком минус. А так как интеграл по диаметру равен половине искомого интеграла, то получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -2\int\limits_0^\pi \frac{\ln(1-e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}}\,de^{i\varphi} = -2i\int\limits_0^\pi \ln(1-e^{i\varphi})\,d\varphi \tag{2.22}$$

Так как интересующий нас интеграл вещественен и $\ln(1-e^{i\varphi}) = \ln|1-e^{i\varphi}| + i\arg(1-e^{i\varphi})$, то переход к вещественным частям в (2.22) дает

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = 2\int\limits_0^\pi \arg(1-e^{i\varphi})\,d\varphi = 2\int\limits_0^\pi \frac{\pi-\varphi}{2}\,d\varphi$$

Суммирование рядов с помощью вычетов.

Лемма 2.17. $|\operatorname{ctg} z| \le 2$ *если* $|\operatorname{Im} z| \ge 1$

Доказательство. Положим $z = x+iy$. Тогда $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y}$. Следовательно, если $y \ge 1$, то $|e^{2iz}| = e^{-2y} \le \frac{1}{e^2} < \frac{1}{3}$. Значит $|e^{2iz}+1| \le \frac{1}{e^2} + 1 < \frac{4}{3}$ и $|e^{2iz}-1| \ge 1 - \frac{1}{e^2} > \frac{2}{3}$. Таким образом абсолютная величина у

$$\operatorname{ctg} z = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} \tag{2.23}$$

меньше чем 2. Для $y \ge 1$ те же аргументы работают при представлении $\operatorname{ctg} z$ как $i\frac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}$. $\square$

Лемма 2.18. $|\operatorname{ctg}(\pi/2+iy)| \le 4$ *при всех* y.

Доказательство. $\operatorname{ctg}(\pi/2 + iy) = \frac{\cos(\pi/2+iy)}{\sin(\pi/2+iy)} = \frac{-\sin iy}{\cos iy} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$. Модуль числителя этой дроби не превосходит $e - e^{-1}$ при $t \in [-1, 1]$ и знаменатель больше чем 1. Это доказывает неравенство для $y \in [-1, 1]$. При остальных y это следует из предыдущей леммы. $\square$

Лемма 2.19. *Множество особых точек* $\operatorname{ctg} z$ *совпадает с* $\pi\mathbb{Z}$. *Все эти точки являются простыми полюсами и имеют вычет равный* 1.

Доказательство. Особые точки $\operatorname{ctg} z$ совпадают с корнями синуса $\sin z$. Корни синуса $\sin z$ суть корни уравнения $e^{iz} = e^{-iz}$, эквивалентного следующему $e^{2iz} = 1$. Так как $|e^{2iz}| = |e^{-2\operatorname{Im} z}|$ получаем $\operatorname{Im} z = 0$. Следовательно $\sin z$ не имеет корней за пределами вещественной прямой. Все эти вещественные корни имеют вид $\{k\pi\}$. Так как $\lim\limits_{z\to 0} z \operatorname{ctg} z = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z\cos z}{\sin z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{\sin' 0} = 1$, то мы получаем, что 0 является простым полюсом котангенса $\operatorname{ctg} z$ с вычетом равным 1 и другие полюсы имеют такие же вычеты в силу периодичности $\operatorname{ctg} z$. $\square$

Лемма 2.20. *Пусть* $f(z)$ *является аналитической функцией, имеющей изолированные особые точки на плоскости и* $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, *тогда*

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|z|<R} \operatorname{res} f(z) \operatorname{ctg} \pi z = 0 \tag{2.24}$$

Доказательство. Определим область плоскости D_n для $n > 3$ как прямоугольник, ограниченный линиями $\operatorname{Re} z = \pm(\pi/2 - n\pi)$, $\operatorname{Im} z = \pm n\pi$. Так как $|\operatorname{ctg}(z)| \leq 4$ в силу лемм 2.17, 2.18, а длина границы ∂D_n меньше чем $4n\pi$. То интеграл $\oint\limits_{\partial D_n} f(z) \operatorname{ctg} z dz$ оценивается по модулю сверху величиной $4\pi n \max_{z\in D_n} R(z)$, стремящейся к нулю при $n \to \infty$ в силу условия на убывание $f(z)$. Поэтому предел интегралов $\oint\limits_{\partial D_n} f(z) \operatorname{ctg} z dz$, когда n стремится к бесконечности равен нулю. Следовательно, равен нулю предел $\lim\limits_{R\to\infty} \sum\limits_{|z|<R} \operatorname{res} f(z) \operatorname{ctg} \pi z$, который совпадает с суммой всех вычетов произведения $R(z)\pi \operatorname{ctg} \pi z$, в случае абсолютной суммируемости массива вычетов. $\square$

Теорема 10. *Если рациональная функция* $R(z)$, *степени* ≤ -2, *не имеет особенностей в целых числах, то* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum_z \operatorname{res} \pi \operatorname{ctg}(\pi z) R(z)$

Доказательство. Вычеты в целых точках дают $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} R(k)$. Остальное дает $-\sum_z \operatorname{res} \pi \operatorname{ctg}(\pi z) R(z)$ $\square$

Ряды обратных квадратов. Котангенс $\operatorname{ctg} z$ имеет в нуле простой полюс, поэтому $z \operatorname{ctg} z$ имеет устранимую особенность в нуле и, следовательно, допускает разложение в степенной ряд, радиус сходимости которого равен π, так как π является ближайшей к нулю особой точкой для $z \operatorname{ctg} z$. Обозначим через c_n коэффициенты ряда представляющего $z \operatorname{ctg} z$, так что

$$z \operatorname{ctg} z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{2.25}$$

Через эти коэффициенты выражаются суммы рядов следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}, \tag{2.26}$$

Действительно, особые точки функции $\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^{2n}}$ представляют собой все целые числа. Причем только ноль является непростым полюсом. Сумма вычетов в остальных точках, являющихся простыми полюсами, в силу леммы 2.19 равна

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

Поэтому, согласно теореме 2.20, учитывая равенство вычетов в противоположных по знаку полюсах для рассматриваемой функции, имеем

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^{2n}} = -2\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res}_{z=k} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^{2n}} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \tag{2.27}$$

Ноль является для функции $\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^{2n}}$, как легко видеть, полюсом порядка $2n+1$, вычет в котором находится по формуле

$$\lim_{z\to 0} \frac{(z \operatorname{ctg} \pi z)^{(2n)}}{(2n)!} \tag{2.28}$$

Так как

$$(z \operatorname{ctg} \pi z)^{(2n)} = \pi^{2n-1}(z \operatorname{ctg} z)^{(2n)} = \pi^{2n-1} c_{2n}(2n)!,$$

мы и приходим к соотношению:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{c_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!} \tag{2.29}$$

Заметим, что $z \operatorname{ctg} z$ является четной функцией, поэтому имеет нулевые коэффициенты при нечетных степенях. В математике более употребительны, чем коэффициенты разложения функции $z \operatorname{ctg} z$, коэффициенты для функции половинного угла, разложение которого, с учетом четности, принято записать в виде

$$\frac{z}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} B_{2k}}{(2k)!}, \tag{2.30}$$

где числа B_{2k} называются *числами Бернулли.* С этими замечательными числами мы еще встретимся дальше.

3 Гамма функция.

Формальное телескопирование. Мы снова возвращаемся к задаче по данной функции $f(x)$ найти функцию $F(x)$ такую что $\Delta F = f$. В частности для $f = 0$ любая периодическая функция периода 1 будет решением. В общем случае к любому решению задачи можно добавить 1-периодическую функцию и опять получить решение. Формальное решение задачи дает такая формула

$$F(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} f(x+k) \tag{3.1}$$

Тригамма. Ряд (3.1) сходится для $f(x) = \frac{1}{x^m}$ при $m \geq 2$ и $x \neq -n$ для натурального $n > 1$. В частности, функция

$$\text{₣}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \tag{3.2}$$

называется *тригамма* функцией с разностью $-\frac{1}{(1+x)^2}$. Величина $\text{₣}(0)$ как раз равно сумме ряда обратных квадратов.

Теорема 1. *Если монотонная функция $f(x)$ имеет разность $\Delta f(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, то $f(x) - \text{₣}(x)$ постоянна.*

Доказательство. Во-первых очевидно, что $f(n) - \text{₣}(n)$ — постоянная последовательность. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \text{₣}(x) = 0$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = c$. Из монотонности f вытекает существование предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$. Значит существует и предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \text{₣}(x) = c$. Но периодическая функция имеет предел при $x \to \infty$ только если она постоянна. □

Доказанная теорема позволяет охарактеризовать тригамму как единственную монотонную функцию телескопирующую $-\frac{1}{(1+x)^2}$ и стремящуюся к нулю при $x \to \infty$.

Дигамма. Ряд $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x+k}$, формально телескопирующий $\frac{1}{x}$, расходится. Зато сходится ряд $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}[k \neq 0]\right)$, который также телескопирует $\frac{1}{x}$, потому что добавление постоянной не меняет разности. Действительно,

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+1+k} - \frac{1}{k}[k \neq 0]\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}[k \neq 0]\right) = -\sum_{k=0}^{\infty} \Delta \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x}. \tag{3.3}$$

Функция

$$\digamma(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right) \tag{3.4}$$

называется *дигамма* функцией. Здесь γ — постоянная Эйлера. Монотонность выделяет $\digamma$ среди других функций телескопирующих $\frac{1}{1+x}$.

Теорема 2. *Монотонная дифференцируемая функция, телескопирующая* $\frac{1}{(1+x)}$ *отличается от* $\text{₣}(x)$ *на константу.*

Доказательство. Предположим $f(x)$ — монотонная функция, телескопирующая $\frac{1}{1+x}$. Обозначим через v вариацию разности $f-\text{₣}$на $[0,1]$. Тогда вариация $f-\text{₣}$на $[1,n]$ равна nv. С другой стороны, $\mathrm{var}_f[1,n]=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\ln n+\gamma$. Следовательно вариация разности $f(x)-\text{₣}(x)$ на $[1,n]$ меньше чем $2(\gamma+\ln n)$. Следовательно, v для любого натурального n удовлетворяет неравенству $nv\leq 2(\gamma+\ln n)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, то $v=0$. Следовательно $f-\text{₣}$ — постоянна. □

Лемма 3.1. $\text{₣}'=\mathbb{F}$.

Доказательство. Чтобы доказать, что $\text{₣}'(x)=\mathbb{F}(x)$, рассмотрим $F(x)=\int\limits_1^x\mathbb{F}(t)\,dt$. Эта функция монотонна потому что $F'(x)=\mathbb{F}(x)\geq 0$. Далее $(\Delta F)'=\Delta F'=\Delta\mathbb{F}(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$. Откуда $\Delta F=\frac{1}{1+x}+c$, где c постоянна. По теореме **2** получаем $F(x+1)-cx-\gamma=\text{₣}(x)$. Следовательно, $\text{₣}(x)'=F'(x+1)+c=\mathbb{F}(x)$. Это доказыает, что $\text{₣}'$ дифференцируема и имеет конечную вариацию. так как $\Delta\text{₣}(x)=\frac{1}{1+x}$ получаем $\Delta\text{₣}'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$. Мы получаем, что $\text{₣}'(x)=\mathbb{F}(x)$ в силу теоремы **1**. □

Телескопирование логарифма. Мы начнем с формального решения $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\ln(x+k)$. Чтобы уменьшить расходимость добавим почленно $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln k$. Получим $-\ln x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\ln(x+k)-\ln k)=-\ln x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{k})$. Мы знаем, что $\ln(1+x)$ близок к x, но ряд все еще расходится. Теперь сходимость можно достичь вычитая $\frac{x}{k}$ из k-го члена ряда. Это вычитание меняет разность. Посчитаем разность для $F(x)=-\ln x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\ln(1+\frac{x}{k})-\frac{x}{k})$. Разность n-го члена ряда есть

$$\left(\ln\left(1+\frac{x+1}{k}\right)-\frac{x+1}{k}\right)-\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)=$$
$$\left(\ln(x+k+1)-\ln k-\frac{x+1}{k}\right)-\left(\ln(x+k)-\ln k-\frac{x}{k}\right)=\Delta\ln(x+k)-\frac{1}{k}$$

Следовательно,

$$\Delta F(x) = -\Delta \ln x - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Delta \ln(x+k) - \frac{1}{k} \right) = \tag{3.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\Delta \ln x - \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta \ln(x+k) - \frac{1}{k} \right) \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln x - \ln(n+x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) =$$

$$\ln x + \lim_{n\to\infty} (\ln(n) - \ln(n+x)) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \ln x + \gamma$$

В результате получается следующая формула для функции телескопирующей логарифм:

$$\Theta(x) = -\gamma x - \ln x - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right) \tag{3.6}$$

Теорема 3. *Ряд* (3.6) *абсолютно сходится для всех x за исключением отрицательных целых чисел. Он представляет функцию* логамма $\Theta(x)$, *такую что* $\Theta(1) = 0$ *и* $\Delta\Theta(x) = \ln x$.

Доказательство. Неравенство $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ влечет

$$|\ln(1+x) - x| \le \left| \frac{x}{1+x} - x \right| = \left| \frac{x^2}{1+x} \right|. \tag{3.7}$$

Через ε обозначим расстояние от x до ближайшего отрицательного числа. Тогда благодаря (3.7), ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(\left(1+\frac{y}{k}\right) - \frac{y}{k}\right)$ почленно мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{\varepsilon k^2}$. Это доказывает абсолютную сходимость для (3.6).

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(1+\frac{1}{k}) - \frac{1}{k}) = \lim\limits_{n\to\infty} (\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) = -\gamma$, то $\Theta(1) = 0$. □

Выпуклые функции. Существует много функций, телескопирующих логарифм. Свойство, которое выделяет из них Θ называется *выпуклость*.

Следующая формула определяет так называемое *разностное отношение* функции f на интервале $[a, b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.8}$$

Функция f называется *выпуклой* на некотором промежутке, если для любой тройки $x < y < z$ точек этого промежутка выполнено неравенство

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \tag{3.9}$$

Выпуклость линейной функции $ax + b$ следует из того, что ее разностное отношение постоянно и равно a.

Лемма 3.2. *Сумма (даже бесконечная) выпуклых функций выпукла.*

Доказательство. Это верно потому что разностное отношение суммы функций на $[a, b]$ равно сумме разностных отношений. $\square$

Лемма 3.3 (выпуклость логарифма)**.** *Если $y > x$, то*

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y - x} \leq \frac{1}{y}$$

Доказательство. Поскольку $\ln y - \ln x = \ln(1+(y-x)/x)$, то базовые оценки логарифма превращаются в следующие

$$\frac{y-x}{x} = \frac{(y-x)/x}{1+(y-x)/x} \leq \ln y - \ln x = \ln(1+(y-x)/x) \leq \frac{y-x}{y}$$

Деление на $y - x$ дает искомые неравенства. $\square$

Характеризационная теорема. Определим *восходящую факториальную степень* $x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) = (x+k-1)^{\underline{k}}$.

Теорема 4. *$\Theta(x)$ является единственной выпуклой функцией телескопирующей $\ln x$, для которой $\Theta(1) = 1$.*

Доказательство. Выпуклость Θ вытекает из выпуклости слагаемых ряда, ее представляющего.

Пусть $f(x)$ является выпуклой функцией телескопирующей логарифм. Рассмотрим $x \in (0, 1)$ и произвольное натуральное n. Если $f(1) = 0$, то $f(n) = \ln(n-1)!$. Выпуклость f дает неравенства

$$\frac{f(-1+n) - f(n)}{-1+n-n} \leq \frac{f(x+n) - f(n)}{x+n-n} \leq \frac{f(1+n) - f(n)}{1+n-n}$$

Откуда, ввиду равенства $f(n) = \ln(n-1)!$, получается

$$\ln(n-1) \leq \frac{f(x+n) - f(n)}{x+n-n} \leq \ln n$$

Откуда получаем оценки для $f(x+n)$

$$\ln\left((n-1)^x(n-1)!\right) \leq f(x+n) \leq \ln\left(n^x(n-1)!\right)$$

Так как $f(x+n) = f(x)x(x+1)\dots(x+n-1) = f(x)x^{\overline{n}}$ получаем оценки для $f(x)$

$$\ln\left((n-1)^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}} \leq f(x+n) \leq \ln\left(n^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}}$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом n мы и в левой его части можем заменить n на $n+1$. Мы получим тогда

$$\ln\left(n^x n!\right) - \ln x^{\overline{n+1}} \leq f(x) \leq \ln\left(n^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}}$$

Разность между левой и правой частями этого неравенства составляет $\ln(x+n) - \ln n = \ln(1+\frac{x}{n})$. Мы видим, что разность стремиться к нулю. Поэтому левая и правая части имеют $\Theta(x)$ в качестве общего предела. Следовательно, $f(x) = \Theta(x)$ для x, из интервала $(0, 1)$, а потому и для всех x.

$\square$

В качестве побочного результата приведенного доказательства получается следующая формула

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}} \tag{3.10}$$

Именно с помощью этой формулы Эйлер впервые определил гамма-функцию.

Гамма функция. Эйлерова *гамма функция* $\Gamma(x)$ определяется как $\exp(\Theta(x))$, где $\Theta(x)$ — построенная выше функция, телескопирующая логарифм. Потенцирование (3.6) дает представление гамма функции в так называемой *канонической форме Вейерштрасса*:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}} \tag{3.11}$$

Так как $\Delta \ln \Gamma(x) = \ln x$, получаем следующее функциональное уравнение гамма функции, называемое *формулой понижения*:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{3.12}$$

Так как $\Theta(1) = 0$, согласно (**3**), по индукции на основе (3.12) получаем $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Неотрицательная функция f называется *логарифмически выпуклой*, если $\log f(x)$ выпукла.

Теорема 5 (характеризационная)**.** $\Gamma(x)$ *является единственной логарифмически выпуклой функцией, определенной для всех* $x > 0$, *которая удовлетворяет формуле понижения* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *и принимает в единице значение* 1.

Доказательство. Логарифмическая выпуклость $\Gamma(x)$ следует из выпуклости $\Theta(x)$. Далее $\Gamma(1) = \exp\Theta(1) = 1$. Если f является логарифмически выпуклой функцией, удовлетворяющей формуле понижения, то $\ln f$ удовлетворяет всем условиям теоремы **4**. Следовательно, $\ln f(x) = \Theta(x)$ и $f(x) = \Gamma(x)$. □

Формула удвоения Лежандра. Пусть $G(x) = \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$. Тогда $G(x+1) = \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x}{2}G(x)$. Следовательно $G(x)2^x$ удовлетворяет функциональному уравнению гамма-функции.Так как $G(x)$ логарифмически выпукла, как произведение логарифмически выпуклых функций, то из характеризационной теоремы заключаем, что $G(x)/G(1)$ совпадает с гамма функцией, то есть $\frac{G(x)2^x}{G(1)2^1} = \Gamma(x)$. Меняя x на $2x$ получаем

$$\boxed{\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x+0.5)\Gamma(x)}{\Gamma(0.5)}} \tag{3.13}$$

Формула дополнения Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x, \tag{3.14}$$

определенную для нецелых значений аргумента. Как легко видеть эта функция 1-периодична. А так как она неотрицательна на $[0, 1]$, то она неотрицательна всюду.

Запишем формулу удвоения в виде

$$\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = c2^{-x}\Gamma(x) \tag{3.15}$$

Заменив в этой формуле x на $1-x$ получим

$$\Gamma\Big(\frac{1-x}{2}\Big)\,\Gamma\Big(1-\frac{x}{2}\Big) = c2^{x-1}\Gamma(1-x) \tag{3.16}$$

и образуем произведение

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\Gamma\Big(1-\frac{x}{2}\Big)\sin\frac{\pi x}{2}\Gamma\Big(\frac{1+x}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1-x}{2}\Big)\cos\frac{\pi x}{2} = \frac{c^2}{4}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x$$

Мы получаем, таким образом соотношение

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = b\varphi(x) \tag{3.17}$$

Из функционального уравнения гамма-функции имеем

$$\varphi(x) = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\frac{\sin \pi x}{x} \tag{3.18}$$

Поэтому $\varphi(x)$ можно по непрерывности доопределить в целых точках $\varphi(n) = \pi$.

Мы хотим доказать, что $\varphi(x)$ постоянно. Из представления (3.18) в силу лемм **??** и **??** вытекает непрерывная дифференцируемость $\varphi(x)$ на $[0, 1]$. Обозначим, через $g(x)$ производную от $\ln \varphi(x)$. Тогда $g(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{1}{2}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = g(x) \tag{3.19}$$

Если $g(x)$ достигает максимального или минимального значения в точке x, то она должна принимать такое же значение в точках $x/2$ и $\frac{x+1}{2}$. Следовательно, $g(x)$ принимает в любой окрестности нуля как максимальные так и минимальные значения. Поэтому непрерывность g в нуле влечет, что максимум и минимум g совпадают. Следовательно, g постоянна. Поэтому $\ln \varphi(x)$ — линейная периодическая, а значит, постоянная функция. Значит $\varphi(x) = \pi$ при всех x. Таким образом для гамма-функции установлена справедливость следующей *формулы дополнения*

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}} \tag{3.20}$$

Вычисление произведений. Из канонической формы Вейерштрасса вытекает

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right\}=\frac{-e^{\gamma x}}{x\Gamma(-x)} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}=\frac{e^{-\gamma x}}{x\Gamma(x)} \tag{3.21}$$

Можно вычислить много произведений, расщепляя их на части, имеющие каноническую форму (3.21). Например, рассмотрим произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$. По формуле разности квадратов преобразуем его к виду $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2n})^{-1}(1+\frac{1}{2n})^{-1}$. Вводя множители $e^{\frac{1}{2n}}$ и $e^{-\frac{1}{2n}}$, получаем каноническую форму

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n}\right)e^{\frac{1}{2n}}\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)e^{-\frac{1}{2n}}\right\}^{-1} \tag{3.22}$$

Теперь мы применяем (3.21) для $x=\frac{1}{2}$. Первое произведение из (3.22) равняется $-\frac{1}{2}\Gamma(-1/2)e^{-\gamma/2}$, а второе есть $\frac{1}{2}\Gamma(1/2)e^{\gamma/2}$. Так как согласно формуле понижения $\Gamma(1/2)=-\frac{1}{2}\Gamma(-1/2)$, получаем $\Gamma(1/2)^2/2$ как значение произведения Валлиса.

Задачи.

1. Вычислить $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
2. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{2x}{n}\right)\left(1-\frac{3x}{n}\right)$
3. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$
4. Выразить через $\Gamma(x)$ произведение $\Gamma(x/3)\Gamma(x+1/3)\Gamma(x+2/3)$ и получить отсюда формулу утроения для гамма-функции.
5. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$
6. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\left(1-\frac{1}{n^3}\right)$

4 Эйлеровы интегралы.

Эйлеров интеграл второго рода $\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ представляет гамма-функцию.

Теорема 1 (Euler)**.** *Для любого $x \geq 0$ выполнено равенство* $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Убедимся, что эйлеров интеграл удовлетворяет условиям характеризационной теоремы. Для $x = 1$ интеграл дает $\int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\,|_0^\infty = 1$. Интегрирование по частям $\int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -\int\limits_0^\infty t^x\,de^{-t} = -t^x e^{-t}\,|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-t}xt^{x-1}\,dx$ доказывает, что интеграл удовлетворяет формуле понижения гамма функции. Остается доказать логарифмическую выпуклость интеграла.

Характеристика выпуклости

$$\boxed{f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}} \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. *Пусть ограниченная сверху функция $f(x)$, определенная на $[a,b]$, удовлетворяет неравенству* (4.1) *при любых $x, y \in [a,b]$. Тогда, если $f(a)$ и $f(b)$ неположительны, то $f(x) \leq 0$ для любого $x \in [a,b]$.*

Доказательство. Функция $f(ax+b)$, очевидно, удовлетворяет условию (4.1) в том и только том случае, когда ему удовлетворяла функция $f(x)$. Поэтому, не теряя общности рассуждений, можем считать, что $a = -1$ и $b = 1$. Определим отображение $s(x)$ отрезка $[-1,1]$ в себя по формуле

$$s(x) = 2x - \operatorname{sgn} x, \tag{4.2}$$

где $\operatorname{sgn} x = 1$ для $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ для $x < 0$, и $\operatorname{sgn}(x) = 0$ при $x = 0$. Тогда при любом x справедливо равенство

$$x = \frac{\operatorname{sgn}(x) + s(x)}{2} \tag{4.3}$$

Откуда вытекает, что $f(s(x)) \geq 2f(x)$ при любом x из отрезка $[-1,1]$. Поэтому $f(s^n(x)) \geq 2^n f(x)$ и ограниченность сверху последовательности $f(s^n(x))$ влечет неположительность $f(x)$. □

Теорема 2. *Ограниченная сверху функция $f(x)$, удовлетворяющая на отрезке $[a,b]$ неравенству* (4.1) *выпукла на этом отрезке.*

Доказательство. Выпуклость функции означает, что ее график лежит ниже графика любой секущей на проекции секущей на ось абсцисс. А так как разность между функцией и секущей (как и любой линейной функцией) удовлетворяет неравенству (4.1), а на концах отрезка принимает нулевые значения, то рассматриваемая функция не превосходит секущей на ее проекции в силу леммы 4.1. □

Лемма 4.2 (Неравенство Коши-Буняковского).

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \int\limits_a^b g^2(x)\,dx \tag{4.4}$$

Доказательство. Так как $\int\limits_a^b (f(x)+tg(x))^2\,dx \geq 0$ для всех t, дискриминант следующего квадратного уравнения неотрицателен:

$$t^2 \int\limits_a^b g^2(x)\,dx + 2t \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx + \int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0 \tag{4.5}$$

Этот дискриминант равен $4\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$ □

Теперь мы готовы к доказательству логарифмической выпуклости Эйлерова интеграла. Интеграл, очевидно представляет возрастающую функцию, следовательно достаточно доказать неравенство:

$$\left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{x+y}{2}-1}e^{-t}\,dt\right)^2 \leq \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \int\limits_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt \tag{4.6}$$

Это неравенство превращается в неравенство Коши-Буняковского (4.4) для $f(x) = t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}$ и $g(t) = t^{\frac{y-1}{2}}e^{-t/2}$

Бета-функция. Бета-функция — это функция двух переменных $B(x,y)$, которая определяется при $x, y > 0$ с помощью так называемого эйлерова интеграла первого рода

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{4.7}$$

Проверим, что он действительно сходится при $x, y > 0$. Достаточно убедиться в сходимости двух интегралов

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Подинтегральное выражение ≥ 0, поэтому достаточно оценить его сверху на отрезках $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ функциями $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно, для которых сходятся интегралы $\int_0^{1/2} \varphi(t)dt$ и $\int_{1/2}^1 \psi(t)dt$. Если $0 \leq t \leq 1$, то при уменьшении показателя α числа $(1-t)^\alpha$ и t^α не уменьшаются. Мы применим это соображение к тому из сомножителей в $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$, который непрерывен на соответствующем отрезке. На отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ используем, что $(1-t)^{y-1} \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{2}$, на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ — что $t^{x-1} \leq \frac{1}{t} \leq 2$. Поэтому

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq \begin{cases} 2t^{x-1} \text{ при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2t^{y-1} \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

А интегралы $\int_0^{1/2} 2t^{x-1}dt$ и $\int_{1/2}^1 2(1-t)^{y-1}dt$ сходятся.

Лемма 4.3. *Для любых положительных x, y справедливо равенство*

$$B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1), \tag{4.8}$$

Доказательство. Так как $1 = t + (1-t)$, то

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y,$$

и интегрирование по t сразу даёт (4.8). □

Лемма 4.4. *Для любых положительных x, y справедливо равенство*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1). \tag{4.9}$$

Доказательство. Интегрирование по частям дает

$$B(x+1,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 t^x d\left(-\frac{(1-t)^y}{y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{y}t^x(1-t)^y\Big|_0^1 + \frac{1}{y}\int_0^1 (1-t)^y dt^x = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \frac{x}{y}B(x,y+1).$$

□

Из (4.8) и (4.9) сразу получается, что

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y) \tag{4.10}$$

(сперва выражаем $B(x,y+1)$ в (4.8) через $B(x+1,y)$, пользуясь (4.9)).

$x+y$ в знаменателе (4.10) нарушает сходство со с формулой понижения гамма-функции. Чтобы убрать этот знаменатель, умножим $B(x,y)$ на функцию $\Gamma(x+y)$, — она как раз умножается на $x+y$ при увеличении x (а значит, и $x+y$) на 1. Мы приходим к мысли рассмотреть функцию $f(x) = B(x,y)\Gamma(x+y)$ (на её зависимость от y мы не указываем явно, так как y некоторое время будет фиксированным). Эта функция удовлетворяет формуле понижения гамма-функции. И она является логарифмически выпуклой функцией от x как произведение двух логарифмически выпуклых функций: $x \mapsto \Gamma(x+y)$ и $x \mapsto B(x,y)$. Логарифмическая выпуклость последней поверяется с помощью неравенства Коши-Буняковского. Из характеризационной теоремы получаем, что $f(x)$ может отличаться от $\Gamma(x)$ на некоторый постоянный множитель a. А так как на самом деле f зависит также и от y, то и этот множитель надо рассматривать как (пока что неизвестную) функцию от y. Мы доказали, что

$$B(x,y)\Gamma(x+y) = a(y)\Gamma(x) \tag{4.11}$$

Чтобы найти $a(y)$, положим $x = 1$. Мы знаем, что $\Gamma(1+y) = y\Gamma(y)$ и $\Gamma(1) = 1$; нам надо ещё выяснить, чему равно $B(1,y)$. Это совсем просто:

$$B(1,y) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{y-1}dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt}\frac{(1-t)^y}{y}dt = -\frac{(1-t)^y}{y}\Big|_0^1 = \frac{1}{y}.$$

Собирая всё вместе, получаем $\frac{1}{y} y\Gamma(y) = a(y)\cdot 1$, т.е. $a(y) = \Gamma(y)$. Стало быть,

$$\boxed{B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}} \tag{4.12}$$

В качестве приложения формулы 4.12 мы еще раз вычислим $\Gamma(1/2)$:

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\sin^2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}} =$$
$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \int_0^{\pi/2} 2d\varphi = \pi.$$

А из (4.12) видно, что $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)$. Поэтому

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{4.13}$$

Задачи.

1. $B(x,y) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$
2. Вычислить $\int\limits_0^1 x^p(1-x^2)^q\,dx$
3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sqrt{\sin x}\,dx$
4. $\int\limits_0^\infty \frac{t^x}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi x}$
5. $\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg}\varphi)^{2x-1}\,d\varphi = \frac{\pi}{\sin\pi x}$
6. $\int\limits_0^\infty e^{-at}t^{x-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)}{a^x}$
7. $\Gamma(x) = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}^{x-1}\right)\,dt$
8. $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{x}}}\frac{1}{x}\,dt$
9. $\Gamma(1+\frac{1}{x}) = \int\limits_0^\infty e^{-t^x}\,dt$
10. $\int\limits_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\sqrt{\pi}}{n\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)}$

11. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{32\pi}}$

12. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}\,dt = \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16\pi}}$

5 Неупорядоченные суммы и ряды Дирихле.

Жадная сумма. Определим *числовой массив* $\{a_i\}_{i\in I}$, как индексированное множество (комплексных) чисел, где в качестве индексного множества I выступает множество произвольной природы. Например, всякий числовой ряд, а также всякий двойной ряд являются числовыми массивами.

Понятие *жадной суммы* вводится для массивов, у которых при любом $\varepsilon > 0$ имеется лишь конечное число, членов по абсолютной величине это ε превосходящих. Для такого массива $\{a_i\}_{i\in I}$ при любом $\varepsilon > 0$ определена частичная сумма $\sum\limits_{|a_i|\geq\varepsilon} a_i$. И массив называется *жадно (greedy) суммируемым*, если существует предел $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum\limits_{|a_i|\geq\varepsilon} a_i$, называемый *жадной суммой* массива и обозначаемый $\sum_{i\in I} a_i$.

Всякий числовой ряд можно рассматривать как числовой массив над множеством натуральных чисел. Жадную сумму этого массива, если она существует, мы будем называть *жадной суммой* числового ряда. Любой абсолютно сходящийся числовой ряд жадно суммируем к своей обычной сумме, но для условно сходящегося ряда это можно гарантировать лишь тогда, когда члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине.

Жадное суммирование *аддитивно* по отношению к индексным множествам, то есть если $I \cap J = \varnothing$, то

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in I\cup J} a_i \tag{5.1}$$

Нелинейность жадного суммирования влечет нарушение аддитивности по отношению к разбиениям на бесконечное число множеств, то есть отсутствие *счетной аддитивности*.

Мультипликативность. Определим *прямое или декартово произведение* числовых массивов $\{a_i\}_{i\in I}$ и $\{b_j\}_{j\in J}$, как числовой массив $\{a_i b_j\}_{(i,j)\in I\times J}$.

Следующая теорема составляет основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Если массивы $\{a_i\}_{i\in I}$ и $\{b_j\}_{j\in J}$ и их прямое произведение $\{a_i b_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ жадно суммируемы, то имеет место равенство*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in J} b_j \tag{5.2}$$

Производящая функция массива Через $\mathbb{C}^+$ обозначается множество комплексных чисел вида с положительной вещественной частью $\operatorname{Re} z > 0$.

Лемма 5.1. *Если числовой массив $\{a_i\}_{i\in I}$ жадно суммируем, то при любом $z \in \mathbb{C}^+$ жадно суммируем массив $\{a_i|a_i|^z\}_{i\in I}$.*

Сформулированная лемма по существу является элементарным фактом теории обобщенных рядов Дирихле (см. [**?**]).

Рядом Дирихле называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}, \tag{5.3}$$

в котором все λ_n — *показатели ряда Дирихле* — вещественны и монотонно возрастают к бесконечности, а c_n — *коэффициенты ряда Дирихле* комплексны и $z = x + iy$ является комплексной переменной.

Лемма 5.2. *Для комплексного $z = x+iy$ и вещественных λ, μ справедливо неравенство*

$$\frac{|e^{\lambda z} - e^{\mu z}|}{|e^{\lambda x} - e^{\mu x}|} \leq \frac{|z|}{|x|} \tag{5.4}$$

Доказательство. Исходя из того, что

$$e^{\lambda z} - e^{\mu z} = z \int\limits_{\mu}^{\lambda} e^{tz} dt,$$

и имея в виду $|e^{tz}| = e^{tx}$, получаем

$$|e^{\lambda z} - e^{\mu z}| \leq |z| \int\limits_{\mu}^{\lambda} e^{tx} dt.$$

А так как последний интеграл равен $\dfrac{|e^{\lambda x} - e^{\mu x}|}{x}$, то из последнего неравенства вытекает утверждение леммы. □

Лемма 5.3. *Если частичные суммы a_k ограничены числом A, то суммы Дирихле $\sum\limits_{1}^{N} a_k e{-}\lambda_k z$ ограничена величиной $\frac{|z|}{|x|} A$*

Доказательство. Пусть $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} a_k e{-}\lambda_k z = \sum_{k=1}^{N} (A_k - A_{k-1}) e{-}\lambda_k z = \sum_{k=1}^{N-1} A_k (e{-}\lambda_k z - e{-}\lambda_{k+1} z) + A_N e{-}\lambda_N z$$

Ввиду неравенства (5.4) для суммы Дирихле получаем такую оценку

$$\left| \sum_{k=1}^{N} a_k e{-}\lambda_k z \right| \leq \frac{|z|}{|x|} A (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_N x}) + A e{-}\lambda_N z \leq \frac{|z|}{|x|} A$$

□

Из доказанных неравенств вытекает, равномерная сходимость ряда Дирихле в любом углу $|z| \leq xC$, если сходится ряд его коэффициентов. В частности, отсюда вытекает аналитичность суммы ряда Дирихле в правой полуплоскости.

Далее отсюда выводится ограничение на рост по вертикалям. А именно, если мы рассмотрим полуплоскость $\mathrm{Re}\, z > \varepsilon$, то в этой полуплоскости отношение $\frac{|z|}{|x|}$ не превосходит $\frac{|y|}{\varepsilon}$, поэтому сумма Дирихле оценивается сверху произведением константы на y. Причем эту константу можно уменьшать, если отбрасывать от ряда Дирихле первые члены. А так как каждый член ряда Дирихле ограничен на вертикалях, то отсюда выводится, что сумма ряда Дирихле имеет тип $o(y)$ при $|y| \to \infty$ (хотя хватает и $O(y)$).

Для числового массива $\{a_i\}_{i\in I}$ определим *ассоциированный ряд Дирихле* $\sum c_k e^{-\lambda_k z}$ следующим образом: $-\lambda_k$ определяется как k-ый по величине элемент множества $\{\ln|a_i| \mid i \in I\}$. В частности $-\lambda_1$ — это наибольший элемент множества $\{\ln|a_i| \mid i \in I\}$. Коэффициент c_k определяется как сумма $\sum\limits_{\ln|a_i|=-\lambda_k} a_i$.

Лемма 5.4. *Ассоциированный ряд Дирихле прямого произведения числовых массивов получается из ассоциированных рядов Дирихле этих массивов умножением по правилу Дирихле.*

Из данного определения непосредственно вытекает, что $\sum_{i\in I} a_i|a_i|^z$ совпадает со значением суммы ряда Дирихле массива $\{a_i\}$ в точке z, поэтому лемма 5.1 вытекает из следующего факта теории рядов Дирихле: для каждого ряда Дирихле существует такое вещественное число λ, называемое его *абсциссой сходимости*, что этот ряд сходится при всех z, таких что $\operatorname{Re} z > c$ и расходится при всех z, для которых $\operatorname{Re} z < c$.

Лемма 5.1 показывает, что формула

$$A(z) = \sum_{i\in I} a_i|a_i|^z \tag{5.5}$$

определяет в $\mathbb{C}^+$ функцию комплексного переменного $A(z)$, называемую *производящей функцией* числового массива, совпадающую с функцией, представленной ассоциированным с этим массивом рядом Дирихле. Так как ряд Дирихле в открытой полуплоскости сходимости равномерно сходится на компактах, то производящая функция жадно суммируемого массива аналитична и регулярна в $\mathbb{C}^+$.

В силу обобщенной леммы Абеля для рядов Дирихле справедлива следующая лемма.

Лемма 5.5. *Существует предел при* $\lim\limits_{z\to+0} A(z)$ *равный жадной сумме массива.*

В силу леммы 5.5 теорема **1** непосредственно вытекает из следующей леммы о производящих функциях:

Лемма 5.6. *Если массивы $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ и их прямое произведение жадно суммируемы, то производящая функция прямого произведения равна произведению производящих функций этих массивов.*

Заметим, что лемма 5.6 в свою очередь вытекает из теоремы **1**. Действительно, при любом z массив, жадной суммой которого выражается значение производящей функции произведения, совпадает с прямым произведением массивов соответствующих значениям производящих функций сомножителей, ввиду равенств

$$a_i|a_i|^z \cdot b_j|b_j|^z = a_ib_j|a_ib_j|^z \tag{5.6}$$

Таким образом числовая теорема мультипликативности (теорема **1**) равносильна функциональной (лемма 5.6).

Лемма 5.7. *Пусть ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n z)$ *сходится к функции* $f(z)$ *в* $\mathbb{C}^+$. *Тогда* $\frac{f(z)\exp \omega z}{z}$ *ограничено в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geq 1$ *при любом* $\omega < \lambda_1$

Доказательство. Пусть $g(z) = f(z)\exp(\omega z)$. Тогда $g(z)$ также представима рядом Дирихле. Поэтому $g(z) = o(\operatorname{Im} z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 1$ (см. [?] глава 2, параграф 1 пункт 6) и, следовательно, $\frac{g(z)}{z}$ будет ограничено в дополнении к некоторой полосе $|\operatorname{Im} z| > C$. В самой же полосе $\lim g(z) = 0$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ (см. [?] глава 2, параграф 1 пункт 3). Поэтому в этой полосе $g(z)$, а ,следовательно, и $\frac{g(z)}{z}$, будет ограничено. Получаем, что $\frac{g(z)}{z}$ ограничено во всей полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 1$. □

Следующая лемма является вариантом теоремы Фрагмена-Линделефа (см. например, [?]).

Лемма 5.8. *Пусть* $f(z)$ *аналитическая функция, регулярная в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geq 0$, *для которой при любом вещественном* ω *в* $\mathbb{C}^+$ *ограничено произведение* $f(z)\exp \omega z$. *Тогда* $f(z)$ *тождественно равна нулю.*

Доказательство. Функция $e^{z\omega} f(z)/(z+1)$ при любом положительном ω стремится к нулю при $|z| \to \infty$, откуда вытекает, что максимум ее модуля достигается на мнимой оси. С другой стороны функция $f(z)$ ограничена на мнимой оси по модулю некоторой константой C. И то же самой справедливо для $f(z)e^{\omega z}$ при любом положительном ω. Если $f(x) \neq 0$ для некоторого $x > 0$, то для достаточно большого ω будет $f(x)e^{\omega} > (1+x)C$, вопреки принципу максимума. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $A(z)$ — производящая функция Дирихле ряда $\sum a_n$, $B(z)$ — производящая функция Дирихле ряда $\sum b_n$ и $C(z)$ — производящая функция Дирихле их прямого произведения. Рассмотрим $f(z) = C(z) - A(z)B(z)$ и докажем ограниченность $\frac{f(z)\exp \omega z}{z}$ при любом вещественном ω в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$. Пусть $m(\omega)$ — наименьшее натуральное число n, для которого $\omega < \log |a_n|$ и $\omega < \log |b_n|$. Положим $E_\omega(z) = \sum\limits_{n=1}^{m(\omega)} a_n |a_n|^z$, $F_\omega(z) = \sum\limits_{n=1}^{m(\omega)} b_n |b_n|^z$, $A_\omega(z) = A(z) - E_\omega(z)$, $B_\omega(z) = B(z) - F_\omega(z)$ и $C_\omega(z) = C(z) - E_\omega(z)F_\omega(z)$. Тогда $f(z) = C_\omega(z) - F_\omega(z)B_\omega(z) - A_\omega(z)E_\omega(z) - A_\omega(z)B_\omega(z)$. Поэтому произведение $f(z)\exp \omega z$ представляется в виде суммы функций, разлагающихся в ряды Дирихле. Поэтому на основании леммы 5.7 мы сможем заключить, что отношение $\frac{f(z)\exp \omega z}{z}$ ограничено в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$. Теперь мы можем, на основании леммы 5.8 заключить, что $f(z) = 0$ всюду. □

6 Операционное исчисление

Метод Хэвисайда Английский инженер-электрик Оливер Хэвисайд придумал *символическое исчисление* , с помощью которого решал линейные дифференциальные уравнения, возникающие при расчете электрических цепей. Его метод позволяет решать неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Обозначим буквой p операцию дифференцирования $\frac{d}{dt}$. Тогда p^n будет обозначать операцию n-кратного дифференцирования $\frac{d^n}{dt^n}$. А через $\frac{1}{p}$ в таком случае логично обозначать операцию интегрирования $\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$. Так что $\frac{1}{p}\cdot 1 = t$, $\frac{1}{p^n}\cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$. В качестве примера рассмотрим решение методом Хэвисайда уравнения

$$y' - y = 1 \tag{6.1}$$

Заменяя дифференцирование умножением на p, получим $yp - y = 1$. Откуда $y = \frac{1}{p-1}$ и после формальных преобразований получаем

$$y = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right)$$

Учитывая сказанное выше относительно символов $\frac{1}{p}$ и $\frac{1}{p^n}$, находим окончательно

$$y(\tau) = \int\limits_0^\tau \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots\right) dt = \int\limits_0^\tau e^t\,dt = e^\tau - 1$$

Хэвисайд нисколько не заботился об основании применяемых им методов и иногда приходил к неверным результатам. Обоснование символического или, как его стали теперь называть, *операционного* метода было дано лишь в двадцатых годах двадцатого столетия.

Контрпример к методу Хэвисайда Полученное методом Хэвисайда решение всегда можно подставить в исходное уравнение и убедится в том, что мы не ошиблись. Поэтому можно было бы не беспокоится об обосновании метода, если бы он иногда не приводил к ошибкам. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y' + y = e^{-t} \tag{6.2}$$

Метод Хэвисайда дает

$$y = \frac{1}{1+p}e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-t},$$

тогда как настоящее решение имеет вид te^{-t}. Чтобы получить настоящее решение, впрочем, достаточно искать обратный оператор в виде ряда по отрицательным степеням p.

Метод степенных рядов Ньютон предложил искать решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ с неопределенными коэффициентами.

Например, решим этим методом уравнение

$$y' = \lambda y. \tag{6.3}$$

Если $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, то $y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$ и дифференциальное уравнение превращается в рекуррентное соотношение для коэффициентов $a_k = k\lambda a_{k-1}$, с помощью которого можно вычислять коэффициенты решения. А так как Ньютон знал разложения в степенные ряды всех элементарных функций, то по получившемуся степенному ряду он мог определить ту функцию, разложением которой ряд является.

При решении уравнений методом Ньютона удобно искать решение в *факториально-степенном* виде $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}$. В этом случае дифференцирование дает ряд того же вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{t^k}{k!}$. В частности рекуррентное уравнение для коэффициентов факториально-степенного ряда, являющегося решением уравнения (6.3) имеет вид $a_{k+1} = \lambda a_k$. Решение решение этого рекуррентного уравнения имеет вид $a_k = \lambda^k a_0$. В результате находим, что общее решение уравнения (6.3) имеет вид $c \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = ce^{\lambda t}$.

Решать рекуррентное уравнение для коэффициентов факториально-степенного ряда можно, в свою очередь, решать Эйлеровым методом производящих функций, сводящим решение задачи к алгебраическому уравнению. В результате комбинации методов Ньютона и Эйлера мы получаем, замена функции $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ на функцию $\psi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ преобразует дифференциальное уравнение в алгебраическое. Связь между собой функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно выразить с помощью интеграла следующим образом:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \int\limits_0^{\infty} t^k e^{-t}\, dt = \int\limits_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (xt)^k e^{-t}\, dt \tag{6.4}$$

Делая замену $y = xt$, получаем такое выражение:

$$\psi(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{y}{x}}\, dy \tag{6.5}$$

Откуда уже недалеко до преобразования Лапласа, которое применяется в современном операционном исчислении.

Преобразование Лапласа. Для функции $f(t)$, определенной на положительной полуоси ее преобразованием Лапласа называется функция $F(p)$, представленная *интегралом Лапласа*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Функция $f(t)$ называется *оригиналом* функции $F(p)$, а функция $F(p)$ называется *изображением* функции $f(t)$.

Функция-оригинал должна быть определена на положительной полуоси и расти не быстрее, чем $e^{\lambda t}$ для некоторого λ. То есть при достаточно большом t должно выполняться неравенство $|f(t)| \leq e^{\lambda t}$. В этом случае интеграл Лапласа сходится в случае, когда вещественная часть p больше чем λ и определяет аналитическую функцию.

Основные свойства преобразования Лапласа.

Теорема 1 (линейность)**.** *Если $f(t)$ и $g(t)$ являются оригиналами функций $F(p)$, $G(p)$ соответственно, то для любых комплексных α, β изображением для $\alpha f(t) + \beta g(t)$ является $\alpha F(p) + \beta G(p)$.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из определения ввиду линейности интеграла. □

Лемма 6.1. *Если $f(t)$ ограничена на $[a, b]$, то функция, представленная интегралом $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$, диффернцируема как функция комплексного переменного p при любом p и ее производная равна $F'(p) = -t\int_a^b f(t)e^{-pt}t\,dt$.*

Доказательство. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{F(p+\Delta p) - F(p)}{\Delta p} = \int_a^b f(t)e^{-pt}\frac{e^{t\Delta p} - 1}{\Delta p}\,dt \tag{6.6}$$

В силу формулы Тэйлора с остаточным членом для функции $e^{-t\Delta p}$ разложение по степеням Δp для некоторого $\theta \in [0, 1]$ дает равенство:

$$e^{-t\Delta p} = 1 - t\Delta p + t^2 2e^{\theta t\Delta p}\frac{(\Delta p)^2}{2} \tag{6.7}$$

Если подставить это выражение в правую часть (6.6), то подъинтегральная функция примет вид

$$-tf(t)e^{-pt} + f(t)e^{-pt} + f(t)e^{-pt}\frac{t^2}{2}e^{\theta t\Delta p}\Delta p \tag{6.8}$$

Второе слагаемое ограничено по абсолютной величине произведением Δp на некоторую не зависящую от t величину $C(p)$. Поэтому интеграл от второго слагаемого по $t \in [a, b]$ оценивается сверху величиной $|\Delta p|C(p)|b - a|$, которая стремится к нулю при $\Delta p \to 0$. Следовательно, разностное отношение из левой части (6.6) при $\Delta p \to 0$ стремится к интегралу от первого слагаемого в (6.8). □

Теорема 2 (правило дифференцирования изображения)**.** *Пусть оригинал $f(t)$ ограничен $|f(t)| < e^{-p_0 t}$ при $t > t_0$. Тогда его изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$, аналитично при $\operatorname{Re} p > p_0$ и ее производная, равна $F'(p) = -\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}t\,dt$, то есть является изображением для $-tf(t)$.*

Доказательство. Положим $F_n(p) = \int\limits_n^{n+1} f(t)e^{-pt}\,dt$. Согласно лемме 6.1 имеем $F_n' = -\int\limits_n^{n+1} f(t)e^{-pt}t\,dt$ поэтому все что нам нужно доказать — это то что производная от $F(p) = \sum\limits_{k=0}^\infty F_n(p)$ равна сумме производных $\sum\limits_{k=0}^\infty F_n'(p)$.

Для этого нам потребуется оценка сверху для $|F'(p)|$.

Во-первых, заметим, что при любом λ с положительной вещественной частью сходится рад интегралов $\sum\limits_{k=1}^\infty \int\limits_n^{n+1} te^{-\lambda t}\,dt$. Действительно,

$$\int te^{-\lambda t}dt = \lambda^{-2}e^{-t\lambda}(t\lambda+1),$$

поэтому

$$\Lambda_n = \int\limits_n^{n+1} te^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda n}\frac{1+n\lambda-n\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}}{\lambda^2} \tag{6.9}$$

Откуда видно, что предел отношения Λ_{n+1}/Λ_n равен $e^{-\lambda n}$ и сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^\infty \Lambda_k$ вытекает из признака Даламбера.

Теперь для обоснования справедливости почленного дифференцирования функционального ряда $\sum\limits_{k=0}^\infty F_k(p)$ нам в силу теоремы Вейерштрасса достаточно проверить, что сходится ряд отклонений разностных отношений $\frac{F_n(p+\Delta p)-F_n(p)}{\Delta p}$ от их пределов (равных $F_n'(p)$). По теореме Лагранжа всякое разностное отношение совпадает со значением производной $F_n'(p+\theta\Delta p)$ для некоторого $\theta \in [0,1]$. Если выбрать Δp и p_1 так чтобы $|p|-|\Delta p| > |p_1| > |p_0|$, то значения $F_n'(p+\theta\Delta p)$ при $t > t_0$ будут оцениваться по модулю сверху величиной Λ_n для $\lambda = |p_1| - |p_0|$, а их отклонения от предела удвоенной величиной. Таким образом в наших условиях мы имеем сходимость ряда отклонений и можем дифференцировать функциональный ряд почленно. □

Теорема 3 (правило дифференцирования оригинала)**.** *Если $F(p)$ является изображением Лапласа для $f(t)$, то $pF(p) - f(0)$ является изображением для $f'(t)$.*

Доказательство. Следующая выкладка доказывает правило дифференцирования оригинала:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,df(t) =$$

$$= f(t)e^{-pt}\,|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,de^{-pt} = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt - f(0)$$

□

Практические применения преобразования Лапласа. Операционный метод решения дифференциальных уравнений подобен использованию логарифмов для обычных вычислений. Роль таблицы логарифмов исполняет таблица оригиналов-изображений функций,краткий вариант которой приведен ниже.

оригинал	изображение
$t^n\ (n \geq 0)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
$t^n e^{p_0 t}$	$\frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{\omega^2+p^2}$
$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

Интеграл $\int_0^\infty t^n e^{-pt}\,dt$ заменой $pt = \tau$ сводится к Эйлерову и дает $\frac{n!}{p^{n+1}}$. Что доказывает, что, изображением t^n является $\frac{n!}{p^{n+1}}$.

Для решения дифференциального уравнения, мы заменяем операцию дифференцирования на умножение на переменную p, а неоднородные члены уравнения, представляются в виде суммы табличных оригиналов (элементов левого столбца таблицы) и заменяются на соответствующие им изображения (элементы правого столбца таблица). Далее решается возникшее алгебраическое уравнение и полученное решение представляется в виде суммы табличных изображений. После этого сумма соответствующих табличных оригиналов дает искомое решение дифференциального уравнения.

Изображение $e^{-\lambda t}$ выражается интегралом $\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-pt}\,dt$, который с помощью замены $\tau = (p+\lambda)t$ вычисляется как $\frac{1}{p+\lambda}$.

Если, в полученной выше формуле положить $\lambda = p_0$, то n-ая производная от $\frac{1}{p-p_0}$ даст $(-1)^n\frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$, которое, по правилу дифференцирования изображения будет иметь оригиналом $(-t)^n e^{p_0 t}$. Следовательно, $t^n e^{p_0 t}$ имеет изображением $\frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$.

Изображения синусов и косинусов, круговых и гиперболических, легко получить зная изображения экспоненты, с помощью формул Эйлера. Например, $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. По свойству линейности изображением косинуса будет

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

Формула обращения. Формула обращения, позволяющая восстановить по изображению $F(p)$ оригинал $f(t)$ преобразования Лапласа, выражается комплексным интегралом

$$f(t) = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \tag{6.10}$$

где интегрирование проводится по вертикальной прямой с вещественной частью c достаточно большой, для того чтобы функция $F(p)$ была определена при $\operatorname{Re} p > c$.

Лемма 6.2 (Жордана)**.** *Если* $f(z) = o(1)$ *при* $|z| \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ *и* $\lambda > 0$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0 f(z)e^{i\lambda z}dz = o(1) \tag{6.11}$$

Доказательство. Так как $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, что вытекает из выпуклости кверху $\sin\varphi$, на этом отрезке (ведь вторая производная неположительна). Отсюда получаем такое неравенство в первой четверти окружности $|z| = R$

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R \sin\varphi} \leq e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi} \tag{6.12}$$

Если обозначить через C_1 первую четверть окружности $|z| = R$, то получим такую оценку интеграла

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_1 f(z)e^{i\lambda z}dz\right| \leq M(R)R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi}\,d\varphi = M(R)\frac{\pi}{2\lambda}(1-e^{-\lambda R}), \tag{6.13}$$

где $M(R)$ представляет собой максимум модуля $f(z)$ на C_1. Интеграл по второй четверти C_2 окружности $|z| = R$ оценивается аналогично ввиду тождества $\sin(\pi - t) = \sin t$. Поэтому интеграл (6.11) оценивается по модулю сверху величиной $M(R)\dfrac{\pi}{\lambda}$, которая стремится к нулю с ростом R по условию. □

Обратное Лапласу преобразование должно делать удивительную вещь: преобразовывать аналитическую функцию в разрывную. Оно из $\frac{1}{p}$ должно делать функцию Хэвисайда.

Интегральное представление функции Хэвисайда. *Функция Хэвисайда* $\chi(t)$ является функцией вещественного переменного и определяется так:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{t>0;} \\ 1/2, & \text{t=0;} \\ 0, & \text{t<0.} \end{cases}$$

Теорема 4. *Если $c > 0$ и p вещественно, то*

$$\chi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pz}}{z} dz$$

Доказательство. Замена $t = i(c-z), z = it + c$ превращает этот интеграл в

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{p(c+it)}}{c+it} idt = ie^{pc} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipt}}{c+it} dt \tag{6.14}$$

Полагая $f(z) = \frac{1}{c+iz}$ в силу леммы Жордана и леммы 2.13, при $p > 0$ получаем, что правый интеграл в (6.14) равен

$$2\pi i \operatorname{res}_{\zeta=ic} \frac{e^{ip\zeta}}{c+i\zeta} = -2\pi \operatorname{res}_{\zeta=ic} \frac{e^{ip\zeta}}{ic-\zeta} = -2\pi e^{ip(ic)} = -2\pi e^{-pc}.$$

Если же $p < 0$, то замены $\tau = -t$, $q = -p$, приводят к интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iq\tau}}{c - i\tau} d\tau,$$

от функции не имеющей особенностей в верхней полуплоскости, который обращается в нуль в силу леммы Жордана.

Случай $p = 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} (\ln(c+iR) - \ln(c-iR)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} 2i \operatorname{arctg} \frac{R}{c} = \frac{1}{2}$$

$\square$

Зная как преобразование Лапласа действует на степени, мы можем сказать как оно действует на аналитические функции. И для нахождения обратного преобразования достаточно найти такое, которое переводит изображения степеней в сами степени. Формула обратного преобразования, называемого *преобразованием Меллина-Фурье* выглядит так.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt}\, dp \tag{6.15}$$

На функцию $\frac{n!}{p^{n+1}}$ это преобразование действует следующим образом. Поскольку выполнены условия леммы Жордана, постольку соответствующий интеграл определяется значением вычета в нуле функции $\frac{e^{tz}}{z^{n+1}}$. Эта особая точка является полюсом $(n+1)$-го порядка, и соответствующий вычет совпадает с значением n-ой от e^{tz} в нуле, деленный на $n!$, то есть как раз совпадает с t^n, если конечно $t>0$. В противном случае интеграл равен нулю.

Операционное исчисление с помощью вычетов. Если рациональная функция $F(p)$ является изображением $f(t)$, то из формулы обращения вытекает, что

$$f(t) = \sum_{p\in\mathbb{C}} \operatorname{res} F(p)e^{pt} \tag{6.16}$$

Задачи.

1. Методом Хэвисайда решить уравнение $y' - y = 2x - 3$ Задачи на расходящиеся ряды.
2. Методом Хэвисайда решить уравнение $y' - y = e^{-t}$
3. Методом Хэвисайда решить уравнение $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
4. Методом Хэвисайда решить уравнение $y' + y = e^{-2t}$; $y(0) = 2$
5. Методом Хэвисайда решить уравнение $y' + 2y = \sin t$; $y(0) = 0$
6. Методом Хэвисайда решить уравнение $y''' + y' = e^t$, $y(0) = 0 = y''(0)$, $y'(0) = 2$
7. Методом Хэвисайда решить уравнение $y'' + 2y' + y = t^2$;
8. Методом Хэвисайда решить уравнение $y' + y = e^{-t}$; $y(0) = 0$
9. Найти изображения для $e^{\lambda t}$
10. Найти изображения для $\cos \omega t$, $\sin \omega t$
11. Найти изображения для $t \cos t$, $t \sin t$
12. Найти изображение для $t^3 e^{-t}$
13. Найти изображение для $e^{3t} \sin^2 t$
14. Изображение для второй производной оригинала
15. Решить дифференциальное уравнение $x'' + 2x' + x = t$ $x(0) = x'(0) = 0$
16. Решить дифференциальное уравнение $x'' + x' = 1$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$ 518
17. Решить дифференциальное уравнение $x' + 2x = \sin t$, $x(0) = 0$ 516
18. Решить дифференциальное уравнение $x'' + 2x' + x = \sin t$, $x(0) = 0, x'(0) = -1$ 525
19. Решить дифференциальное уравнение $x''' + x' = \cos t$, $x(0) = 0, x'(0) = -2$ 548

7 Ряд Стирлинга и многочлены Бернулли.

Как вычислять гамма-функцию. Вычисление гамма функции в какой-либо точке с помощью произведения Вейерштрасса или формулы Эйлера малоэффективно, ввиду недостаточно быстрой сходимости последних. Хороший способ вычисления дает следующий *асимптотический ряд Стирлинга* для логарифма гамма-функции:

$$\ln\Gamma(x) = x\ln x - x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{B_2}{1\cdot 2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + + \frac{B_6}{5\cdot 6x^5} + \frac{B_8}{7\cdot 8x^7} + \dots,$$

коэффициенты которого B_n, так называемые числа Бернулли, будут определены ниже. Этот ряд не является сходящимся ни при каком x, но он является *обертывающим*: что означает, что ошибка вычисления полученная при замене ряда его начальным отрезком не превышает величины первого отброшенного члена.

Допустим нам нужно вычислить $\Gamma(\frac{1}{3})$ с точностью до десятого знака после запятой. Обозначим через $\mu(x)$ разность $\ln\Gamma(x) - (x\ln x - x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln 2\pi)$, тогда $\mu(x)$ представляется асимптотическим рядом $\sum \frac{B_{2k}}{(2k-1)2kx^{2k-1}}$. В частности, зная числа $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}$ получаем такое представление

$$\mu(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{\theta}{1680x^7} \tag{7.1}$$

Таким образом, если $x \geq 5$, то первые три члена приведеной выше формулы дают значение $\mu(x)$ с точностью до девятого знака после запятой. Поэтому мы можем с их помощью вычислить $\mu(5\frac{1}{3})$ и $\ln\Gamma(5\frac{1}{3})$, после чего воспользоваться формулой понижения $\ln\Gamma(\frac{1}{3}) = \ln(\Gamma(5\frac{1}{3})) - \ln(13\cdot 10\cdot 7\cdot 4) + 5\ln 3$. На заключительной стадии нам потребуется знание производной экспоненты в точке $\ln\Gamma(\frac{1}{3})$, значение которой мы получили с высокой точностью, тогда точность оценки для $\Gamma(\frac{1}{3})$ определиться умножением точности, достигнутой для $\ln\Gamma(\frac{1}{3})$, умноженной на величину этой производной.

Мотивировка $\mu(x)$. Перемножение между собой неравенств

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \tag{7.2}$$

для $k = 1, 2, \dots, n-1$ дает

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!} \tag{7.3}$$

Откуда видно, что по порядку роста гамма-функция заключена между $n^{n-1}e^{-n}$ и $n^n e^{-n}$. Это наводит на мысль рассмотреть функцию вида

$$f(x) = x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\cdot e^{\mu(x)} \tag{7.4}$$

Подходящим выбором $\mu(x)$ мы должны добиться того, чтобы $f(x)$ удовлетворяла основным свойствам гамма-функции. Заменяя в формуле 7.4 x на

$x+1$ и деля получившиеся формулы друг на друга получаем

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \frac{x}{e} e^{\mu(x+1)-\mu(x)} \tag{7.5}$$

Таким образом необходимым и достаточным условием того, чтобы $f(x)$ удовлетворяла формуле понижения является следующее

$$\Delta\mu(x) = 1 - \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = g(x) \tag{7.6}$$

Формальное решение получившейся задачи телескопирования

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(x+k) \tag{7.7}$$

представляет собой, как мы сейчас покажем, сходящийся ряд и определяет выпуклую функцию. Чтобы убедиться в последнем достаточно дважды продифференцировать формулу 7.6 и получить $g''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$, что явно положительно при $x > 0$. Поэтому $f(x)$ будет логарифмически выпуклым и совпадет с гамма-функцией в силу характеризационной теоремы. Таким образом ряд Стирлинга для логамма функции сводится к получению асимптотического разложения для $\mu(x)$.

Сходимость ряда $\mu(x)$. Исходим из ряда Грегори для логарифма

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \ldots, \tag{7.8}$$

сходящегося при $|y| < 1$. Заменим в нем y через $\frac{1}{2x+1}$. Так как $x > 0$, то условие $|y| < 1$ будет удовлетворено. Умножая обе части, получающегося равенства на $2x+1$ и перенося первый член правой части налево, мы получим:

$$1 - \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} \ldots \tag{7.9}$$

То есть мы получили в левой части $g(x)$. Для оценки $g(x)$ заменим в правой части числа $5, 7, \ldots$ через 3, чем мы только увеличим ее. Получим бесконечную геометрическую прогрессию с начальным членом $\frac{1}{3(2x+1)^2}$ и со знаменателем $\frac{1}{1(2x+1)^2}$. Ее суммой будет:

$$\frac{1}{3(2x+1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)} \tag{7.10}$$

Так как, $g(x)$ положительна, то мы получаем неравенство

$$0 < g(x) < \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)} \tag{7.11}$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} g(x+k)$ мажорируется телескопической суммой. Сумма мажорантного ряда будет $\frac{1}{12x}$, откуда получаем неравенства

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12x} \tag{7.12}$$

Таким образом нами получена формула Стирлинга

$$n! = an^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta}{12n}} \tag{7.13}$$

Значение константы можно определить с помощью формулы удвоения Лежандра.

Интегральное представление $\mu(x)$. Так как

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{t+x}\,dt = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 \tag{7.14}$$

То для ряда, представляющего $\mu(x)$ получается формула

$$\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)}{t+k+x}\,dt \tag{7.15}$$

Обозначим многочлен $x-\frac{1}{2}$ через $B_1(x)$. Этот многочлен является представителем замечательной последовательности $B_m(x)$ *многочленов Бернулли.* Обозначим фигурными скобками дробную часть числа, тогда $B_1 x$ представляет собой *периодический многочлен* Бернулли, то есть периодическую функцию (периода 1), ограничение которой на период (отрезок [0,1]) является многочленом. С помощью периодического многочлена Бернулли $B_1\{x\}$ последнее равенство может быть переписано следующим образом:

$$\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{B_1\{t\}}{t+k+x}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{B_1\{t\}}{t+x}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{B_1\{t\}}{t+x}\,dt \tag{7.16}$$

Многочлены Бернулли. Полученное выше равенство мы будем интегрировать по частям. Для этого нам нужно интегрировать периодический многочлен Бернулли. Первообразная от периодического многочлена $P\{x\}$ будет периодическим многочленом в том и только том случае, когда интеграл по периоду от $P(x)$ равен нулю. Многочлен $B_1(x)$ этому условию удовлетворяет. Поэтому первообразная от $B_1\{x\}$ является периодическим многочленом. Хотя всякая первообразная определена с точностью до аддитивной константы, существует единственная первообразная с нулевым интегралом по периоду, которая и служит для того чтобы определить периодический многочлен второй степени с производной равной $B_1\{\})$. Аналогично интегрирование полученного периодического многочлена $B_2\{\})$ позволяет однозначно определить его первообразную с нулевым интегралом по периоду. Полученные таким образом многочлены, отнормированные делением на старший коэффициент, называются *многочленами Бернулли.* Таким образом, мы видим справедливость следующей теоремы:

Теорема 1 (характеризационная). *Существует единственная последовательность многочленов $\{B_n(x)\}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

нормировка $B_0(x) = 1$,

сбалансированность $\int\limits_0^1 B_n(x)\,dx = 0$ *для* $n > 0$

правило дифференцирования $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ *для* $n > 0$

Перейдем к установлению необходимых свойств многочленов Бернулли.

Лемма 7.1 (формула дополнения)**.** $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ *для любого* n.

Доказательство. Мы докажем, что последовательность $T_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ удовлетворяет условиям теоремы **1**. Действительно, $T_0 = B_0 = 1$, $\int\limits_0^1 T_n(x)\,dx = (-1)^n \int\limits_1^0 B_n(x)\,dx = 0$ и

$$T_n(x)' = (-1)^n B_n'(1-x) = (-1)^n nB_{n-1}(1-x)(1-x)' = (-1)^{n+1} nB_{n-1}(x) = nT_{n-1}(x)$$

□

Лемма 7.2 (о корнях)**.** *Для любых нечетных* $n > 1$ *многочлен* $B_n(x)$ *имеет на* $[0,1]$ *в точности три корня:* $0, \frac{1}{2}, 1$.

Доказательство. Для нечетного n, лемма 7.1 о дополнении влечет $B_n(\frac{1}{2}) = -B_n(\frac{1}{2})$, то есть $B_n(\frac{1}{2}) = 0$. Далее, для $n > 1$ получаем $B_n(1) - B_n(0) = n0^{n-1} = 0$. Следовательно $B_n(1) = B_n(0)$ для любого многочлена Бернулли степени $n > 1$. По формуле дополнения для нечетного n получаем $B_n(0) = -B_n(1)$. Таким образом любой многочлен Бернулли нечетной степени, большей чем 1, имеет корни $0, \frac{1}{2}, 1$.

Доказательство того факта, что других корней нет, ведется от противного. Предполагая противное, рассмотрим $B_n(x)$, наименьшей нечетной степени > 1, который имеет корень α отличный от перечисленных выше. Скажем $\alpha < \frac{1}{2}$. По теореме Ролля $B_n'(x)$ имеет как минимум три корня $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ в интервале $(0,1)$. Точнее, $\beta_1 \in (0,\alpha)$, $\beta_2 \in (\alpha, \frac{1}{2})$, $\beta_3 \in (\frac{1}{2}, 1)$. Тогда $B_{n-1}(x)$ имеет такие же корни. По теореме Ролля $B_{n-1}'(x)$ имеет по меньшей мере два корня в интервале $(0,1)$. Тогда по крайней мере один из них отличается от $\frac{1}{2}$ и является корнем многочлена $B_{n-2}(x)$. В силу минимальности n заключаем $n-2=1$. Однако, $B_1(x)$ имеет единственный корень $\frac{1}{2}$. Получаем противоречие. □

Числа Бернулли. n-ое число Бернулли B_n определяется как значение n-го многочлена Бернулли в нуле.

Теорема 2. $B_n = 0$ *для любого нечетного* $n > 1$. *Для* $n = 2k$, *знак* B_n *равен* $(-1)^{k+1}$. *Для четного* n *или* $B_n = \max_{x\in[0,1]} B_n(x)$ *или* $B_n = \min_{x\in[0,1]} B_n(x)$. *Первое случается для положительных* B_n, *второе для отрицательных.*

Доказательство. $B_{2k+1} = B_{2k+1}(0) = 0$ для $k > 0$ в силу леммы 7.2. Как легко проверить, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Поэтому $B_2 = \frac{1}{6}$. Предположим, что $B_{2k} > 0$ и что это — наибольшее значение многочлена $B_{2k}(x)$ на отрезке $[0,1]$. Докажем, что тогда $B_{2k+2} < 0$ и служит наименьшим значением $B_{2k+2}(x)$ на $[0,1]$. Производная многочлена B_{2k+1} в этом случае положительна на концах отрезка $[0,1]$, значит $B_{2k+1}(x)$ положительно при $0 < x < \frac{1}{2}$ и отрицательно для $\frac{1}{2} < x < 1$, по лемме 7.2 о корнях и теореме о промежуточных значениях. Откуда $B'_{2k+2}(x) > 0$ для $x < \frac{1}{2}$ и $B'_{2k+2}(x) < 0$ для $x > \frac{1}{2}$. Следовательно, $B_{2k+2}(x)$ принимает наибольшеее значение в середине отрезка $[0,1]$ и принимает наименьшие значения на его концах. Так как интеграл от многочлена по всему отрезку равен нулю, а многочлен непостоянен, то минимальное значение многочлена отрицательно. Аналогичные рассуждения доказывают, что если B_{2k} отрицательно и минимально, то B_{2k+2} положительно и максимально. □

Интегрирование по частям. Так как $B'_m\{x\} = mB_{m-1}\{x\}$, то интегрированием по частям для натурального $m > 0$ доказывается равенство

$$\int_0^\infty \frac{B_m\{t\}}{m(t+x)^m}\,dt = \frac{B_{m+1}}{m(m+1)} + \int_0^\infty \frac{B_{m+1}\{t\}}{(m+1)(t+x)^{m+1}}\,dt \tag{7.17}$$

Применяя повторно этот прием, начиная с (7.16), с учетом равенства нулю нечетных чисел Бернулли получаем

$$\mu(x) = \frac{B_2}{1\cdot 2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + + \frac{B_6}{5\cdot 6x^5} + \cdots + \int_0^\infty \frac{B_{2m}\{t\}}{(2m)(t+x)^{2m}}\,dt \tag{7.18}$$

Из теоремы **2** вытекает, что для любого многочлен Бернулли четной степени разность $B_m - B_m(x)$ знакопостоянна на $[0,1]$, имеет такой же знак как B_m и не превосходит B_m по абсолютной величине, то есть $|B_m(t)| = \theta(t)|B_m|$, где $\theta(t) \in [0,1]$. Умножая это равенство на $\frac{1}{m(x+t)^m}$ и интегрируя по t вдоль $[0,\infty)$ получаем, что

$$\int_0^\infty \frac{|B_m\{t\}|}{m(t+x)^m}\,dt = \theta \int_0^\infty \frac{|B_m|}{m(t+x)^m}\,dx = \frac{\theta|B_m|}{mx^m},$$

для некоторого $\theta \in [0,1]$.

Что касается знака остаточного члена, то в силу (7.17),

$$\int_0^\infty \frac{B_{2m}\{t\}}{2m(t+x)^{2m}}\,dt = \int_0^\infty \frac{B_{2m+1}\{t\}}{(2m+1)(t+x)^{2m+1}}\,dt \tag{7.19}$$

И совпадение знака этих интегралов со знаком B_{2m} вытекает из следующей леммы.

Лемма 7.3. *Если $f(x)$ невозрастает на $[0,1]$, то*

$$\operatorname{sgn} \int_0^1 f(x) B_{2m+1}(x)\,dx = \operatorname{sgn} B_{2m}$$

Доказательство. Так как $B_{2m+1}(x) = -B_{2m+1}(1-x)$, замена $x \to 1-x$ преобразует интеграл $\int\limits_{0.5}^{1} f(x)B_{2m+1}(x)\,dx$ в $-\int\limits_{0}^{0.5} f(1-x)B_{2m+1}(x)\,dx$:

$$\int\limits_0^1 f(x)B_{2m+1}(x)\,dx = \int\limits_0^{0.5} f(x)B_{2m+1}(x)\,dx + \int\limits_{0.5}^{1} f(x)B_{2m+1}(x)\,dx = \int\limits_0^{0.5} (f(x) - f(1-x))B_{2m+1}(x)\,dx \tag{7.20}$$

$B_{2m+1}(x)$ равен нулю на концах отрезка $[0, 0.5]$ и имеет постоянный знак на $(0, 0.5)$, следовательно его знак на интервале совпадает со знаком его производной в 0, то есть, совпадает с $\operatorname{sgn} B_{2m}$. Разность $f(x) - f(1-x)$ неотрицательна, так как $x < 1-x$ для $x \in (0, 0.5)$. Следовательно подъинтегральная функция в (7.20) знакопостоянна. Следовательно и сам интеграл имеет тот же знак. □

Тем самым доказано, что ряд Стирлинга является обертывающим.