Лекции по анализу в СУНЦ.
Ряды.

Е. В. Щепин

сентябрь–декабрь 2010 года

Оглавление

1 Формальное суммирование

Бесконечность является главным действующим лицом математического анализа. Характеристическим свойством бесконечного является то, что оно может быть равно своей части. Например, рассмотрим такое бесконечное выражение:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

Мы видим, что знаменатель дроби в точности равен всему выражению, поэтому, если значение всего выражения обозначить через x, то мы получаем следующее уравнение на x

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Это уравнение имеет два решения, лишь одно из которых положительно и равно $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Поэтому естественно предположить, что значением этого выражения является именно $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Рядом называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения. Например, следующий ряд, *обратных квадратов*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots \tag{1.1}$$

содержит все дроби вида $\frac{1}{k^2}$, где k — любое натуральное число. Для сокращенной записи ряда применяется знак суммы $\sum$. В сокращенной записи ряд обратных квадратов выглядит так

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Знак $\sum$ используется и для записи конечных сумм. Общая форма записи суммы с помощью этого знака такова:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{m-1} + a_m \tag{1.2}$$

Здесь через a_k обозначается k-ое слагаемое ($a_k = \frac{1}{k^2}$ для 1.1) так называемый *общий член ряда.* Через m и n обозначаются *пределы суммирования* (нижний и верхний соответственно). В качестве нижнего предела суммирования для рядов будут применяться в основном единица и реже ноль, а в качестве верхнего предела — в основном бесконечность. Наконец, k играет роль *индекса суммирования.* Если вместо k подставить любую другую букву это не изменит значения суммы. Для знающих программирование индекс суммирования — это счетчик цикла, значение которого за пределами цикла (суммы) неопределено.

Суммирование бесконечного числового ряда является одной из классических задач математического анализа. Так задача суммирования ряда (1.1) была в начале восемнадцатаго столетия одной из самых известных проблем, которую пытались решить многие выдающиеся математики. В 1828 году она была решена великим математиком Леонардом Эйлером, который доказал, что сумма ряда обратных квадратов равна $\pi^2/6$. Позднее мы узнаем, как он получил этот весьма непростой результат.

Эйлер считал, что любой числовой ряд имеет "сумму". И в сегодняшней лекции мы покажем как можно находить суммы бесконечных рядов, предполагая, что на бесконечные суммы распространяются основные арифметические законы такие как ассоциативность сложения и дистрибутивность умножения относительно сложения.

Авторекурсия. Сегодня мы научимся суммировать бесконечные ряды не давая определения их суммы, а руководствуясь тремя естественными правилами, которые мы будем предполагать выполненными для любых рядов.

Чтобы найти сумму ряда мы будем строить уравнение, которому она удовлетворяет. Мы назовем этот метод *авторекурсией*. "Рекурсия" значит "возврат к известному". "Авторекурсия" значит "возврат к самому себе".

Мы будем называть следующее равенство *формулой рекурсии*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \tag{1.3}$$

Другая основная формула, которую мы используем при авторекурсии называется *формула умножения*:

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \tag{1.4}$$

Эти две формулы — все что нам нужно для нахождения суммы геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Точнее, формула умножения дает равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = q \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Следовательно, формула рекурсии превращается в уравнение $x = 1 + qx$, где x есть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Решение этого уравнения снова дает нам формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \tag{1.5}$$

Из формулы для бесконечной можно вывести формулу для конечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{1.6}$$

Эта важная формула относится к школьной программе.

Пример Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$. Чтобы найти методом авторекурсии сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ мы должны применить дополнительно следующую *формулу сложе-*

ния,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_k, \tag{1.7}$$

которая является последней в сегодняшней лекции общей формулой для рядов.

Переиндексирование ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ дает ему вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^{k+1}}$. Далее с помощью формулы сложения он разлагается на две части:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

Первое слагаемое представляет собой умноженный на x исходный ряд. Второе — геометрическая геометрическая прогрессия, сумма которой нам известна. Теперь формула рекурсии для суммы s исходного ряда превращается в уравнение $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}$, решением которого служит $s=2$.

Числа Фиббоначчи. Начиная с $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$ и применяя рекуррентное соотношение

$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\varphi_{n-1}, \tag{1.8}$$

можно построить бесконечную последовательность чисел $0,1,2,3,5,8,13,21,\dots$, называемых *числами Фиббоначчи.* Сейчас мы получим формулу для φ_n.

Чтобы это сделать рассмотрим следующую функцию $\Phi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k x^k$, называемую *производящей функцией* последовательности $\{\varphi_k\}$. Так как $\varphi_0=0$, сумма $\Phi(x)+x\Phi(x)$ преобразуется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k x^k+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k+1}x^k=\frac{\Phi(x)-x}{x} \tag{1.9}$$

Умножая обе стороны уравнения на x и собирая члены с $\Phi(x)$ справа, получаем $x=\Phi(x)-x\Phi(x)-x^2\Phi(x)=x$. Это дает

$$\Phi(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

Корни уравнения $1-x-x^2=0$ суть $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Более знаменита пара обратных величин $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Число $\varphi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ есть так называемое *золотое сечение.* Оно играет важную роль в математике, архитектуре и биологии. Двойственным к нему является $\hat{\varphi}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Так что $\varphi\hat{\varphi}=-1$, и $\varphi+\hat{\varphi}=1$. Следовательно, $(1-x\varphi)(1-x\hat{\varphi})=1-x-x^2$, что в свою очередь ведет к следующему разложению:

$$\frac{x}{x^2+x-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi x}-\frac{1}{1-\hat{\varphi}x}\right)$$

Дроби справа разлагаются в геометрические ряды:

$$\frac{1}{1-\varphi x}=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^k x^k \qquad \frac{1}{1-\hat{\varphi}x}=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\varphi}^k x^k \tag{1.10}$$

Это дает следующее представление для производящей функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi^k - \hat{\varphi}^k) x^k$$

С другой стороны коэффициенты при x^k в исходном представлении для $\Phi(x)$ суть φ_k. Следовательно,

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - \hat{\varphi}^k) = \frac{(\sqrt{5}+1)^k + (-1)^k(\sqrt{5}-1)^k}{2^k\sqrt{5}} \tag{1.11}$$

Эта формула была впервые открыта Эйлером, но стала широко известной только после переоткрытия ее спустя столетие Бине, и называется формулой *Эйлера-Бине*. Ее легко проверить для малых k и доказать по индукции, на основе рекуррентного соотношения.

Парадоксы формального суммирования. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k$. Это геометрический ряд. Мы умеем суммировать его методом авторекурсии. Уравнение авторекурсии для этого ряда имеет вид $s = 1+2s$. Единственное число, удовлетворяющее этому уравнению — это -1. Сумма положительных чисел оказывается отрицательной!? Что-то не так!

Философ Гвидо Гранди в 1703 привлек внимание публики к ряду $1-1+1-1+\dots$. Он утверждал, что этот ряд символизирует создание вселенной из ничего. А именно, расстановка в нем скобок одним способом дает Ничто (то есть 0), другим способом дает 1.

$$\begin{gathered}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0\\ 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)\dots = 1-0-0-0\dots = 1.\end{gathered}$$

С другой стороны, ряд $1-1+1-1+1-1+\dots$ является геометрической прогрессией с отрицательным знаменателем $q=-1$. Его уравнение авторекурсии $s = 1-s$ имеет единственное решение $s=\frac{1}{2}$. Ни $+\infty$ ни $-\infty$ не удовлетворяют этому уравнению. Поэтому $\frac{1}{2}$ представляется его истинной суммой. Мы видим, что сумма бесконечного числа целых чисел может быть нецелой.

Рассуждение Гранди опровергает закон ассоциативности для бесконечных рядов: расстановка скобок может менять сумму ряда $1-1+1-1+\dots$. Следующей жертвой этого ряда является закон коммутативности. Сумма $-1+1-1+1-1+\dots$ равна $-\frac{1}{2}$. Но, последний ряд получается из $1-1+1-1+\dots$ посредством перестановки четных и нечетных членов.

И еще одна неожиданность: разбавление ряда нулями может изменить его сумму. Сумма $1+0-1+1+0-1+1+0-1+\dots$ не равна $\frac{1}{2}$, она равна $\frac{2}{3}$. Действительно, если мы обозначим эту сумму через s, то формула рекурсии дает:

$$\begin{aligned} s &= 1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+\dots\\ s-1 &= 0-1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+\dots\\ s-1-0 &= -1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+0+\dots\end{aligned}$$

Суммируя числа по столбцам (т. е. с помощью формулы почленного сложения рядов), мы получим

$$s + (s-1) + (s-1-0) = (1+0-1) + (0-1+1) + (-1+1+0)+ \\ + (1+0-1) + (0-1+1) + (-1+1+0) + \ldots$$

Слева стоит $3s-2$. Справа — нулевой ряд. Вот почему $s = \frac{2}{3}$.

Задачи.

1. Суммировать $\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^2}{3^2} + \dots$
2. Суммировать $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots$
3. Суммировать $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
4. Суммировать $1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + \dots$
5. Найти $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$
6. Найти $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$
7. Найти $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 3^k$
8. Найти $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots$
9. * Найти $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k x^k$, где f_k - числа Фиббоначчи
10. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{x+2}$
11. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{1-x^2}$
12. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{x^2+1/2}$
13. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{a+x}$
14. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{(x-1)(x-3)}$
15. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{1-x-x^2}$
16. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{(1-x)^2}$
17. * Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{(1-x)^5}$

2 Положительные ряды

Определение бесконечной суммы. Во всех парадоксах, связанных с расходящимися рядами участвуют отрицательные числа. Поэтому мы начнем построение непротиворечивой теории сходящихся бесконечных рядов с *положительных рядов* — так мы будем называть ряды, все члены которых неотрицательны.

Один из замечательных результатов Эйлера заключается в доказательстве следующего равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.1}$$

Что же означает это равенство? Естественный ответ таков: *частичные суммы* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, которые содержат все больше и больше обратных квадратов, приближаются все ближе и ближе к величине $\frac{\pi^2}{6}$. В частности все частичные суммы меньше чем $\frac{\pi^2}{6}$, его *полная сумма.* Действительно, если бы некоторая частичная сумма превзошла или совпала с $\frac{\pi^2}{6}$, тогда все последующие суммы удалялись бы от $\frac{\pi^2}{6}$. Далее, любое число c, которое меньше чем $\frac{\pi^2}{6}$ должно быть в конце концов превзойдено частичными суммами, когда они приблизятся к $\frac{\pi^2}{6}$ ближе, чем на $\frac{\pi^2}{6} - c$. Следовательно полная сумма превосходит все частичные суммы и никакое меньшее число не делает этого. Это значит, что *полная сумма есть наименьшее число, превосходящее все частичные суммы.*

Геометрическая мотивировка. Представим последовательность отрезков вещественной прямой $[a_{i-1}, a_i)$. Обозначим через l_i длину i-го отрезка. Пусть $a_0 = 0$ есть левый конец первого интервала. Тогда объединение этих отрезков представляет собой полуинтервал $[0, A)$, длина которого (равная A) естественно интерпретируется как $\sum\limits_{i=1}^{\infty} l_i$ сумма длин интервалов последовательности.

Все вышесказанное мотивирует следующее определение.

Определение. *Если частичные суммы положительного ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *неограниченно возрастают, то его сумма определяется как* ∞ *и ряд называется* расходящимся. *В противном случае ряд называется* сходящимся, *и его сумма определяется как наименьшее число* A*, для которого* $A \geq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *при всех* n.

Тогда определение суммы ряда равносильно следующей паре свойств.

Частичная сумма положительного ряда не превосходит полной *(часть меньше целого)*.

Частичные суммы положительного ряда *исчерпывают* его полную сумму, то есть они превосходят любое число, меньшее полной суммы.

При доказательствах свойств бесконечных сумм мы часто будем использовать следующую теорему, непосредственно вытекающую из определения полной суммы.

Теорема 1 (принцип ограничения). *Если все частичные суммы положительного ряда не превосходят некоторого числа, то и полная сумма не превосходит этого числа.*

Основные операции с рядами. Исходя из данного выше определения, мы можем теперь доказать справедливость, использованных ранее правил обращения с бесконечными рядами для положительных рядов.

Теорема 2 (Формула рекурсии.). *Если сходится хотя бы один из рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$*, то сходится и другой и имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \tag{2.2}$$

Доказательство. Если сходится $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы ряда $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ ограничены тем же числом, поэтому он тоже сходится.

Если сходится $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничены числом $A + a_1$, поэтому он тоже сходится.

Для того, чтобы доказать, что левая часть не превосходит правой, в силу принципа ограничения достаточно при любом n доказать неравенство $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k$. Справедливость этого легко получить из неравенств $\sum_{k=2}^{\infty} a_k > \sum_{k=2}^{n} a_k$.

Для доказательства обратного неравенства перенесем a_1 в левую часть. Получим эквивалентное неравенство $\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_1$, справедливость которого, в силу принципа ограничения вытекает из следующего $\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_1$. Последнее же верно ввиду неравенства $\sum_{k=2}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=2}^{n} a_k$. □

Теорема 3 (Формула умножения.). *Пусть* λ *является положительным числом, тогда если сходится хотя бы один из рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$*, то сходится и другой и имеет место равенство*

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \tag{2.3}$$

Доказательство. Если сходится $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$ ограничены числом λA, поэтому он тоже сходится.

Если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничены числом A/λ, поэтому он тоже сходится.

Для любой частичной суммы правой части (**??**), в силу дистрибутивности умножения для конечных сумм будет

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2.4}$$

А так как частичная сумма не превосходит полной и $\lambda > 0$, то получаем $\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, откуда ввиду (2.4), при любом n получаем неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу принципа ограничения отсюда вытекает, неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Противоположное неравенство равносильно следующему $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \geq \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$. Так как любая частичная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ равна $\frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k$, которая не превосходит $\frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$, в силу принципа ограничения получаем противоположное неравенство. □

Теорема 4 (Формула сложения.). *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ сходится в том и только том случае, когда сходятся оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. И в этом случае имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) \tag{2.5}$$

Доказательство. Если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ограничены тем же числом, поэтому они тоже сходится.

Если сходятся оба $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и их частичные суммы ограничены числами A и B, соответственно, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ ограничены числом $A + B$, поэтому он тоже сходится.

Далее, легко доказать, что левая часть не уступает правой. Для этого в силу принципа ограничения, достаточно доказать, что левая часть мажорирует частичные суммы правой. Это так ввиду очевидной цепочки неравенств:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \leq sk1 + a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

.

Для доказательства обратного неравенства мы рассмотрим равносильное
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
В силу принципа ограничения для доказательства последнего достаточно убедиться в неравенствах

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

для частичных сумм. Перепишем последнее в такой форме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Но в силу того же принципа ограничения, последнее неравенство является следствием неравенств для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

В справедливости которых, после переноса $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ в левую часть, нетрудно убедиться с помощью следующей цепочки неравенств

$$\sum_{k=1}^{m} b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{m+n}(a_k + b_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$$

$\square$

Геометрический ряд. Вернемся к рассмотрению геометрического ряда. Уравнение авторекурсии, основанное на правиле рекурсии и правиле умножения ничего не говорит о сходимости ряда. Поэтому мы должны доказать сходимость для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ при положительном $q < 1$. Для этого достаточно доказать при любом n неравенство

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n < \frac{1}{1-q}\,.$$

Умножая обе части на $1 - q$ слева получаем

$$\begin{aligned}(1-q) + (q-q^2) + (q^2-q^3) + \cdots + (q^{n-1}-q^n) + (q^n - q^{n+1}) = \\ 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + q^3 - \cdots - q^n + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}\end{aligned}$$

и мы получаем 1 справа. Неравенство $1 - q^{n+1} < 1$ очевидно. Итак, сходимость доказана. Теперь уравнение авторекурсии $x = 1 + qx$ для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$

строится обычным путем с помощью правил рекурсии и почленного умножения. Оно оставляет для суммы $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ только две возможности, или $\frac{1}{q-1}$ или ∞. Для $q < 1$ сходимость доказана, а для $q \geq 1$ правильным ответом будет бесконечность.

Обратим специальное внимание на случай $q = 0$. Мы принимаем общепринятое соглашение:

$$0^0 = 1. \tag{2.6}$$

Это значит, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 0^k$ удовлетворяет общей формуле для сходящейся геометрической прогрессии $\sum_{k=0}^{\infty} 0^k = \frac{1}{1-0} = 1$.

Наконец мы формулируем теорему, которая по существу принадлежит Евдоксу, доказавшему сходимость геометрического ряда со знаменателем $q < 1$.

Теорема 5 (Евдокс)**.** *Для любого положительного q справедливо*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \textit{для } q < 1, \quad \textit{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty \quad \textit{для } q \geq 1.$$

Сравнение рядов Нередко точное суммирование рядов слишком трудно, и для практических целей достаточно знать сумму приблизительно. В этом случае обычно сравнивают рассматриваемый ряд с уже известным. Такое сравнение основано на следующем *Принципе сложения неравенств*, который немедленно следует из определения суммы.

(Сложение неравенств)**.** *Если $a_k \leq b_k$ для всех k, то* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Для сравнения рядов с геометрическим очень полезна следующая лемма Даламбера.

Лемма 2.1 (признак Даламбера)**.** *Если $a_{k+1} \leq qa_k$ для некоторого $q < 1$ и всех членов ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, то $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \frac{a_0}{1-q}$*

Доказательство. По индукции доказывается неравенство $a_k \leq a_0 q^k$. И сложение неравенств позволяет оценить $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сверху суммой геометрического ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$ □

Например, докажем с помощью признака Даламбера сходимость ряда обратных факториалов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Отношение соседних членов ряда обратных факториалов равно $\frac{1}{n}$ и, в частности, меньше чем $\frac{1}{2}$, откуда немедленно вытекает его сходимость.

Этот же тест позволяет доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k2^{-k}$. Отношение последующих членов $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ равно $\frac{k+1}{2k}$. Это отношение не превосходит

$\frac{2}{3}$ начиная с $k = 3$. Следовательно ряд, в конце концов мажорируется геометрическим рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_3 \frac{2^k}{3^k}$, $(a_3 = \frac{2}{3})$. Это доказывает его сходимость и уравнение авторекурсии позволяет найти сумму.

Символ бесконечность. Если частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ неограниченно возрастают, то ряд называется расходящимся и его сумма считается бесконечной. Записывается это $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$. Введение символа бесконечность позволяет сократить формулировки теорем об основных операциях с рядами убрав из них условие сходимости, если договориться о следующих правилах оперирования с символом бесконечность.

1. $\infty + x = \infty$ при любом x, конечном и бесконечном
2. $x \cdot \infty = \infty$ при любом положительном x (конечном или бесконечном)
3. $\infty - x = \infty$ при любом конечном x

Тождество двух рядов мы будем называть *безусловным*, если оно выполнено как для сходящихся, так и для расходящихся рядов. Так безусловными тождествами являются все три доказанные выше формулы: рекурсии, умножения и сложения.

Приняв такие соглашения, мы можем оперировать с бесконечностью как с обычным числом, но у бесконечности есть одна особенность: никак нельзя вычитать бесконечность из бесконечности. Результатом такой операции считается неопределенность. Если в ваших вычислениях встретилась такая операция вы сможете получить все что угодно.

Введение символа бесконечность позволяет спасти метод авторекурсии в случае расходящихся рядов. Например, для суммы расходящегося ряда $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$ уравнение авторекурсии выглядит так:

$$s = 1 + 2s$$

у этого уравнения, с появлением символа ∞ появляется решение $s = \infty$, которое в случае положительного ряда и следует трактовать как единственно верное.

Парадокс гармонического ряда. Теперь мы имеем прочные теоретические основы для вычислений с положительными рядами. Дополним три доказанных выше правила обращения с рядами еще одним *правилом вычитания.*

Теорема 6. *Если при любом k справедливо неравенство $a_k > b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$$

Доказательство. Требуемое равенство добавлением к обеим частям суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ превращается в равносильное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k),$$

справедливость которого вытекает из правила почленного сложения рядов. □

Рассмотрим следующее вычисление:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}$$

Мы получаем, что сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ удовлетворяет уравнению $s = \frac{s}{2}$. Это уравнение имеет два корня: 0 и ∞. Но s, как нетрудно понять, удовлетворяет неравенствам $\frac{1}{2} < s < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Где ошибка?

Рассмотренный выше парадокс обусловлен расходимостью гармонического ряда. Ввиду этой расходимости не выполнены условия теоремы о почленном вычитании и приведенное рассуждение по сути является строгим доказательством расходимости гармонического ряда.

Задачи.

1. Доказать что если $a_k \leq b_k$ для любого k, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

2. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} < 2$

3. Сравнить $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ и 1.9

4. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} < 8$

5. Найти целую часть от $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

6. Доказать неравенства $\frac{1}{n+1} < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n}$

7. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \infty$

8. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} < \infty$

9. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1000}}{1.1^k} < \infty$

3 Неупорядоченные суммы.

Не всегда числа, которые подлежат суммированию, имеют структуру ряда, то есть образуют последовательность. Приходится также суммировать числа заполняющие бесконечные таблицы (двойные ряды) и более сложные структуры. Так (прямое) произведение двух числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ имеет структуру *двойного ряда* $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} a_j b_k$, а прямое произведение двойного ряда на обычный имеет структуру тройного ряда и т.д. Элементы двойного ряда индексируется парами натуральных чисел, тройного — тройками и т.д. Иногда рассматриваются ряды индексированные целыми числами,как положительными, так и отрицательными. Чтобы развить теорию включающую в себя все перечисленные возможности вводится общее понятие *числового массива* как индексированного множества чисел $\{a_i\}_{i\in I}$ с индексным множеством I произвольной природы.

Сумма неупорядоченного массива. Рассмотрим массив $\{a_i\}_{i\in I}$ неотрицательных чисел, индексированный элементами произвольного множества I.

Любая сумма типа $\sum\limits_{i\in I'} a_i$, где I' — конечное подмножество в I называется *частичной* суммой массива $\{a_i\}_{i\in I}$ по K.

Определение. *Наименьшее число, мажорирующее все частичные суммы массива $\{a_i\}_{i\in I}$ называется его (полной) суммой и обозначается $\sum\limits_{i\in I} a_i$*

Принципы ограничения и "часть меньше целого"для массивов формулируются для неупорядоченных сумм точно также как для рядов.

Коммутативность. В случае $I = \mathbb{N}$ мы, на первый взгляд, получили новое определение суммы. Но, к счастью, это определение равносильно прежнему. Действительно, любая неупорядоченная частичная сумма положительного ряда, очевидно, не превосходит полной (упорядоченной) суммы, неупорядоченная сумма поэтому также не превосходит ее. С другой стороны, любая упорядоченная частичная сумма может рассматриваться и как неупорядоченная частичная сумма. Это влечет противоположное неравенство. Следовательно мы установили равенство.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$$

Это означает, что положительные ряды подчиняются закону коммутативности сложения. Потому что неупорядоченная сумма, очевидно, не зависит от порядка слагаемых.

Формула объединения сумм. Пусть дано семейство попарно непересекающихся $I_k \cap I_j = \varnothing$ подмножеств $\{I_k\}_{k\in K}$ множества I, объединение которых дает все $I = \bigcup_{k\in K} I_k$. Такое семейство называется *разбиением* множества I и записывается $\bigsqcup_{k\in K} I_k$.

Для любого разбиения $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ индексного множества $\{a_i\}_{i\in I}$ неотрицательных чисел имеет место равенство

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{3.1}$$

Доказательство этого равенства начнем со случая объединения двух сумм, то есть для случая, когда J содержит два элемента. В этом случае доказательство буквально повторяет доказательство формулы сложения для рядов. После этого доказательство формулы для конечного J доказывается индукцией по числу его элементов.

Справедливость формулы (8.11) в общем случае состоит из доказательства пары неравенств. То что левая часть (8.11) не превосходит правую, в силу принципа ограничения, вытекает из неравенств

$$\sum_{i\in I'} a_i = \sum_{j\in J'}\sum_{i\in I'_j} a_i \leq \sum_{j\in J'}\sum_{i\in I_j} a_i \leq \sum_{j\in J}\sum_{i\in I'_j} a_i, \tag{3.2}$$

где I' является произвольным конечным подмножеством в I, J' — обозначает конечное множество тех $j \in J$, для которых непусто $S'_j = S_j \cup I'$. Оба неравенство в (3.2) следуют из принципа "часть меньше целого применяемого сначала к внутренним суммам (по S_j), а потом к внешней сумме (по J).

Справедливость противоположного неравенства, в силу принципа огрпничения, вытекает из неравенств для частичных сумм

$$\sum_{j\in J'}\sum_{i\in I_j} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i \tag{3.3}$$

Но для конечного J' справедливость формулы объединения уже была установлена выше, поэтому, левая часть в (3.3) равна $\sum\limits_{i\in I'} a_i$, где $I' = \bigcup_{j\in J'} I_j$ и неравенство (3.3), а вместе с ним и неравенство (**??**) вытекают из следующего очевидного неравенства

$$\sum_{i\in I'} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i, \tag{3.4}$$

справедливого при любом (в том числе бесконечном) подмножестве $I' \subset I$.

Абсолютное суммирование Для любого вещественного числа x определим два неотрицательных числа его *положительную* x^+ и *отрицательную* x^- *части* как

$$x^+ = \frac{x+|x|}{2} \qquad \text{и} \qquad x^- = \frac{|x|-x}{2}.$$

Следующие тождества характеризуют положительную и отрицательную части x

$$x^+ + x^- = |x| \qquad x^+ - x^- = x \tag{3.5}$$

Числовой массив $\{a_i\}_{i\in I}$ называется *абсолютно суммируемым*, если

$$\sum_{i\in I}\{a_i\}_{i\in I}|a_i| < \infty.$$

Вся теория суммирования, развитая выше для положительных массивов, без изменений распространяется на абсолютно суммируемые массивы, если определить сумму последнего следующим равенством:

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- \tag{3.6}$$

Иными словами из суммы всех положительных слагаемых вычитается сумма модулей отрицательных слагаемых. (массивы в правой части суммируемы ввиду неравенств $a_i^+ \leq |a_i|$, $a_i^- \leq |a_i|$ и условия абсолютной суммируемости $\{a_i\}_{i\in I}$).

Лемма 3.1. *Если массивы $\{a_i\}_{i\in I}$ и $\{b_i\}_{i\in I}$ абсолютно суммируемы, то абсолютно суммируем также и массив их разностей и имеет место равенство*

$$\sum_{i\in I}(a_i - b_i) = \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in I} b_i \tag{3.7}$$

Доказательство. Суммирование неравенств $|a_i - b_i| \leq |a_i| + |b_i|$ доказывает абсолютная суммируемость массива разностей. Представляя все суммы в (3.7) в виде разностей положительных и отрицательных частей, получаем равносильное равенство

$$\sum_{i\in I}(a_i - b_i)^+ - \sum_{i\in I}(a_i - b_i)^- = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- - \sum_{i\in I} b_i^+ + \sum_{i\in I} b_i^- \tag{3.8}$$

После переносов сумм с минусами в противоположные части преобразуем равенство (3.8) к виду

$$\sum_{i\in I}(a_i - b_i)^+ + \sum_{i\in I} a_i^- + \sum_{i\in I} b_i^+ = \sum_{i\in I}(a_i - b_i)^- + \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} b_i^- \tag{3.9}$$

Так как все массивы положительны возможно почленное сложение массивов как в левой, так и в правой частях последнего равенства. В результате получаем равносильное равенство

$$\sum_{i\in I}((a_i - b_i)^+ + a_i^- + b_i^+) = \sum_{i\in I}((a_i - b_i)^- + a_i^+ b_i^-) \tag{3.10}$$

Но это равенство верно в силу следующего тождества,

$$(x - y)^+ + x^- + y^+ = x^+ + y^- + (x - y)^-,$$

Справедливость которого доказывается переносами слагаемых между частями:

$$(x - y)^+ - (x + y)^- = (x^+ - x^-) - (y^+ - y^-),$$

что верно в силу тождества $x^+ - +x^- = x$. $\square$

Теперь мы докажем, что правило объединения сумм остается справедливым для абсолютно суммируемых массивов.

Теорема 1. *Для любого абсолютно суммируемого числового массива* $\{a_i\}_{i\in I}$ *и любого разбиения множества индексов* $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ *имеет место равенство*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{3.11}$$

так что при любом $j \in J$ *абсолютно суммируем массив* $\{a_i\}_{i\in I_j}$, *абсолютно суммируемым является массив сумм* $\{\sum\limits_{i\in I_j} a_i\}_{j\in J}$ *и абсолютная суммируемость левой части, в свою очередь, вытекает из этих условий.*

Доказательство. Во-первых заметим, что абсолютная суммируемость массивов в правой части в левой частях вытекает из тождества (8.11) для массива модулей $|a_i|$.

Для положительных и отрицательных частей чисел правило объединения сумм справедливо, поэтому имеем равенства:

$$\sum_{i\in I} a_i^+ = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^+ \tag{3.12}$$

$$\sum_{i\in I} a_i^- = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^- \tag{3.13}$$

Вычитание нижнего неравенства из верхнего дает в левой части $\sum\limits_{i\in I} a_i$, а разность правых частей, двукратным применением леммы о разности сумм преобразуется в $\sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{i\in I_j}$:

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^- = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{i\in I_j} a_i^-\right) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}(a_i^+ - a_i^-)$$

□

Теорема умножения Для абсолютно суммируемого массива, абсолютно суммируем массив его произведений на фиксированное число и имеет место равенство

$$\alpha\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I}\alpha a_i \tag{3.14}$$

Если $\alpha > 0$, то $(\alpha x)^+ = \alpha x^+$ и $(\alpha x)^- = \alpha x^-$, откуда немедленно вытекает справедливость формулы для положительных α. Для любых ее справедливость вытекает из леммы о разности.

Формула прямого произведения *Прямым произведением* числовых массивов $\sum\limits_{i\in I} a_i$ и $\sum\limits_{j\in J} b_j$ называется массив $\sum\limits_{i,j\in I\times J} a_i b_j$.

Теорема 2. *Для любых абсолютно суммируемых числовых массивов их прямое произведение абсолютно суммируемо и выполнено равенство*

$$\sum_{i,j\in I\times J} a_i b_j = \sum_{j\in J} b_j \sum_{i\in I} a_i \tag{3.15}$$

Доказательство. Двойная сумма $\sum\limits_{i,j\in I\times J} a_i b_j$, в силу теоремы об объединении сумм, равна повторной сумме

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j$$

Поскольку во внутренней сумме множитель a_i не зависит от индекса суммирования, постольку его можно вынести за знак внутренней суммы и получить

$$\sum_{i,j\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I}\left(a_i \sum_{j\in J} b_j\right)$$

Теперь заметим, что внутренняя сумма не зависит от индекса суммирования внешней суммы и потому может быть вынесена за пределы внешней суммы, как постоянный множитель. В итоге получаем формулу умножения из формулировки теоремы. $\square$

Задачи.

1. Вычислить $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{2^i 3^j}$
2. Вычислить $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \frac{i}{2^i 3^j}$
3. Вычислить $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \frac{i+j}{2^i 3^j}$
4. Вычислить $\sum\limits_{i,j\in N} \dfrac{ij}{2^i 3^j}$.
5. Изменить порядок суммирования $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{2i} a_{ij}$.
6. Представить неупорядоченную сумму $\sum\limits_{i+j<n} a_{ij}$ как двойную.
7. Доказать формулу Дирихле

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_{ki}.$$

4 Телескопические суммы.

Цель сегодняшней лекции — получить формулы коэффициентов для степеней геометрического ряда. В результате мы научимся, в частности, суммировать ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^n x^n$. Основной результат выглядит так:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} x^k, \tag{4.1}$$

где $x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)$ называется n-ой *восходящей факториальной степенью* числа x. В частности, $x^{\overline{0}} = 1$ и $x^{\overline{1}} = x$.

Будем доказывать эту формулу индукцией по степени n. Для $n = 1$ формула (4.1) превращается в известную нам формулу суммы геометрического ряда. Предположим, что формула верна для n, тогда, умножая левую часть равенства (4.1) на $\frac{1}{1-x}$, а правую часть — на $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ мы также получим верную формулу. При этом произведение ряда в правой части (4.1) на геометрический будет иметь коэффициент при x^k равный

$$\frac{1}{(n-1)!}(1^{\overline{n-1}} + 2^{\overline{n-1}} + \dots + (k+1)^{\overline{n-1}}),$$

как это следует из приведенной ниже теоремы Коши. Поэтому задача сводится к доказательству, что приведенное выше выражение равно $\dfrac{(k+1)^{\overline{n}}}{n!}$.

Теорема Коши об умножении рядов *Сверткой* или *произведением Коши* рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Теорема 1. *Если абсолютно сходятся ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, то абсолютно сходится их свертка и имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Доказательство. Массив $\{a_k b_j\}_{k,j=0}^{\infty}$ абсолютно суммируем, потому что имеем безусловные равенства
(4.2)

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} |a_k||b_j| = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_k||b_j| = \sum_{k=0}^{\infty}\left(|a_k|\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right),$$

поэтому абсолютная суммируемость двойного ряда вытекает из условий теоремы. Теперь абсолютная суммируемость двойного ряда позволяет повторить выкладки (8.12) уже без модулей. $\square$

Элементарная теория суммирования. Для решения возникшей задачи мы разработаем подход к общей проблеме суммирования: как для данной функции $f(x)$ получить формулу для суммы ее n последовательных значений? Предположим, что искомая формула получена, то есть найдена функция $F(x)$ такая, что при любом натуральном n имеем равенство

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k), \tag{4.3}$$

тогда $F(0) = 0$ и при любом $n \geq 1$ будет

$$F(n) - F(n-1) = f(n). \tag{4.4}$$

Предположим, теперь, наоборот, что нам известна функция $F(x)$, такая что $F(0) = 0$ и удовлетворяющая последнему равенству при $n \geq 1$. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ может быть записана в виде суммы разностей

$$(F(1) - F(0)) + (F(2) - F(1)) + \cdots + (F(n) - F(n-1)).$$

Раскрытие скобок в такого рода суммах, называемых *телескопическими*, приводят к массовым сокращениям, в результате которых остается разность $F(n) - F(0)$ мы получаем, что $F(x)$ является суммирующей функцией для $f(x)$ в смысле (4.3).

Разностью (запаздыающей) функции $f(x)$ называется обозначаемая $\underline{\Delta} f(x)$ функция, определяемая следующим соотношением:

$$\underline{\Delta} f(x) = f(x) - f(x-1) \tag{4.5}$$

Как мы убедились выше, задача нахождения суммирующей формулы равносильна задаче нахождения функции $F(x)$, имеющей данную $f(x)$ в качестве своей разности $\underline{\Delta} F(x) = f(x)$. Эту задачу мы будем называть *задачей телескопирования*, а решающую ее функцию $F(x)$ мы будем также называть *телескопирующей* для $f(x)$ и использовать запись $F(x) = \underline{\Delta}^{-1} f(x)$ как эквивалент записи $\underline{\Delta} F(x) = f(x)$. Применение термина *телескопический* в данном контексте мотивировано общепринятым термином *телескопическая сумма*. Это название используется для сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$. Значение телескопической суммы определяется значениями первого и последнего из a_k, подобно телескопу, толщина которого определяется радиусами внешнего и внутреннего колец.

Для данной последовательности $\{a_k\}$ обозначим $\{\underline{\Delta} a_k\}$ последовательность разностей $\underline{\Delta} a_k = a_k - a_{k-1}$ и назовем эту последовательность *разностью* последовательности $\{a_k\}$. Главная формула элементарной теории суммирования такова:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \underline{\Delta} a_k = a_n - a_0} \tag{4.6}$$

Факториальные степени. Разработанную теорию суммирования применим теперь к факториальным степеням. Вычисление разности для факториальной степени дано ниже:

$$x^{\overline{k}} - (x-1)^{\overline{k}} = x^{\overline{k-1}}(x+k-1) - (x-1)x^{\overline{k-1}} = kx^{\overline{k-1}}$$

В результате мы получаем следующую важную формулу:

$$\boxed{\underline{\Delta} x^{\overline{n}} = nx^{\overline{n-1}}}, \tag{4.7}$$

из которой немедленно вытекает равенство

$$\frac{m^{\overline{n+1}}}{n+1} = \sum_{k=1}^{m} k^{\overline{n}},$$

которое, как мы показали выше, влечет (4.1).

Отрицательные факториальные степени Факториальные степени удовлетворяют следующему *правилу сложения*

$$\boxed{x^{\underline{k+m}} = x^{\underline{k}}(x-k)^{\underline{m}}}. \tag{4.8}$$

При определении отрицательных факториальных степеней исходят из этого правила. Поэтому $x^{\underline{-k}}$ для натурального k определяется формулой

$$x^{\underline{-k}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \tag{4.9}$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно проверить справедливость этого правила сложения для всех целых m, k. Разность для отрицательных степеней задается, той же самой формулой, что и для положительных. Отрицательные факториальные степени дают ряды принципиально нового типа. Простейший из которых представляет собой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, суммирование которого основано на тождестве:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,.$$

Благодаря этому тождеству сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ превращается в сумму разностей

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \dots \tag{4.10}$$

И n-я частичная сумма ряда равняется $1-\frac{1}{n+1}$. Теперь нетрудно доказать, что единица является наименьшим числом превосходящим все числа вида $1-\frac{1}{n+1}$. Во-первых, очевидно, что 1 мажорирует все частичные суммы. Во-вторых, для любого меньшего числа $1-\varepsilon$ число $1-\frac{1}{n+1}$ превзойдет его, при $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом установлено, что полная сумма ряда (4.10) равна единице.

Рассмотренный пример дает повод к принятию соглашения $\frac{1}{\infty} = 0$. А именно, подстановка в формулу частичной суммы бесконечности в качестве числа слагаемых, с использований принятых нами правил вычислений с бесконечностью дает правильный ответ для полной суммы ряда.

Правда, такого рода вычисления, не всегда дают результат. Например, мы могли бы записать формулу частичной суммы в виде $\frac{n}{n+1}$. Подстановка в такую формулу бесконечности приводит к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поэтому вычисление значения арифметического выражения, в котором участвует бесконечность (бесконечно-большая величина) требует некоторого искусства.

5 Бином Ньютона

Следующая формула, открытая Ньютоном, носит название *биномиального ряда*

$$(1+x)^y = 1+y\cdot x+\frac{y(y-1)}{2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3+\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4!}x^4+\dots$$

Открытие биномиального ряда Ньютон считал своим величайшим открытием. Биномиальный ряд выгравирован на его надгробье в Вестминстерском кладбище. И роль этого открытия в дальнейшем развитии математики трудно переоценить. С использованием факториальных степеней биномиальный ряд записывается особенно красиво.

$$\boxed{(1+x)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k y^{\underline{k}}}{k!}} \tag{5.1}$$

Бином Ньютона. Для целых неотрицательных $k \leq n$ через C_n^k обозначается коэффициент при x^k у многочлена, возникающего из возведения двучлена (бинома) $1+x$ в степень n. Таким образом по определению *биномиальных коэффициентов* (именно так называются числа C_n^k) имеет место равенство:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{5.2}$$

Если в этой формуле умножить обе части равенства на $(1+x)$, то в левой части мы получим $(1+x)^{n+1}$, а в правой — сумму $C_n^0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(C_n^k + C_n^{k-1})x^k + C_n^n x^{n+1}$.

Откуда немедленно следует такое правило сложения биномиальных коэффициентов

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \tag{5.3}$$

Кроме того оттуда вытекают такие равенства для крайних коэффициентов

$$C_n^0 = C_{n+1}^0 \qquad C_n^n = C_{n+1}^{n+1} \tag{5.4}$$

Лемма 5.1. *Правило сложения* (5.3) *и равенства крайних коэффициентов* (5.4) *определяют единственную двойную последовательность, для которой* $C_0^0 = 1$.

Доказательство. Во-первых заметим, что из равенств (5.4) немедленно получается, что $C_n^0 = C_n^n = 1$ при любом натуральном n.

Далее построение двойной последовательности C_n^k производится с помощью пары вложенных циклов. Внешний по n (от единицы), внутренний по k (от единицы до n). Внутренний цикл определяет C_{n+1}^k исходя из уже известных C_n^k и C_n^{k-1} по правилу сложения (5.3). □

И. Ньютоном, была получена следующая формула для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{5.5}$$

Доказательство этой формулы немедленно получается из (5.1) ввиду тождества

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \tag{5.6}$$

Так как $(a+b)^n = a^n(1+\frac{b}{a})^n$, то из полученных результатов получается следующая знаменитая формула, известная под именем *бином Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \tag{5.7}$$

Факториальный бином. Поскольку $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$, постольку коэффициенты при x^p в левой и правой частях равенства должны совпадать. Коэффициент в правой части имеет вид C_{m+n}^p, а в левой части представляется в виде суммы $\sum\limits_{k=0}^{p} C_n^k C_m^{p-k}$. Записывая это равенство с заменой биномиальных коэффициентов на факториальные степени ($C_n^k = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$) мы приходим к следующему тождеству

$$\frac{(m+n)^{\underline{p}}}{p!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \frac{m^{\underline{p-k}}}{((p-k)!} \tag{5.8}$$

Умножая обе части тождества на $p!$, получаем следующее равенство:

$$(m+n)^{\underline{p}} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k n^{\underline{k}} m^{\underline{p-k}} \tag{5.9}$$

Это равенство доказано нами для любых натуральных m и n, для которых $m+n \geq p$. Оказывается это равенство справедливо при любых действительных m и n. Действительно, при фиксированном n в левой и правой частях тождества мы имеем многочлены, от m степени p, совпадающие в бесконечном числе точек. Поэтому такие многочлены совпадают тождественно. Следовательно, равенство (5.10) справедливо для любого m и натурального $n > p - m$. Теперь фиксируем m. Тогда слева и справа мы имеем многочлены от n степени p совпадающие в бесконечном множестве точек, а потому тождественно равные. Таким образом, для любых действительных x и y при любом натуральном p справедливо равенство, аналогичное простому биному Ньютона и называемое *факториальным биномом:*

$$(x+y)^{\underline{p}} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{\underline{k}} y^{\underline{p-k}} \tag{5.10}$$

Теорема о произведении биномиальных рядов

Теорема 1. *Биномиальный ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\underline{k}} x^k}{k!}$ *абсолютно сходится при* $|x| < 1$ *и при любых* y_1 *и* y_2 *имеет место равенство.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_1^{\underline{k}} x^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_2^{\underline{k}} x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y_1 + y_2)^{\underline{k}} x^k}{k!}$$

Доказательство. Признак Даламбера позволяет доказать абсолютную сходимость биномиального ряда $(1 + x)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\underline{k}} x^k}{k!}$ для $x < 1$. Действительно, отношение соседних членов биномиального ряда выражается формулой $x(y - k)/k$. Пусть $q = \sqrt{|x|} > |x|$. Тогда $q < 1$ и неравенство $|x(y - k)/k| < q$ выполняется при $k > \frac{xy}{q-|x|}$.

Произведение биномиальных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{k}} x^k}{k!}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{\underline{k}} x^k}{k!}$ по теореме Коши равняется сумме ряда, формула n-го члена которого есть $\sum_{k=0}^{n} \frac{a^{\underline{k}} b^{\underline{n-k}}}{k!(n-k)!} x^n$, что в силу факториального бинома совпадает с $\frac{(a+b)^{\underline{n}}}{n!} x^n$. То есть в результате умножения биномиальных рядов мы опять получаем биномиальный ряд. □

Биномиальная теорема для рациональных показателей Итак, при умножении биномиальных рядов получается биномиальный ряд с показателем равным сумме показателей сомножителей. Если показатель биномиального ряда является рациональным числом вида $\frac{m}{n}$, то при возведении этого ряда в m-ую степень получится конечный биномиальный ряд представляющий $(1 + x)^m$ в силу простой биномиальной теоремы. Следовательно, исходный ряд представляет $(1 + x)^{\frac{m}{n}}$, что и доказывает биномиальную теорему для биномиальных рядов с рациональным показателем.

Биномиальный ряд для иррациональных показателей.

Лемма 5.2. *Если* $y \geq -1$ *и* $xy > 0$*, то* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\underline{k}} x^k}{k!} > 1$

Доказательство. Отношение $(k + 1)$-го члена биномиального ряда к k-му выражается величиной $x\frac{y-k}{k+1}$ по абсолютной величине меньшей единицы при $y \geq -1$. А знак у следующего члена ряда сохраняется, если $x < 0$ и меняется на противоположный, если $x > 0$. В любом случае все нечетные члены ряда имеют одинаковый знак и они положительны, ибо по условию положителен первый член ряда. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\underline{k}} x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left| \frac{y^{\underline{2k-1}} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| - \left| \frac{y^{\underline{2k}} x^{2k}}{(2k)!} \right| \right) > 1,$$

так как все скобки в правой части положительны. □

Теорема 2. *Сумма биномиального ряда положительна и монотонно зависит от показателя.*

Доказательство. Сумму биномиального ряда (с фиксированным x) показателем y будем обозначать $\beta(y)$. Так как $\beta(y)\beta(-y) = \beta(0) = 1$, то $\beta(y)$ и $\beta(-y)$ имеют одинаковые знаки. А так как одно из этих чисел больше единицы в силу леммы 5.2, то оба они положительны.

Пусть $y_2 > y_1$, тогда в силу теоремы **1** имеем $\beta(y_2)/\beta(y_1) = \beta(y_2 - y_1)$, что больше единицы при $x > 0$ и меньше единицы при $x < 0$, в силу леммы 5.2. Таким образом, в первом случае $\beta(y)$ монотонно возрастает, а во втором — монотонно убывает. $\square$

Значение степени a^y для иррационального y определяется так, чтобы оно было заключено между значениями степеней рациональных чисел, если показатель заключен между этими рациональными числами. А так как, определенная биномиальным рядом функция монотонна и в рациональных точках совпадает с обычной степенью, то единственным числом, определяемым этой процедурой будет как раз сумма биномиального ряда $(1 + x)^y$ при $x = a - 1$. Поэтому биномиальное разложение Ньютона справедливо и для иррациональных показателей.

Эйлерово вычисление $\sqrt{2}$. Практическое применение биномиального ряда для вычислений ограничивается случаем показателя y по модулю меньшего единицы. В первую очередь, он применяется для вычисления корней, то есть для $y = \frac{1}{n}$.

Так Эйлер в своем "Введении "предложил следующий алгоритм вычисления $\sqrt{2}$. Поскольку $\frac{7}{10}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49\cdot 2}{100}} = \sqrt{1 - \frac{1}{50}}$, постольку биномиальный ряд для $x = -\frac{1}{50}$ и $y = \frac{1}{2}$ дает такое выражение для корня из двух

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{100^2 2!} - \frac{3}{100^3 3!} - \frac{3\cdot 5}{100^4 4!} - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{100^5 5!} - \dots\right) \tag{5.11}$$

Из приведенных выше членов разложения $\sqrt{2}$ вычисляется с точностью до десятого знака после запятой.

Общий метод вычисления корня $\sqrt[n]{x}$ заключается в нахождении рациональной дроби $\frac{p}{q}$ достаточно хорошо приближающей этот корень. Тогда число $\frac{q}{p}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{q^n x/p^n}$ близко к единице и извлечение корня из $\sqrt[n]{q^n x/p^n}$ может быть успешно произведено с помощью биномиального ряда. Результат этого вычисления после этого следует умножить на $\frac{p}{q}$.

Задачи.

1. Вычислить коэффициент при x^{44} в $(x^3 + x^5)^{10}$
2. Чему равно n, если коэффициенты при x^5 и x^{12} в биноме $(1+x)^n$ равны ?
3. Сколько слагаемых без радикалов содержит $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?
4. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$
5. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$
6. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k C_n^k$
7. Суммировать $\sum\limits_{k=1}^{n} k C_n^k$
8. Доказать неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1 + nx$
9. Доказать неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$
10. Доказать тождество $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^2 = 1$
11. Суммировать ряд $1 - \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{x^2}{2!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\frac{x^4}{4!} - \cdot$
12. Доказать неравенство $(n+1)^n < n^{n+1}$
13. Доказать неравенство $(\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2}{n-1}$ с помощью тождество $n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n$
14. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$
15. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$
16. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2$
17. Написать биномиальный ряд, выражающий $\sqrt{-1}$ и убедится, что квадрат этого ряда по Коши дает в сумме единицу
18. * Число Каталана c_n определяется как число правильных способов расстановки скобок в сумме $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Доказать, что числа Каталана удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ и вывести формулу для чисел Каталана

6 Экспонента и логарифм

Основание натуральных логарифмов, то есть число, натуральный логарифм которого равен единице, играет в математике большую роль. Со времен Эйлера оно обозначается буквой e и приблизительно равняется $2.718281828\ldots$.

Так как $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$, а $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1$, то e удовлетворяет при любом n неравенствам

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{6.1}$$

Эйлер в своем "Введении в анализ бесконечно-малых"приводит такое рассуждение, позволяющее получить разложение показательной функции e^x в степенной ряд.

Поскольку из неравенств (6.1) вытекает, что $e = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega$, где ω обозначает бесконечно большое число, постольку

$$e^x = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{x\omega} = \left(1+\frac{x}{x\omega}\right)^{x\omega} = \left(1+\frac{x}{\omega}\right)^{\omega}.$$

Рассмотрим биномиальное разложение

(6.2)
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{n(n-1)x^2}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!n^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)x^4}{4!n^4}+\ldots$$

Поскольку при бесконечно большом $n = \omega$ (k фиксировано) отношение $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}$ превращается в единицу, постольку правая часть приведенной выше формулы трансформируется в *экспоненциальный ряд*

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \tag{6.3}$$

Если определить функцию $\exp x$ посредством указанного экспоненциального ряда, то на основе доказанной ниже теоремы сложения, нетрудно доказать ее совпадение с функцией e^x, где $e = \exp 1$.

Теорема 1 (сложения)**.** *Для любых вещественных x, y справедливо равенство* $\exp(x+y) = \exp x \exp y$

Доказательство. В силу теоремы Коши произведение рядов $\exp x \exp y$ представляется рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$. А n-ый член ряда, представляющего $\exp(x+y)$ равен $\frac{(x+y)^n}{n!}$. Последнее выражение, будучи разложено по формуле бинома Ньютона, как раз дает c_n. □

Обратность экспоненты и логарифма.

Теорема 2. *Для любого числа x выполнено равенство* $\log\exp x = x$

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на следующих двух элементарных парах неравенств об экспоненте и логарифме называемых нами *базовыми оценками* для экспоненты и логарифма.

$$1+x \le \exp x \le \frac{1}{1-x} \qquad \frac{x}{1+x} \le \log(1+x) \le x$$

Эти неравенства справедливы для положительных x меньших единицы. Требуемое тождество, очевидно, достаточно доказать для положительных x ибо функция $\log\exp(x)$ нечетна ($\log\exp -x = \log\frac{1}{\exp x} = -\log\exp x$) как и функция x. Итак, в дальнейшем считаем x положительным. Рассмотрим натуральное n большее чем x. Тогда $x/n < 1$ и пользуясь верхней базовой оценкой для экспоненты получаем $\exp x/n \leq \frac{1}{1-x/n}$. И применяя к обоим частям логарифм имеем:

$$\log(\exp(x/n) \leq \log\frac{1}{1-x/n} = \log\left(1+\frac{x/n}{1-x/n}\right) \leq \frac{x/n}{1-x/n}$$

где последний переход использует верхнюю базовую оценку для логарифма. Умножая на n эти неравенства слева, мы получаем $n\log\exp(x/n) = \log(\exp(x/n)^n) = \log\exp x$, а справа число $\dfrac{x}{1-x/n}$, которое при увеличении n становиться сколь угодно мало превосходящим x. А именно, для любого положительного ε нам нужно указать такое n, для которого справедливо неравенство $\frac{x}{1-x/n} \leq x+\varepsilon$. Поделив обе части на x, получим эквивалентное неравенство

$$\frac{1}{1-x/n} \leq 1+\frac{\varepsilon}{x}$$

Но поскольку $\frac{1}{1-x/n} \leq 1 + x/n$ постольку справедливость последнего обеспечивается неравенством $\frac{x}{n} \leq \frac{\varepsilon}{x}$, которое в свою очередь выполняется при n больших чем $\frac{x^2}{\varepsilon}$.

Откуда получаем неравенство $\log\exp x \leq x$.

Обратное неравенство доказывается аналогично. Начнем с неравенства $1 + x/n \leq \exp x/n$ (нижняя оценка для экспоненты) Применим к обеим частям логарифм и пользуясь нижней базовой оценкой логарифма

$$\frac{x/n}{1+x/n} \leq \log(1+x/n) \leq \log\exp x/n$$

Умножаем эти неравенства на n справа, как и выше получаем $\log\exp x$, а слева число $\dfrac{x}{1+x/n}$, которое меньше чем x на величину становящуюся с ростом n сколь угодно малой. (читателю рекомендуется самостоятельно провести вычисления выражающие n через ε в этом случае). Поэтому заключаем $\log\exp x \geq x$. □

Задачи.

1. $\sum\frac{1}{n(n+2)}$
2. $\sum$
   $frac1n(n+1)(n+2)$
3. Написать биномиальный ряд для $(1-3x)^{\frac{1}{3}}$
4. Написать биномиальный ряд для $(1-4x)^{\frac{1}{4}}$

5. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$
6. Сумма квадратов биномиальных коэффициентов.
7. Сумма квадратов биномиальных коэффициентов на нечетных местах.

7 Комплексные числа

Кубическое уравнение Подстановка $x = y - \frac{a}{3}$ сводит общее кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ к

$$y^3 + py + q = 0.$$

Редуцированное уравнение решается с помощью следующего трюка. Корень ищется в форме $y = \alpha + \beta$. Тогда $(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$ или $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + p(\alpha + \beta) + q = 0$. Последнее равенство сводится к системе

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= -q, \\ 3\alpha\beta &= -p. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Возведение второго уравнения в куб дает

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= -q, \\ 27\alpha^3\beta^3 &= -p^3. \end{aligned}$$

Теперь α^3, β^3 являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 + qx - \tfrac{p^3}{27},$$

называемого *резольвентой* исходного кубического уравнения. Иногда резольвента не имеет решений, хотя кубическое уравнение всегда имеет корень. Несмотря на это можно вычислить корень кубического уравнения с помощью его резольвенты. Чтобы это сделать надо просто игнорировать тот факт, что под корнем могут оказаться отрицательные числа.

Например рассмотрим следующее кубическое уравнение

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2} = 0. \tag{7.2}$$

Тогда (7.1) превращается в

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= \tfrac{1}{2}, \\ \alpha^3\beta^3 &= \tfrac{1}{8}, \end{aligned}$$

Соответствующая резольвента будет $t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} = 0$ и ее корни таковы:

$$t_{1,2} = \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{-1}.$$

Тогда искомый корень кубического уравнения задается формулой

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{-1})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{-1})} = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-1}}\right). \tag{7.3}$$

Оказывается, что последнее выражение естественным образом интерпретируется как вещественное число (7.2). Чтобы его определить, рассмотрим следующее выражение:

$$\sqrt[3]{(1 + \sqrt{-1})^2} - \sqrt[3]{(1 + \sqrt{-1})}\sqrt[3]{(1 - \sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{-1})^2}. \tag{7.4}$$

Так как

$$(1+\sqrt{-1})^2 = 1^2 + 2\sqrt{-1} + \sqrt{-1}^2 = 1 + 2\sqrt{-1} - 1 = 2\sqrt{-1},$$

левое слагаемое в (7.4) равняется

$$\sqrt[3]{2\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{-1}} = \sqrt[3]{2}\,\sqrt{-1}.$$

Аналогично $(1-\sqrt{-1})^2 = -2\sqrt{-1}$, и правое слагаемое в (7.4) превращается в $-\sqrt[3]{2}\,\sqrt{-1}$. Наконец $(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1}) = 1^2 - \sqrt{-1}^2 = 2$ и центральное слагаемое есть $-\sqrt[3]{2}$. В результате все выражение (7.4) оказывается равным $-\sqrt[3]{2}$.

С другой стороны вычисление произведения (7.3) и (7.4) по обычной формуле как суммы кубов дает

$$\tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}((1+\sqrt{-1})+(1-\sqrt{-1})) = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}((1+1)+(\sqrt{-1})-\sqrt{-1})) = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}(2+0) = \sqrt[3]{2}.$$

Следовательно (7.3) равно $\frac{\sqrt[3]{2}}{-\sqrt[3]{2}} = -1$. И -1 действительно, является корнем уравнения (7.2).

Арифметика комплексных чисел

В дальнейшем мы используем i вместо $\sqrt{-1}$. Есть два основных способа записи комплексных чисел. Запись вида $z = a + ib$, где a и b являются вещественными числами мы называем *аддитивной формой* числа z. Числа a и b называются соответствено *действительной* и *мнимой* частями z и обозначаются $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно. Сумма и произведение комплексных чисел в аддитивной форме выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z_1+z_2) &= \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2,\\
\operatorname{Im}(z_1+z_2) &= \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2,\\
\operatorname{Re}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2,\\
\operatorname{Im}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2.
\end{aligned}$$

Мультипликативной формой комплексного числа называется представление $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho \geq 0$ и φ — вещественные числа, из которых первое называется *модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа z и обозначается $|z|$, а φ называется *аргументом*. Аргумент комплексного числа определен неоднозначно. Однозначно определен лишь его остаток от целочисленного деления на 2π. Через $\operatorname{Arg}(z)$ обозначается множество всех аргументов z, и через $\arg z$ обозначается элемент множества $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющий неравенствам $-\pi < \arg z \leq \pi$. Таким образом $\arg z$ однозначно определен для всех комплексных чисел и называется *главным аргументом* числа z.

Число $a - bi$ называется *сопряженным* к $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$. Имеет место тождество $z\overline{z} = |z|^2$. Это позволяет выразить z^{-1} как $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Если $z = a + ib$, то $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ и $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Комплексные числа можно представлять точками плоскости. Число $z = a + bi$ представляется точкой Z с координатами (a, b). Тогда $|z|$ равно расстоянию от Z до начала координат O. И $\arg z$ представляет угол между осью абсцисс и лучом $\overrightarrow{OZ}$. Сложению комплексных чисел соответствует обычное сложение векторов. И обычное неравенство треугольника превращается в *модульное неравенство*:

$$|z + \zeta| \leq |z| + |\zeta|.$$

Формула умножения для комплексных чисел в мультипликативной форме особенно проста:

$$\begin{aligned} r(\cos\varphi + i\sin\varphi)r'(\cos\psi + i\sin\psi) \\ = rr'(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Действительно, левая и правая части (7.5) преобразуются к

$$rr'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + irr'(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi).$$

То есть, модуль произведения равен произведению модулей и аргумент произведения равен сумме аргументов:

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 \oplus \operatorname{Arg} z_2.$$

Формула умножения позволяет по индукции доказать следующее:

(Формула Муавра) $$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

На самом деле Муавр получил две формулы: для косинуса и синуса n-кратного угла. Эти формулы Муавра представляют собой соответственно вещественную и комплексную части приведенной выше комплексной формулы. Для получения оригинальных формул Муавра нужно воспользоваться комплексной версией бинома Ньютона, доказательство которой аналогично вещественному случаю.

Задачи.

1. Найти аддитивную форму для чисел, представленных выражениями $\frac{1}{1-i}$, $(\frac{1-i}{1+i})^3$, $\frac{i^5+2}{i^{19}+1}$, $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$, i^{2005}.
2. Найти тригонометрическую форму для чисел 2, -1, i, $1+i$, $1-i$, $\sqrt{3}+i$.
3. Вычислить $(1+i)^100$, $\left(\sqrt{3}+i\right)^{100}$
4. Решить уравнение $z^2 = 3 - 4i$.
5. Решить уравнения $z^2 = i$, $z^3 = -1$, $z^5 = 1$.
6. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{x^2-2x+2}$
7. * Решить кубическое уравнение $8x^3 - 6x - 1 = 0$

8 Формула Эйлера

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ любых комплексных чисел называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ его абсолютных величин.

Для абсолютно сходящегося комплексного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ мы определим вещественную и мнимую части всей суммы раздельно формулами

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k \qquad \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k \tag{8.1}$$

ряды в правой части этих формул абсолютно сходятся, так как $|\operatorname{Re} z_k| \le |z_k|$ и $|\operatorname{Im} z_k| \le |z_k|$.

Комплексная экспонента Функцию экспонента можно определить для комплексного аргумента той же формулой, что и для вещественного

$$e^z = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{8.2}$$

Экспоненциальный ряд абсолютно сходится при любом z и определяет однозначную функцию на всей комплексной плоскости.

Именем Эйлера называется не один десяток математических формул, но самой замечательной и самой важной является следующая

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \tag{8.3}$$

Подстановка в (8.2) $z = i\varphi$ для вещественного φ дает степенной ряд, вещественная часть которого, согласно формуле Эйлера представляет $\cos\varphi$, а мнимая часть — $\sin\varphi$. И комплексная формула (8.3), таким образом эквивалентна паре вещественных

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Вывод Эйлера. Формула Муавра позволяет при любом натуральном n написать равенство

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

Раскрывая степень справа по биному Ньютона, получаем выражение

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cos^{n-k}\frac{\varphi}{n} i^k \sin^k\frac{\varphi}{n} \tag{8.4}$$

Далее Эйлер подставляет в это выражение $n = \infty$ и пользуется тем, что бесконечно малая дуга равна своему синусу и имеет косинусом единицу. В результате выражение (11.4) при бесконечно большом n имеет то же значение, как и следующее

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\varphi^k i^k}{n^k} \tag{8.5}$$

А так как при бесконечно большом n будет $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1$, то последнее выражение при бесконечно большом n превращается в

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}$$

Тригонометрические функции комплексного переменного В силу формулы Эйлера экспонента комплексного переменного выражается через элементарные функции действительного переменного

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{8.6}$$

Теорема умножения

$$\exp z \exp w = \exp(z+w)$$

также немедленно вытекает из формулы (8.6).

С другой стороны формула Эйлера позволяет выразить через экспоненту все тригонометрические функции и определить их как функции комплексной переменной

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{tg} z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \tag{8.7}$$

Комплексные ряды Нашей целью теперь является распространение теории суммирования на ряды комплексных чисел. Мы распространим всю теорию без всяких потерь на так называемые *абсолютно сходящиеся* ряды.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *абсолютно сходится, то для любого комплексного* c *абсолютно сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |cz_k|$ *и имеет место равенство* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cz_k = c\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Доказательство. Правило почленного умножения для положительных чисел дает доказательство первого утверждения теоремы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |cz_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c||z_k| = |c|\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$.

Докажем сначала теорему в вещественном случае. Пусть $c = -1$. Так как для любого x имеем очевидные тождества:

$$(-x)^+ = x^- \qquad (-x)^- = x^+, \tag{8.8}$$

то непосредственно из определения суммы вещественного ряда вытекает следующее *правило изменения знака*:

(8.9)
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Теперь, опираясь на правила почленного сложения и правило изменения знака, имеем:

$$c\sum_{k=1}^{\infty} z_k = (c^+ - c^-)\sum_{k=1}^{\infty}(z_k^+ - z_k^-) = c^+\sum_{k=1}^{\infty} z_k^+ - c^+\sum_{k=1}^{\infty} z_k^- - c^-\sum_{k=1}^{\infty} z_k^+ + c^-\sum_{k=1}^{\infty} z_k^-$$

Теперь, воспользовавшись правилом почленного умножения для положительных рядов, можем продолжить эту цепочку равенств

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c^+z_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} c^+z_k^- - \sum_{k=1}^{\infty} c^-z_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} c^-z_k^- = \sum_{k=1}^{\infty}(c^+ - c^-)(z_k^+ - z_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} cz_k$$

Пусть теперь c вещественно, а z_k комплексны.

В этом случае $\operatorname{Re} cz_k = c\operatorname{Re} z_k$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} cz_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} cz_k = \sum_{k=1}^{\infty} c\operatorname{Re} z_k = c\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_k = c\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \operatorname{Re} c\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Тоже самое верно и для мнимых частей.

Пусть теперь $c = i$.

Так как $\operatorname{Re} iz_k = -\operatorname{Im} z_k$ и $\operatorname{Im} iz_k = \operatorname{Re} z_k$. Поэтому для вещественных частей будет

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} iz_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}(iz_k) = \sum_{k=1}^{\infty} -\operatorname{Im} z_k =$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im} z_k = -\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \operatorname{Re} i\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Общий случай. $c = a + bi$ с вещественными a, b.

Тогда

$$c\sum_{k=1}^{\infty} z_k = a\sum_{k=1}^{\infty} z_k + ib\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} az_k + \sum_{k=1}^{\infty} ibz_k = \sum_{k=1}^{\infty}(az_k + ibz_k) = \sum_{k=1}^{\infty} cz_k$$

□

Модульное неравенство

(8.10)
$$\left|\sum_{k\in K} z_k\right| \le \sum_{k\in K} +|z_k|$$

Доказательство. Для вещественных чисел x_k модульное неравенство получается в результате суммирования неравенств $-|x_k| \leq x_k \leq |x_k|$, которое дает $-\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, что и доказывает модульное неравенство для вещественных чисел $\left|\sum_{k\in K} x_k\right| \leq \sum_{k\in K} |x_k|$. Если z_k комплексны, но имеют вещественную сумму, то модульное неравенство в этом случае выводится из неравенства для вещественных чисел ввиду равенств:

$$\sum_{k\in K} z_k = \operatorname{Re} \sum_{k\in K} z_k = \sum_{k\in K} \operatorname{Re} z_k$$

В общем случае рассмотрим $\alpha = \left|\sum_{k\in K} a_k\right| / \sum_{k\in K} a_k$. Тогда $|\alpha| = 1$ и $\left|\alpha \sum_{k\in K} z_k\right| = \left|\sum_{k\in K} z_k\right|$ поэтому модульное неравенство для ряда $\sum_{k\in K} z_k$ следует из модульного неравенства для $\sum_{k\in K} \alpha z_k$, которое справедливо, так как сумма последнего вещественна. □

Теорема об объединении сумм.

Теорема 2. *Для любого разбиения $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ индексного множества абсолютно суммируемого массива $\{a_i\}_{i\in I}$ комплексных чисел имеет место равенство (правая часть определена)*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i. \tag{8.11}$$

Доказательство. То что правая часть определена выводится из модульного неравенства. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\operatorname{Re} \sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \operatorname{Re} a_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} \operatorname{Re} a_i = \sum_{j\in J} \operatorname{Re} \sum_{i\in I_j} a_i = \operatorname{Re} \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i,$$

в которой все равенства, за исключением второго следствие определений, а второе — следствие вещественной теоремы об объединении сумм. Аналогично доказывается совпадение мнимых частей левой и правой частей равенства (8.11). □

Теорема Коши об умножении рядов *Сверткой* или *произведением Коши* рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ называется ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Теорема 3. *Если абсолютно сходятся ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, то абсолютно сходится их свертка и имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Доказательство. Массив $\{a_k b_j\}_{k,j=0}^{\infty}$ абсолютно суммируем, потому что имеем безусловные равенства
(8.12)

$$\sum_{j,k=0}^{\infty}|a_k||b_j| = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_k||b_j| = \sum_{k=0}^{\infty}\left(|a_k|\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right),$$

поэтому абсолютная суммируемость двойного ряда вытекает из условий теоремы. Теперь абсолютная суммируемость двойного ряда позволяет повторить выкладки (8.12) уже без модулей. □

Теорема 4 (сложения)**.** *Для любых вещественных x, y справедливо равенство* $\exp(x+y) = \exp x \exp y$

Доказательство. В силу теоремы Коши произведение рядов $\exp x \exp y$ представляется рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$. А n-ый член ряда, представляющего $\exp(x+y)$ равен $\frac{(x+y)^n}{n!}$. Последнее выражение, будучи разложено по формуле бинома Ньютона, как раз дает c_n. □

Комплексная геометрическая прогрессия

Сумма геометрической прогрессии с комплексным знаменателем дается обычной формулой

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}. \tag{8.13}$$

И доказательство этого факта такое же как в случае вещественных чисел. Но значение этой формулы другое. Любая комплексная формула фактически представляет собой пару формул. Любое комплексное уравнение фактически представляет пару уравнений.

В частности, для $z = q(\sin\varphi + i\cos\varphi)$ вещественная часть левой стороны в (8.13) благодаря формуле Муавра превращается в $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k \sin k\varphi$ и правая часть превращается в $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k \cos k\varphi$.

Комплексификация рядов Комплексные числа эффективно применяются для суммирования *тригонометрических рядов*, т.е. рядов типа $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx$. Например, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \sin k\varphi$ дополняется двойственным $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k \cos k\varphi$, чтобы образовать комплексный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$. Последний представляет собой комплексную геометрическую прогрессию. Его сумма равна $\frac{1}{1-z}$, где $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Теперь сумма ряда синусов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \sin k\varphi$ равна $\operatorname{Im}\frac{1}{1-z}$, мнимой части комплексного ряда, и вещественная часть комплексного ряда совпадает с суммой ряда косинусов.

В частности, для $q = 1$, имеем $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}$. Чтобы вычислить вещественную и мнимую части умножим и числитель и знаменатель на $1+\cos\varphi-i\sin\varphi$. В результате получаем $(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi = 1-2\cos^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 2-2\cos\varphi$ как знаменатель. Следовательно $\frac{1}{1-z} = \frac{1-\cos\varphi+i\sin\varphi}{2-2\cos\varphi} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. и мы получили две замечательные формулы для сумм расходящихся рядов.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\cos k\varphi = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sin k\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Задачи.

1. Решить уравнения $e^z = i$, $e^z = 1+i$, $e^z = \sqrt{3}+i$
2. Вычислить i^i, e^{e^i}
3. Решить уравнение $\sin z = 5/3$
4. Доказать тождества $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin 2z = 2\cos z\sin z$, вывести формулы для произведения косинусов
5. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k}{k!}$
6. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\cos 2k}{(2k)!}$
7. Разложить в степенной ряд $e^x\cos x$
8. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

9 Разложение синуса в произведение

Гениальная идея, приведшая Эйлера к нахождению суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, заключалась во взгляде на синус как на многочлен бесконечной степени. Этот многочлен имеет корни во всех точках типа $k\pi$. Обычный многочлен разлагается в произведение линейных множителей, соответствующих его корням. По аналогии Эйлер предположил, что то же самое верно и для синуса. То есть синус с точностью до постоянного множителя равен произведению

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} (x - k\pi). \tag{9.1}$$

Написанное произведение расходится, но может быть сделано сходящимся посредством деления k-го множителя на $-k\pi$. А деление на константу не меняет корней.

Модифицированное произведение выглядит так

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{9.2}$$

Два многочлена с одинаковыми корнями могут различаться на мультипликативную константу. Так как $\sin x$ разлагается в степенной ряд, у которого коэффициент при x равен единице, а коэффициент при x у степенного ряда возникающего при перемножении произведения (9.2) также равен единице, то искомая мультипликативная константа также равна единице. То есть, естественно ожидать, что $\sin x$ совпадает с произведением (9.2). Эйлер выполнил также проверку, подставив $x = \pi/2$ ввиду того что $\sin \pi/2 = 1$ он получил из (9.2) знаменитое *произведение Валлисса*

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2n!!2n!!}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}, \tag{9.3}$$

Это рассуждение, однако, показалось Эйлеру недостаточно убедительным и вскоре он привел гораздо более подробное доказательство этой формулы.

Корни из единицы Особый интерес представляет геометрическая прогрессия со знаменателем $\varepsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. В этом случае она циклически принимает одни и те же значения, потому что $\varepsilon_n^n = 1$. Члены этой последовательности называются *корнями из единицы*, потому что удовлетворяют уравнению $z^n - 1 = 0$.

Лемма 9.1.

$$(z^n - 1) = \prod_{k=1}^{n} (z - \varepsilon_n^k) \tag{9.4}$$

Доказательство. Произведение в правой части 9.4 обозначим $P(z)$. Этот многочлен имеет степень n, старший коэффициент 1 и имеет все ε_n^k своими корнями. Тогда разность $(z^n - 1) - P(z)$ является многочленом степени $< n$, который имеет n различных корней. Такой многочлен тождественно равен нулю в силу следующей общей теоремы. $\square$

Теорема 1. *Число корней ненулевого комплексного многочлена не превышает его степени.*

Доказательство. Доказательство проводим индукцией по степени $P(z)$. Многочлены степени один имеют вид $az+b$ и единственный корень $-\frac{b}{a}$. Предположим что наша теорема доказана для любого многочлена степени $< n$. Рассмотрим многочлен $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ степени n с комплексными коэффициентами. Предположим он имеет по меньшей мере n корней $z_1 \dots z_n$. Рассмотрим многочлен $P^*(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. Разность $P(z) - P^*(z)$ имеет степень $< n$ и имеет по меньшей мере n корней (все z_k). По предположению индукции разность равна нулю. Следовательно, $P(z) = P^*(z)$. Но $P^*(z)$ имеет только n корней. Действительно, для любого z отличного от всех z_k one has $|z - z_k| > 0$. Следовательно, $|P^*(z)| = |a_n| \prod_{k=1}^n |z - z_k| > 0$. □

Блокируя сопряженные корни, получаем чисто вещественную формулу.

$$z^n - 1 = (z-1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(z^2 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) \tag{9.5}$$

Заменяя в полученном выражении z дробью $\frac{z}{a}$, можно получить такое равенство

$$z^n - a^n = (z-a) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(z^2 - 2za \cos \frac{2k\pi}{n} + a^2 \right) \tag{9.6}$$

Рассуждение Эйлера Это разложение на множители может быть распространено и на бесконечные ряды. Поскольку

$$e^x - 1 = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega - 1$$

для бесконечнобольшого ω, постольку это выражение разлагается на множители вида

$$\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{\omega}\right) \cos \frac{2k}{\omega}\pi + 1,$$

где k пробегает все натуральные числа и еще один множитель $\frac{x}{\omega}$, соответствующий $k = 0$. Так как дуга $\frac{2k}{\omega}\pi$ бесконечномала, то

$$\cos \frac{2k}{\omega}\pi = 1 - \frac{2k^2}{\omega^2}\pi^2$$

В результате получаем $e^x - 1$, кроме x имеет множители

$$\prod_{k=1}^{\omega/2} \left(1 + \frac{x}{\omega} + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Эти множитетели содержат бесконечномалую часть, которая при перемножении их всех производит член $\frac{x}{2}$ и потому не может быть отброшена. Во избежание этого неудобства рассмотрим выражение

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega - \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^\omega$$

Типичный множитель этого выражения в силу (9.6) для $z = 1 - \frac{x}{\omega}$ $a = 1 + \frac{x}{\omega}$ будет иметь вид

$$a^2 - 2az\cos 2kn\pi + z^2 = \frac{4x^2}{\omega^2} + \frac{4k^2}{\omega^2}\pi^2 - \frac{4k\pi^2 x^2}{\omega^4}$$

Итак, Функция $e^x - e^{-x}$ будет делится на

$$\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{\omega^2}\right),$$

где член $\frac{x^2}{\omega^2}$ может быть опущен без опасения, потому что даже после умножения на ω он остается бесконечномалым. Кроме того как и раньше, если $k = 0$, то первый множитель будет равен x. В результате получаем

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \tag{9.7}$$

Подставляя в полученную формулу ix, вместо x получаем

$$\boxed{\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} \tag{9.8}$$

Задачи.

1. Найти произведение $\prod\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)$.
2. Найти произведение $\prod\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.
3. Доказать, что $\cos x = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$ указание $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$
4. * $\prod\left(1 - \frac{18n^2+1}{(9n^2-1)^2}\right)$
5. Найти произведение Валлиса $\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}$
6. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$
7. Найти произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n})$
8. Вычислить $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n-2)(n+3)}$.
9. Вычислить $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n(n+2)})$.
10. Вычислить $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.
11. Вычислить $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^3-1}$.

10 Арифметика пределов.

Бесконечно-малые последовательности. Лейбниц определял (положительное) бесконечно-малое число как число меньшее любого положительного, но отличное от нуля. Позднее Коши вместо рассмотрения бесконечно малых чисел стал рассматривать (бесконечные) последовательности обычных чисел, называя такую последовательность *бесконечно малой*, если она становится меньше любого положительного числа.

Последовательность (комплексных) чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного ε неравенство $|z_n| < \varepsilon$ выполняется для всех n, начиная с некоторого $N(\varepsilon)$.

Операции над последовательностями определяются *почленно*: то есть *суммой, разностью, произведением и частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются соответсвенно последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ $\{x_n y_n\}$ $\{x_n/y_n\}$.

Лемма 10.1. *Сумма бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две бесконечно-малые последовательности. Для данного положительного ε нам нужно указать номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполнено неравенство $|x_n + y_n| < \varepsilon$. Условие бесконечной малости первой последовательности позволяет найти такое N_1, что при $n > N_1$ имеет место неравенство $|x_n| < \varepsilon/2$. Условие бесконечной малости второй последовательности позволяет найти такое N_2, что при $n > N_2$ имеет место неравенство $|x_n| < \varepsilon/2$. В таком случае при $n > \max\{N_1, N_2\}$ имеем неравенство

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Лемма 10.2. *Если $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то при любом c бесконечно малой будет последовательность $\{ca_n\}$.*

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Согласно определению бесконечно малой последовательности найдется $N(\varepsilon)$, для которого неравенство $|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$ выполнено при всех $n > N(\varepsilon)$. Но при этих же n выполнено неравенство $|ca_n| < \varepsilon$, что доказывает бесконечную малость $\{ca_n\}$. □

Следующая часто применяемая лемма называется *леммой о милиционерах.*

Лемма 10.3 (о милиционерах)**.** *Пусть даны три последовательности, любые члены которых удовлетворяют неравенствам $a_n \leq b_n \leq c_n$. Тогда из бесконечно-малости двух крайних последовательностей $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ (милиционеров) вытекает бесконечная малость средней последовательности $\{b_n\}$.*

Доказательство. Пусть дано положительное ε. Тогда неравенства $|a_n| < \varepsilon$ и $|c_n| < \varepsilon$ выполнены начиная с некоторых N_1 и N_2 в силу условия о бесконечной малости милиционеров. Тогда при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнены оба неравенства. Значит, при $n > N$ п имеем $-\varepsilon < a_n$ и $c_n < +\varepsilon$. Откуда $-\varepsilon < b_n < +\varepsilon$. То есть $|b_n| < \varepsilon$. □

Лемма 10.4. *Произведение ограниченной (в частности, бесконечно-малой) последовательности на бесконечно-малую является бесконечно-малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно-малая и $\{y_n\}$ ограниченная константой C последовательность. Тогда имеем неравенства

$$-Cx_n \leq y_n x_n \leq Cx_n$$

и нужное утверждение вытекает из леммы о милиционерах. □

Лемма 10.5. *Бесконечно-малая последовательность положительных чисел содержит наибольший элемент.*

Доказательство. Рассмотрим первый элемент последовательности. Так как он положителен, то имеется лишь конечное число элементов последовательности его превосходящих. Среди этого конечного множества чисел есть наибольшее. Оно и будет наибольшим элементом последовательности. □

Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если найдется такая константа M, что неравенство $|z_n| \leq M$ выполнено для всех членов последовательности. Доказанная выше лемма позволяет заключить, что всякая бесконечно-малая последовательность ограниченна.

Предел последовательности. Число Z называется *пределом* последовательности (обозначение $Z = \lim z_n$ или $z_n \to Z$), если при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|z_n - Z| < \varepsilon$$

выполнено при всех n, начиная с некоторого $N(\varepsilon)$. Иными словами, если бесконечно-малой является последовательность разностей $\{Z - z_n\}$. Далеко не любая последовательность имеет предел, например, предела не имеет последовательность $(-1)^n$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной.*

Лемма 10.6. *Постоянная последовательность является бесконечно-малой в том и только том случае, когда все ее члены равны нулю.*

Доказательство. Если все члены последовательности x_n равны c и $|c| > 0$, то при $\varepsilon = |c|$ неравенство $|x_n| < \varepsilon$ не будет выполнено ни при каком n, откуда следует, что последовательность не является бесконечно-малой. В то же время последовательность нулей, очевидно, бесконечно-малой является. □

Лемма 10.7. *Сумма постоянной и бесконечно-малой последовательностей является сходящейся последовательностью. И всякая сходящаяся последовательность единственным образом представляется в виде суммы постоянной и бесконечно-малой последовательностей.*

Теорема 1 (о сумме-разности пределов)**.** *Если $\lim z_n = Z$ и $\lim w_n = W$, то $\lim(z_n \pm w_n) = Z \pm W$.*

Доказательство. $z_n = Z + \zeta_n$ и $w_n = W + \omega_n$. И теорема вытекает из того, что сумма бесконечно-малых бесконечно-малая. □

Теорема 2 (о пределе произведения). *Если* $\lim a_n = A$ *и* $\lim b_n = B$*, то последовательность произведений сходится и имеет пределом* $\lim a_n b_n = AB$.

Доказательство. Так как $a_n = A + \alpha_n$ и $b_n = B + \beta_n$, то $a_n b_n = AB + A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n$, где последние три слагаемых бесконечномалые. □

Теорема 3 (предельный переход в неравенстве). *Если* $a_k \leq b_k$ *при любом* k*, то* $\lim a_k \leq \lim b_k$.

Доказательство. Предположим противное, что $A = \lim a_k > B = \lim b_k$. Рассмотрим $C = (A+B)/2$. Тогда $\lim a_n > C$ и потому начиная с некоторого n будет $a_n > C > B$. Но при таких n и $b_n > C$. С другой стороны $\lim b_n < C$, поэтому $b_n < C$ при достаточно больших n. Противоречие. □

Лемма о милиционерах для сходящихся последовательностей вытекает из частного случая бесконечно-малых.

Теорема 4 (о пределе частного). *Если* $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B \neq 0$*, то последовательность частных* $\frac{a_n}{b_n}$ *сходится и* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Доказательство. Начнем с того, что докажем ограниченность последовательности $\frac{1}{b\,n}$. Так как $\lim b_n = B \neq 0$, то почти для всех n выполнено неравенство $|b_n - B| < |B|/2$, из которого следует, что $|b_n| > |B|/2$. Поэтому почти всегда выполнено неравенство $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{B}$. Из конечного числа членов последовательности $\frac{1}{b_n}$, не удовлетворяющих этому неравенству, если таковые найдутся, выберем наибольший по абсолютной величине, и тогда уже все элементы этой последовательности будут ограничены по абсолютной величине этим наибольшим значением.

Нам достаточно доказать, что

$$0 = \lim \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right) = \lim \frac{a_n B - b_n A}{b_n B}$$

В силу установленной выше ограниченности последовательности $\frac{1}{b_n}$, нужное нам утверждение вытекает из бесконечной малости произведения ограниченной и бесконечно-малой последовательностей в силу равенства $\lim(a_n B - b_n A) = \lim a_n B - \lim b_n A = AB - BA = 0$. □

Второй замечательный предел Вторым замечательным пределом называется $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, который совпадает с e — основанием натуральных логарифмов.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем следующую лемму, которая является логарифмической формой второго замечательного предела

Лемма 10.8. *Для любой бесконечномалой последовательность* $x_n \to 0$ *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1$$

Доказательство. Действительно, нам известны неравенства

$$\frac{x_n}{1+x_n} \leq \ln(1+x_n) \leq x_n$$

Деля эти неравенства на x_n и переходя к пределу в полученных неравенствах, с помощью леммы о милиционерах получаем нужный результат. $\square$

Теорема 5 (о пределе логарифмов). *Последовательность положительных чисел x_n, сходится к положительному числу x в том и только том случае, когда последовательность логарифмов $\ln x_n$ сходится к $\ln x$*

Доказательство.

$$\ln x_n - \ln x = \ln\frac{x_n}{x} = \ln\left(1+\frac{x_n-x}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{x_n-x}{x}\right)}{\frac{x_n-x}{x}}\frac{x_n-x}{x}$$

Откуда в силу леммы 10.8, следует, что бесконечная малость разности $x-x_n$ равносильна бесконечной малости разности логарифмов $\ln x_n - \ln x$. $\square$

Теорема 6 (о пределе степени). *Пусть $x_n \to x > 0$, $y_n \to y$. Тогда $x_n^{y_n} \to x^y$*

Доказательство. В силу теоремы **5** достаточно доказать, что последовательность логарифмов $\ln(x_n^{y_n}) = y_n \ln x_n$ сходится к $y \ln x$. Это так в силу теоремы о пределе произведения и равенства $\lim \ln x_n = x$, обеспечиваемого все той же теоремой **5**. $\square$

Теперь, обещанный результат, о том что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет пределом основание натуральных логарифмов вытекает из следующего, более общего результата

Теорема 7. *Для любого действительного числа x последовательность $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ сходится и $\ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x$*

Доказательство. Сходимость последовательности $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ в силу теоремы о непрерывности логарифма равносильна сходимости последовательности ее логарифмов. А последовательность логарифмов $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ сходится к x в силу леммы 10.8. Поэтому доказательство завершается ссылкой на теорему о пределе логарифмов. $\square$

Задачи.

1. Дать определение бесконечно большой последовательности $a_n \to +\infty$
2. Доказать, что сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей является бесконечно большой.
3. Доказать, что если $a_n \to +\infty$ и $c > 0$, то $a_n \to +\infty$.
4. Доказать, что если $a_n \to +\infty$, то $\sqrt{a_n} \to +\infty$.
5. Доказать, что если $a_n \to +\infty$, то $\frac{1}{a_n} \to 0$.
6. Доказать, что предел частного равен частному пределов
7. Доказать, что предел степени равен степени пределов.

11 Ряд и предел

Начнем мы с установления связи между понятием суммы ряда и понятием предела.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *сходится абсолютно, то* $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Доказательство. Если члены ряда суть положительные числа, то при любом положительном ε разность $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k - \varepsilon$ не может ограничивать сверху все частичные суммы ряда. Значит, для некоторого n будет выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k > \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k - \varepsilon$. Тогда при любом $m > n$ имеем неравенства $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k \sum\limits_{k=1}^{m} z_k > \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k - \varepsilon$, откуда получаем, что для разность между полной суммой и частичной является бесконечно-малой последовательностью.

Если все z_k вещественны, то $z_k = z_k^+ - z_k^-$. В силу теоремы о сумме-разности пределов имеем

$$\lim \sum_{k=1}^{n} z_k^+ + \lim \sum_{k=1}^{\infty} (-z_k^-) = \lim \sum_{k=1}^{n} (z_k^+ - z_k^-) = \lim \sum_{k=1}^{n} z_k, \tag{11.1}$$

А так как $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^+ = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k^+$ и $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^- = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k^-$ в силу леммы **??**, то левая часть в (11.1) равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, что доказывает теорему для вещественного случая.

Тогда в общем случае имеем $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k$ и $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Im} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k$. Поэтому из теоремы о сумме пределов получаем $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k + i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. □

Таким образом мы выяснили, что понятие бесконечной суммы сводится к понятию предела последовательности. Для монотонных последовательностей возможно и обратное сведение. А именно, предел монотонной последовательности x_n совпадает с суммой $x_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$. Таким образом сходимость ряда разностей монотонной последовательности равносильна сходимости самой последовательности.

Теорема 2 (о пределе монотонной последовательности)**.** *Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. Рассмотрим случай неубывающей последовательности. Для числа x обозначим через $x[k]$ его k-ую после запятой цифру десятичной записи (цифры до запятой обозначаются отрицательными k). Тогда последовательность $x_n[k]$ при фиксированном k стабилизируется, то есть становится постоянной, начиная с некоторого номера. Действительно, ведь каждое изменение этой последовательности означает увеличение целой части числа $10^k x_n$ как минимум на единицу. Но эта последовательность ограничена.

Следовательно, для любого k существует номер $N(k)$, начиная с которого $x_n[k]$ не меняется. Обозначим через $X[k]$ это значение, на котором стабилизируется k-ая цифра и обозначим через X число, которое своей k-ой цифрой имеет $X[k]$. Тогда при n большем чем $\max_{j\le k} N(j)$, у X и x_n совпадают все цифры вплоть до k-ой цифры после запятой, поэтому $|X - x_n| < 10^{-k}$ откуда видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$.

Аналогично доказывается теорема в случае невозрастающей последовательности.

□

Приведенные ранее доказательства Эйлера опирается на интуитивные понятия бесконечно-малой и бесконечно-большой величин. Эти понятия трудно формализовать, и наиболее тонким моментом в доказательстве является замена бесконечного числа слагаемых на бесконечно-мало отличающиеся от них. Следующий пример показывает, что вообще говоря, этого делать нельзя:

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

Если подставить в это равенство бесконечно большое n, то мы увидим, что сумма бесконечного числа бесконечно-малых может быть единицей. Поэтому доказательство Эйлера неполно. Изложенная ниже теория, созданная два века спустя после Эйлера замечательным немецким математиком Вейерштрассом, позволяет восполнить все пробелы в рассуждениях Эйлера.

Теорема 3 (Вейерштрасс)**.** *Если сходится ряд максимумов модулей бесконечно-малых последовательностей, то почленная сумма этих последовательностей является бесконечно-малой.*

Доказательство. Пусть дана двойная последовательность $\{x_n^j\}_{j,n=1}^{\infty}$, с конечной суммой максимумов $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| < \infty$, в которой бесконечно-малыми является при фиксированном j являются последовательности $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть дано положительное ε. Конечность суммы ряда максимумов позволяют фиксировать такое натуральное N, для которого

$$\sum_{j=N}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| < \varepsilon/2 \tag{11.2}$$

Далее для любого $j < N$ в силу бесконечно-малости $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ найдется такое N_j, что при $n > N_j$.

$$|x_n^j| < \frac{\varepsilon}{2N} \tag{11.3}$$

Пусть M равно максимуму из N_j $(j < N)$ Тогда для любого $n > M$ из неравенств (11.2) и (11.3) вытекает следующая оценка суммы

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_n^j\right| \le \left|\sum_{j=1}^{N-1} x_n^j\right| + \left|\sum_{j=N}^{\infty} x_n^j\right| \le \sum_{j=1}^{N-1} |x_n^j| + \sum_{j=N}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| \le$$
$$\le \frac{(N-1)\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Откуда и вытекает бесконечная малость последовательности сумм $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_n^j$.

□

Назовем *отклонением* сходящейся последовательности $\{z_n\} \to a$ максимум из модулей разностей $|z_n - a|$

Теорема 4 (о пределе суммы ряда)**.** *Пусть дана двойная последовательность $\{x_n^j\}$, такая что*

1. *при любом j существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^j$*
2. *сходится ряд пределов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} x_n^j$.*
3. *и сходится ряд отклонений $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j - \lim\limits_{n\to\infty} x_n^j|$*

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J} x_n^j = \sum_{j\in J} \lim_{n\to\infty} x_n^j,$$

(в частности предел слева существует).

Доказательство. Нам нужно доказать, что бесконечно-малой (по n) является разность

$$\sum_{j\in J} x_n^j - \sum_{j\in J} \lim_{n\to\infty} x_n^j = \sum_{j\in J} (x_n^j - \lim_{n\to\infty} x_n^j),$$

что вытекает из теоремы о сумме ряда бесконечно-малых. □

Применение теоремы Вейерштрасса

Теорема 5. *Для любого (комплексного или вещественного) z существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ и имеет место равенство*

$$\lim \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Доказательство. k-ый член бинома $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ равный $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}\frac{z^k}{n^k}$ при $n \to \infty$ стремится к $\frac{z^k}{k!}$, потому что в этом случае $\frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \to 1$. Отклонение k-го члена от его предела по абсолютной величине не превосходит этого предела. Поэтому требуемое равенство вытекает из теоремы Вейерштрасса. □

Доказательство Формулы Эйлера. Формула Муавра позволяет при любом натуральном n написать равенство

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

Раскрывая степень справа по биному Ньютона, получаем выражение

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cos^{n-k}\frac{\varphi}{n} i^k \sin^k\frac{\varphi}{n} \tag{11.4}$$

Далее Эйлер подставляет в это выражение $n = \infty$ и пользуется тем, что бесконечно малая дуга равна своему синусу и имеет косинусом единицу. В результате выражение (11.4) при бесконечно большом n имеет то же значение, как и следующее

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \frac{\varphi^k i^k}{n^k} \tag{11.5}$$

А так как при бесконечно большом n будет $\frac{n^{\underline{k}}}{n^k} = 1$, то последнее выражение при бесконечно большом n превращается в

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}$$

Оценки косинуса. Так как длина хорды не превосходит длины соответствующей дуги окружности, то при любом x справедливо неравенство

$$\sin x < x \tag{11.6}$$

Так как $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, то неравенство (13.1), ввиду того, что $\sqrt{y} > y$ при $y \in [0, 1]$ позволяет получить такую оценку снизу для $\cos x$ при $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\cos x \geq 1 - x^2 \tag{11.7}$$

Лемма 11.1. *Если* $\lim x_n = 0$*, то* $\lim \cos x_n = 1$

Доказательство. Так как $1 \geq \cos x_n \geq 1 - x_n^2$, то наше утверждение вытекает из леммы о милиционерах. □

Но для доказательства формулы Эйлера нам потребуется более сильное утверждение

Лемма 11.2. *При любом* x *имеет место равенства*

$$\lim \cos^n \left(\frac{x}{n}\right) = 1$$

Доказательство. Теперь для применения леммы о милиционерах достаточно доказать, что

$$\lim \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$$

. Применяя биномиальное разложение, получаем

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{n^{2k}} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \tag{11.8}$$

Заменяя члены суммы на большие их по абсолютной величине члены геометрической прогрессии, получаем следующую оценку

$$\left| \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n - 1 \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{n^k} < \frac{x^2}{n} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n}}$$

Последнее выражение, (представляющее сумму бесконечной геометрической прогрессии) очевидно, имеет своим пределом ноль. □

Выражению Эйлера "синус бесконечно-малой дуги равен дуге"на языке теории последовательностей соответствует следующее утверждение.

Теорема 6 (первый замечательный предел)**.** *Если* $\lim x_n = 0$*, то*

$$\lim \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

Доказательство. Если дуга лежит в первой четверти, то любая вписанная ломаная имеет длину не превосходящую суммы длин ее координатных проекций. Поэтому это неравенство сохранится при переходе к пределу, то есть будет справедливо и для длины дуги. То есть получаем такое неравенство

$$x \leq \sin x + (1 - \cos x) = \sin x + 2\sin^2 \frac{x}{2} \tag{11.9}$$

В результате для x_n из первой четверти получаем следующие неравенства

$$1 - \frac{2\sin^2 \frac{x_n}{2}}{x} \leq \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

и лемма о милиционерах дает нужный результат. □

Доказательство формулы Эйлера. На языке теории пределов подстановка бесконечно большого значения натурального параметра в формулу интерпретируется как предельный переход, при стремлении заменяемого параметра к бесконечности. Таким образом этот основной шаг доказательства Эйлера соответствует следующему равенству

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cos^{n-k} \frac{\varphi}{n} i^k \sin^k \frac{\varphi}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k i^k}{k!} \tag{11.10}$$

Из проведенных выше рассмотрений нетрудно вывести следующее

Лемма 11.3. *Для любого k имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cos^{n-k} \frac{\varphi}{n} i^k \sin^k \frac{\varphi}{n} = \frac{\varphi^k i^k}{k!}$$

Доказательство. Действительно, из леммы 11.2 вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \cos^{n-k} \frac{\varphi}{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{\varphi}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \cos^k \frac{\varphi}{n}} = 1 \tag{11.11}$$

(при этом равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^k \frac{\varphi}{n} = 1$ следует уже из леммы 11.1)

Из теоремы о первом замечательном пределе получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^k i^k \sin^k \frac{\varphi}{n} = i^k \varphi^k \tag{11.12}$$

И,наконец, нетрудно видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{k! n^k} = \frac{1}{k!} \tag{11.13}$$

Действительно, равенство $\lim \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} = 1$ следует из теоремы о пределе произведения, поскольку дробь $\frac{n^{\underline{k}}}{n^k}$ является произведением k дробей вида $\frac{n-i}{n}$ $(i \leq k)$, каждая из которых стремится к единице.

Наконец, перемножая равенства (11.11), (11.12) и (11.13) получаем нужный результат. □

Для завершения доказательства осталось убедится в применимости теоремы Вейерштрасса.

Лемма 11.4. *При любом n имеет место неравенство*

$$\left| \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cos^{n-k} \frac{\varphi}{n} i^k \sin^k \frac{\varphi}{n} \right| \leq \frac{|\varphi^k|}{k!}$$

Доказательство. Действительно, для доказательства этого неравенства достаточно заменить косинусы единицами а синусы — значениями их аргументов. Получившееся выражение по модулю будет превосходить исходное и примет вид

$$\left| \frac{n^{\underline{k}} i^k}{k!} \frac{|\varphi|^k}{n^k} \right|$$

Если же теперь заменить $n^{\underline{k}}$ на превосходящее его n^k, то с учетом того $|i| = 1$ мы получим требуемое неравенство. □

Задачи.

1. Образец Нахождение методом авторекурсии предела $\lim\limits_{n\to\infty} fracn2^n$ двумя способами $n \to (n+1)$, $n \to 2n$ и доказательство сходимости через монотонность. Лучше пример $\lim 1/n$.
2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ (найти и доказать существование)
3. $\lim \frac{n^2}{2^n}$ (найти и доказать существование)
4. $\lim \sqrt[n]{n}$ (найти и доказать существование)
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ (найти и доказать существование)
6. $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ (найти и доказать существование) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
7. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$ (найти и доказать существование) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$ (найти и доказать существование)
9. Доказать, что член сходящегося ряда стремится к нулю
10. Объясните почему теорема о сумме ряда бесконечно-малых не применима в случае парадокса представления единицы в виде суммы бесконечно-малых $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$

12 Производная

Определение производной. Понятие производной функции соответствует физическому понятию "мгновенной скорости"в случае, когда аргументом функция служит время, а значение функции измеряет пройденный путь. Ньютон использовал для этого понятия термин "флюксия".

Термин "производная"был введен в математику Лагранжем, который определял производную функции $f(x)$, представленной степенным рядом, в точке x_0 как значение отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x = x_0$. При подходе Лагранжа вначале нужно выполнить (формальное) деление степенного на $x - x_0$ и уже в полученный в результате деления ряд подставить значение $x = x_0$, избегая тем самым деления на ноль.

Позднее Коши распространил это понятие далеко за пределы степенных рядов. Производная функции в точке была определена им как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{12.1}$$

При этом запись $\lim\limits_{x \to a} f(x_n)$ является сокращением записи $\lim\limits_{x_n \to a} f(x)$ для любой последовательности x_n, стремящейся к a.

Теорема о производной монотонной функции. Функции, имеющие в некоторой точке производную как предельное отношение, называются *дифференцируемыми* в точке, и функции дифференцируемые во всех точках промежутка называются дифференцируемыми на этом промежутке.

Следующая теорема демонстрирует смысл производной как скорости изменения функции

Теорема 1. *Функция дифференцируемая на интервале и, имеющая положительную (неотрицательную) производную, возрастает (неубывает).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ функция, производная которой на интервале (a, b) положительна. Предположим $f(a_1) \geq f(b_1)$ для некоторых $a_1 < b_1$ из (a, b). Построим последовательность вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ со стремящимися к нулю длинами, для которых $f(a_k) \geq f(b_k)$ для любого k.

Для построения $k + 1$-го отрезка делим пополам k-ый и выбираем в качестве $k + 1$-го ту половину, для которой значение в левом конце больше либо равно значения в правом.

Обозначим через p общую точку всех отрезков. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p-a_n}{p-a_n} = f'(p) > 0$, то $\frac{p-a_n}{p-a_n} > 0$ для n, начиная с некоторого N_1. Откуда при $n > N_1$, ввиду положительности $p - a_n$ получаем неравенство $f(a_n) > f(p)$. С другой стороны $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n-p}{b_n-p} = f'(p) > 0$ и $b_n - p > 0$, поэтому для n, начиная с некоторого N_2 получаем неравенство $f(b_n) > f(p)$. В таком случае при n большем максимума из N_1 и N_2 получаем $f(b_n) > f(p) > f(a_n)$ вопреки неравенству $f(a_k) \geq f(b_k)$ согласно которому проводилась построение последовательности вложенных отрезков. □

Если производная у функции $f(x)$ тождественный ноль, то и $f(x)$ и $-f(x)$ невозрастают в силу теоремы. Отсюда следует, что $f(x)$ постоянна. Из доказанной теоремы вытекает такое очень важное следствие.

Следствие 2. *Производная функции на промежутке тождественно равна нулю в том и только том случае, когда функция на этом промежутке постоянна.*

Другое полезное следствие из доказанной теоремы представляет следующая лемма.

Лемма 12.1. *Если при любом $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $|f'(x)| \leq c$, то при любых $x, y \in (a, b)$ справедливо неравенство $|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$.*

Доказательство. Пусть для определенности $x > y$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда производная функции $f(x) + (c+\varepsilon)x$ равная $f'(x) + (c+\varepsilon)$ положительна и функция возрастает согласно теореме **1**. В частности получаем неравенство $f(x)+(c+\varepsilon)x > f(y)+(c+\varepsilon)y$, из которого следует $f(x)-f(y) < (c+\varepsilon)(x-y)$. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ получаем неравенство $f(x) - f(y) \leq c(x - y)$. То же самое рассуждение проведенное для $-f(x)$ дает неравенство $-f(x) - (-f(y)) \leq c(x - y)$, равносильное следующему $f(x) - f(y) \geq c(x - y)$. Последнее вместе с ранее полученным дают $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ □

Производная суммы.

Теорема 3. *Сумма дифференцируемых функций дифференцируема и производная суммы равна сумме производных.*

Доказательство. Так как сумма разностных отношений равна разностному отношению суммы, то это немедленно следует из теоремы о сумме пределов. □

Теорема 4 (о дифференцировании ряда)**.** *Если ряд производных $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f'_k()$* мажорируется *числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ в интервале (a, b), и сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ для некоторого $x_0 \in (a, b)$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ сходится при любом x к функции $F(x)$, производная которой равна $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$.*

Доказательство. Во-первых, ряд разностей $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(f_k(x) - f_k(x_0))$ абсолютно сходится, потому что мажорируется рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k|z - z_0|$ в силу леммы 12.1. Поэтому сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Далее для любого k справедливо неравенство

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq c_k$$

Поэтому, если мы возьмем последовательность x_n сходящуюся к x_0, то суммарное отклонение последовательностей отношений от их пределов-производных конечно. По теореме Вейерштрасса в таком случае существует предел суммы ряда отношений и он равен сумме пределов. □

Производная произведения.

Лемма 12.2. *Если функция $f(x)$ дифференцируемая в точке x_0, то для любой последовательности $x_n \to x_0$ последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.*

Доказательство.

$$f(x_n) - f(x_0) = (x_n - x_0)\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

Дифференцируемость $f(x)$ обеспечивает существование предела отношения в правой части вышеприведенного тождества. Следовательно, предел правой части равен $0 \cdot f'(x_0) = 0$. Откуда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) + \lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$. □

Теорема 5. *Произведение дифференцируемых функций дифференцируемо и производная произведения вычисляется по правилу Лейбница:*

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Доказательство.

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

Переход к пределу при $x \to x_0$ в вышеприведенном тождестве дает в левой части производную произведения. Первое слагаемое в правой части имеет пределом $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)g'(x_0)$ А второе — $g(x_0)f'(x_0)$.

□

Следствие 6. *Производная степенной функции x^n с натуральным показателем равна nx^{n-1}.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по степени n с использованием правила дифференцирования произведения. □

Производная степенного ряда.

Лемма 12.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Доказательство. Докажем монотонность последовательности $\frac{\ln n}{n}$. А именно, докажем неравенство

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Домножение на знаменатели с последующим потенцированием преобразует это неравенство в эквивалентное

$$n^{n+1} > (n+1)^n$$

Раскрытие правой части по биному дает единицу и еще n слагаемых типа $\frac{n^k}{k!}n^{n-k}$, которые меньше чем n^n. Поэтому их сумма меньше чем $n \cdot n^n = n^{n+1}$. Итак, последовательностей отношений логарифмов монотонно убывает и ограничена снизу нулем. Значит она, также как ее подпоследовательность $\frac{\ln n^2}{n^2}$ имеют одинаковый предел. Откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

□

Теорема 7 (о производной степенного ряда)**.** *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f(z)$ *абсолютно сходится для* $|z| < R$. *Тогда при любом* z *по модулю меньшем* R

1. *сумма ряда* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *дифференцируема*

2. *абсолютно сходится ряд производных* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kz^{k-1}$

3. *имеет место равенство* $f'(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kz^{k-1}$

Доказательство. Зафиксируем z_0 и r_0 так что $|z_0| < r_0 < R$. Возьмем r такое что $r_0 < r < R$. По условию имеем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = A < \infty$. Сравним этот ряд почленно с рядом производных $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k|a_k|r_0^{k-1}$. Сходимость ряда производных следует из выполнения неравенств $r^k > kr_0^{k-1}$ для достаточно большого k. Положим $\frac{r}{r_0} = q$ тогда нужное нам неравенство примет вид $q^k > r_0 k$. Переходя к логарифмам, получаем равносильное неравенство $k \ln q > \ln r_0 + \ln k$, которое преобразуется в

$$\frac{\ln k}{k} < \ln q - \frac{\ln r_0}{k}$$

Так как $q > 1$ правая часть имеет положительный предел, а левая — нулевой, в силу вышедоказанной леммы. Поэтому, начиная с некоторого k левая часть будет меньше правой. Тем самым доказана сходимость ряда производных и более того, мажорируемость окончания ряда производных в круге $|z| < r_0$ числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$. Поэтому по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда получаем нужный результат. □

Следствие 8. *Производная экспоненты — экспонента.*

13 Формула Тэйлора

Высшие производные Если производная пути является скоростью, то производная скорости является *ускорением.* А согласно закону Ньютона ускорение определяется силой, действующей на тело. Таким образом имеет смысл рассматривать производную производной, которая называется второй производной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Далее производная от второй производной будет обозначаться $f'''(x)$ или $f^{(3)}(x)$. И вообще k-ая производная функции определяемая как производная ее $(k-1)$- ой производной обозначается $f^{(k)}(x)$.

С помощью высших производных выражаются коэффициенты степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Теорема 1 (Тэйлора)**.** *Коэффициенты степенного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *выражаются через, представляемую им функцию* $f(z)$ *по формулам*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Доказательство. k-кратное дифференцирование равенства $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ с последующей подстановкой $z = z_0$ дает нужный результат. $\square$

Оценка остаточного члена.

Лемма 13.1. *Если* $f(x_0) = g(x_0)$ *и* $f'(x) \le g'(x)$ *при всех* $x \in [a, b]$*, то и* $f(x) \le g(x)$ *при всех* $x \in [x_0, b]$ *и* $f(x) \ge g(x)$ *при всех* $x \in [a, x_0]$.

Доказательство. Функция $g(x) - f(x)$ имеет неотрицательную производную и, следовательно, не убывает на $[a, b]$. Следовательно, при любом $x > x_0$ будет $g(x) - f(x) \ge g(x_0) - f(x_0) = 0$, а при $x < x_0$ будет $g(x) - f(x) \le g(x_0) - f(x_0) = 0$. $\square$

Многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется *многочленом Тэйлора* (степени n) функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ $n+1$ *раз и ее* $(n+1)$*-производная на этом отрезке не превосходит* M*, то при любых* $x, x_0 \in [a, b]$ *имеет место неравенство:*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \le M(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство. Доказательство ведем индукцией по степени многочлена Тэйлора. Для $n = 1$ утверждение доказано на прошлой лекции. Пусть утверждение справедливо для $n \ge 1$. Рассмотрим $n+2$ раза дифференцируемую функцию $f(x)$ с $(n+2)$ производной ограниченной по модулю величиной M. Тогда производная $f'(x)$ при $x > x_0$ удовлетворяет предположению индукции и для нее справедливо неравенство

$$f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}(x - x_0)^k \le \frac{M}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Пусть $g(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x - x_0)^k$. Тогда левая часть приведенного выше неравенства равна $g'(x)$, а правая равна производной от $r(x) = \frac{M}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2}$. Так как $g(x_0) = r(x_0) = 0$, то на основании леммы заключаем $g(x) \le r(x)$ при $x > x_0$. А это как раз то что требовалось для $x > x_0$. Для $x < x_0$ аналогичное противоположное неравенство доказывается на основании той же леммы. Вместе они дают требуемое. □

Длина кривой. Тригонометрические функции определяются как функции длины дуги. Поэтому для работы с ними требуется разобраться с понятием длины кривой. Длина кривой определяется как наименьшее число превосходящее длины всех вписанных в нее ломаных. Так как любая вписанная ломаная имеет длину больше, чем прямолинейный отрезок, соединяющей ее концы, то и вообще любая кривая имеет длину больше, чем прямолинейный отрезок, соединяющей ее концы. Это простое соображение позволяет для длин кривых получать оценки снизу.

В частности, длина хорды окружности не превосходит длины соответствующей дуги окружности. Так как длина хорды, стягивающей дугу окружности длины x равна $2\sin\frac{x}{2}$, то при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ справедливо неравенство

(13.1) $$\sin x \le x$$

Следующая теорема позволяет для длины кривой давать оценку сверху.

Теорема 3. *Длина графика монотонной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не превосходит суммы $|a - b| + |f(a) - f(b)|$.*

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ суть проекции вершин вписанной в график функции $f(x)$ ломаной. Пусть для определенности функция возрастает. Тогда длина ее k-го звена оценивается сверху суммой $(f(x_k) - f(x_{k-1})) + (x_k - x_{k-1}$. Суммирование этих неравенств дает требуемое. □

Так как первая четверть единичной окружности представляет собой график монотонной функции $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, то дуга длины x с правым концом на оси абсцисс проектируется на отрезок $[\cos x, 1]$ оси абсцисс и разность значений функции в концах этого отрезка равна $\sin x$. Поэтому на основании теоремы **3** получаем неравенство:

(13.2) $$x \le \sin x + (1 - \cos x) = \sin x + 2\sin^2\frac{x}{2}$$

Первый замечательный предел.

Теорема 4. *Если* $\lim x_n = 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

Доказательство. Поскольку $\frac{\sin x}{x}$ четная функция, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin|x_n|}{|x_n|}$, постольку не теряя общности можем считать, что x_n положительны. Так как $\lim x_n = 0$, то при n больших некоторого N справедливо неравенство $x_n < \frac{\pi}{2}$. Для таких n справедливы неравенства

$$1 - \frac{2\sin^2\frac{x_n}{2}}{x} \leq \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

$\square$

и лемма о милиционерах дает нужный результат.

Производные и ряды синуса и косинуса. Используя формулу разности синусов, находим производную синуса

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - sinx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2\cos(x+\Delta x/2)\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2} = \cos x$$

действительно, ведь $\cos(x+\Delta x/2) - \cos x = -2\sin\Delta x/4\sin(x+\Delta x/4) \to 0$. Таким образом получаем, что производная $\sin x$ равна $\cos x$. Аналогичные вычисления для косинуса приводят к результату $\cos' x = -\sin x$. Поэтому высшие производные косинуса и синуса всегда оказываются равными $\pm\sin x$ и $\pm\cos x$. В частности, отсюда следует, что все они по модулю не превосходят единицы. Поэтому разность между $\sin x$ и его многочлен Тэйлора степени n всегда оценивается сверху стремящейся к нулю при $n\to\infty$ величиной $\frac{(x-x_0)^n}{n!}$. Поэтому ряд Тэйлора для синуса в любой точке x_0 сходится к $\sin x$ при любом x. В частности для $x_0 = 0$ все четные производные синуса обращаются в ноль, а нечетные равны по очереди 1 и -1. Поэтому разложение синуса по степеням x имеет вид:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{13.3}$$

Аналогично, для косинуса получаем следующее:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{13.4}$$

Производная сложной функции Дифференцировать и разлагать в степенные ряды все остальные элементарные функции помогает следующая теорема.

Теорема 5. *Если существуют $f'(x)$ и $g'(f(x))$, то композиция $g(f(x)$ дифференцируема в x и имеет производную равную*

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$$

Доказательство. Пусть $f(x) = y$, и существуют производные $f'(x)$ и $g'(y)$.

Сначала предположим, что $g'(y) = 0$. Пусть $x_n \to x$ и $f(x_n) \neq f(x)$ для любого n. Тогда для любого n имеем равенство

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_n))}{x - x_n} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_n))}{f(x) - f(x_n)} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}$$

Поскольку $f(x_n) \to f(x)$ (лемма 12.2), постольку обе дроби в правой части равенства имеют пределы, причем первый из них равен нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(f(x)) - g(f(x_n))}{x - x_n} = 0 \tag{13.5}$$

Если же последовательность x_n такова, что постоянной является $g(x_n) = g(x)$, то равенство (13.5) тем более верно. Произвольную последовательность $x_n \to x$ можно разбить на две последовательности: первая состоит из тех ее членов, для которых $f(x_n) \neq f(x)$, а вторая — из остальных. Тогда равенство (13.5) выполняется для обеих частей, а потому выполняется и для всей последовательности x_n.

Таким образом теорема доказана в случае, если в нуль обращается $g'(y)$.

В общем случае нулю в y равна производная функции $G(y) = g(y) - g'(y_0)y$. Поэтому из вышедоказанного вытекает, что $G(f(x))$ дифференцируема в x_0 и имеет нулевую производную. Но тогда $g(f(x)) = G(f(x)) + g'(y_0)f(x)$ является суммой дифференцируемых в x_0 функций и потому дифференцируема в x_0 и имеет производную равную $(G(f(x)))' + (g'(y_0)f(x))' = 0 - g'(y_0)f'(x_0)$. □

Производная и ряд логарифма. Второй замечательный предел позволяет найти производную натурального логарифма.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

Функция x^α при произвольном показателе выражается как композиция $\exp(\alpha \ln x)$. Ее дифференцирование как сложной функции дает $\exp(\alpha \ln x)\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. Это позволяет нам найти n-ую производную логарифма и получить для него разложение в степенной ряд при $|x| < 1$

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

известное как *ряд Меркатора.*

Задачи.

1. Найти производную от $\ln x$
2. Найти производную от a^x
3. Найти производную от x^a

4. Разложить $\ln(1+x)$ по степеням x
5. Разложить в степенной ряд $\arcsin x$
6. Найти минимум функции $x \ln x + (1-x)\ln(1-x)$ на отрезке $[0,1]$
7. Доказать при $x > 0$ неравенство $\sin x > x - x^3/6$
8. Доказать для $x \in (0, \pi/2)$ неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$
9. Что больше e^π или π^e ?
10. Вычислить сотую производную от $\frac{1}{x^2-3x+2}$

14 Непрерывность. Нули и экстремумы.

Применять производную для нахождения экстремальных значений многочленов первым додумался Пьер Ферма.

Теорема 1. *Производная функции в точке локального максимума (минимума) равна нулю.*

Доказательство. Пусть $f(x_0) \geq f(x + \Delta x)$ при $\Delta x < \varepsilon > 0$. Вычисляя производную $f'(x_0)$ как предел последовательности отношений $\frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}}$, мы получаем неотрицательное число, как предел последовательности неотрицательных чисел. С другой стороны эту же производную можно вычислить как предел последовательности отношений $\frac{f(x_0-\frac{1}{n})-f(x_0)}{-\frac{1}{n}}$, все члены которой неположительны. В результате $f'(x_0) = 0$. $\square$

Опираясь на теорему Ферма, Ролль доказал, что между любыми двумя нулями многочлена лежит ноль его производной. А именно, если $x_0 < x_1$ являются нулями многочлена, то или максимум или минимум многочлена достигаются внутри интервала (x_0, x_1) а согласно теореме Ферма в этих точках производная равна нулю. Для строгого доказательства этой теоремы Ролля нам нужно доказать достижимость экстремальных значений для многочлена. Для этого мы разовьем общую теорию непрерывных функций.

Непрерывные функции. *Непрерывной* называется функция, если любому бесконечно-малому изменению аргумента, соответствует бесконечно-малое изменение функции.

Конкретнее, функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x*, если для любой бесконечно-малой последовательности δx_n бесконечно-малой является последовательность $f(x) - f(x + \delta x_n)$.

Функция, непрерывная во всех точках отрезка, называется непрерывной на отрезке.

Лемма 14.1. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке a в том и только том случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Эта очевидная лемма позволяет легко доказать следующие свойства непрерывных функций. Мы оставляем это читателю в виде упражнения.

Как видно из следующей теоремы, непрерывными являются все дифференцируемые функции.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ дифференцируемая в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Рассмотрим сходящуюся к x_0 последовательность $x_n \to x_0$. Имеет место тождество

$$f(x_n) - f(x_0) = (x_n - x_0)\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Существование $f'(x_0)$ обеспечивает существование предела отношения в правой части вышеприведенного тождества. Следовательно, предел правой части равен $0 \cdot f'(x_0) = 0$. Откуда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) + \lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Из известных нам свойств пределов немедленно вытекает такая теорема.

Теорема 3. *Сумма, произведение и композиция непрерывных функций непрерывны. Частное непрерывных функций непрерывно если делитель не обращается в ноль.*

Для монотонных функций непрерывность по существу равносильна обратимости.

Теорема 4 (Больцано-Коши)**.** *Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков: $f(a)f(b) < 0$, то $f(x)$ обращается в ноль на интервале (a, b).*

Доказательство. Заметим, что если функция знакопеременна на некотором отрезке, то она или обращается в нуль в середине отрезка или знакопеременна на одной из его половин. Действительно, если функция не обращается в нуль в центре отрезка, то на отрезке найдется точка, в которой функция принимает значение противоположного знака и эта точка принадлежит одной из половин отрезка. Именно на этой половине функция будет знакопеременной.

Поэтому последовательным делением пополам можно построить бесконечную вложенную последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, таких что $f(a_n)f(b_n) < 0$. Тогда точка c, являющаяся пересечением этой последовательности, является общим пределом $= \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Из непрерывности функции получаем $0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f(c)^2$ откуда $f(c) = 0$. □

Следствие 5. *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет вещественный корень.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен нечетной степени $P(x) = x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}$. Пусть A равно максимуму из модулей его коэффициентов. Тогда при $|x| = 2nA$ будет $|x^{2n+1}| > |a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}|$, откуда $P(2nA) > 0$ и $P(-2nA) < 0$. По теореме о промежуточных значениях отсюда вытекает, что $P(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \in (-2nA, 2nA)$. □

О монотонной подпоследовательности.

Лемма 14.2. *Всякая последовательность вещественных чисел содержит монотонную подпоследовательность.*

Доказательство. Предположим сначала, что рассматриваемая последовательность $\{x_n\}$ не имеет наибольшего члена. Теперь по индукции мы можем определить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ так что $n_1 = 1$ и $x_{n_{k+1}}$ определяется как член с наименьшим номером большим n_k, для которого $x_{n_{k+1}} > x_{n_k}$. Это построение дает монотонно возрастающую подпоследовательность в любой последовательности без наибольшего элемента. Значит возрастающая подпоследовательность может быть построена в данной последовательности и в том случае, когда она содержит какую-нибудь подпоследовательность без наибольшего члена. В этом случае построение проводится в этой подпоследовательности. Наконец, если всякая подпоследовательность в $\{x_n\}$ имеет наибольший элемент, то мы определим в ней невозрастающую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ так что x_{n_1} — наибольший член всей последовательности, а $x_{n_{k+1}}$ определяется как наибольший член подпоследовательности $\{x_n\}_{n \geq n_k}$. □

Замкнутость. Граничной точкой множества называется точка, находящаяся на нулевом расстоянии как от множества, так и от дополнения. Множество, содержащее свою границу называется замкнутым, а не содержащее ни одной граничной точки — открытым. На языке последовательностей замкнутое множество может быть определено как такое множество, для которого предел любой сходящейся последовательности его точек ему принадлежит.

Теорема 6. *Всякая непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве плоскости ограничена.*

Доказательство. Предположение неограниченности функции $f(x)$ на множестве S позволяет построить последовательность точек плоскости $\{z_n\}$, таких что неограниченно и монотонно возрастала $|f(z_n)|$. Переходя к подпоследовательностям в силу леммы 14.2 мы можем добиться, чтобы и вещественные и мнимые части последовательности z_n были монотонными. Если S ограничено, то обе эти последовательности имеют пределы. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$. Из замкнутости S этот предел принадлежит S. Но $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ не существует в силу выбора последовательности z_n. Мы пришли к противоречию показывающему, что на замкнутом ограниченном множестве всякая непрерывная функция ограничена. $\square$

Теорема 7 (Вейерштрасса об экстремальных значениях)**.** *Вещественная функция $f(x)$ непрерывная на замкнутом ограниченном множестве S принимает на нем свои экстремальные значения, как максимум так и минимум.*

Доказательство. Пусть $\overline{S}$ обозначает наименьшее число, ограничивающее сверху $f(S)$. Если $\overline{S} = f(x)$ для некоторого $x \in S$, то в x достигается максимум функции. В противном случае функция $\frac{1}{\overline{S}-f(x)}$ будет непрерывной и неограниченной функцией на S. Аналогично доказывается достижимость минимума. $\square$

Основная теорема алгебры.

Лемма 14.3. *Пусть непостоянный многочлен $f(z)$ принимает в 0 наименьшее по модулю значение в круге $|z| < \varepsilon$. Тогда $f(z_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $f(z) = a_0 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots + a_n z^n$, где a_k — первый ненулевой коэффициент при $k > 0$. Предположим противное, что $|a_0| \neq 0$. Выберем ε столь маленьким, чтобы при $m > k$ были выполнены неравенства

$$|a_m \varepsilon^m| < |a_k|/2n \tag{14.1}$$

Суммирование этих неравенств при $|z| < 1$ позволяет получить следующее неравенство

$$|f(z) - a_0 - a_k z^k| \leq |z|^{k+1} |a_k|/2 \tag{14.2}$$

Пусть $a_0 = r_0 e^{i\varphi}$ и $a_k = re^{i\psi}$. Тогда для $z = \varepsilon e^{i(-\varphi-\psi)/k}$ аргументы у a_0 и $a_k z^k$ противоположны и потому имеет место равенство

$$|a_0 + a_k z^k| = |a_0| - |a_k z^k| \tag{14.3}$$

Применение полученных выше соотношений дает с учетом того, что $|z| < 1$ такую цепочку неравенств

$$|f(z)| \leq |f(z) - a_0 - a_k z^k| + |a_0 + a_k z^k| \leq |z|^{k+1}|a_k|/2 + |a_0| - |a_k z^k| < |a_0|,$$

которая влечет противоречие с предположением о минимальности модуля $f(0) = a_0$. □

Теорема 8. *Всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Доказательство. Пусть $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$. Максимум из модулей коэффициентов обозначим через A. Так что при любом k имеем $|a_k| \leq A$. Пусть $R = 2An$. Тогда при $|z| = R$, с учетом того что $A \geq 1$ получаем такую оценку
(14.4)
$$|P(z)| \geq |z^n| - |a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n| \geq R^n - nAR^{n-1} = R^{n-1}nA > |a_n|$$

Таким образом мы видим, что значение многочлена в нуле по модулю меньше чем любое его значение на границе круга. Стало быть наименьшего значения в круге $|z| \leq R$ многочлен достигает во внутренней точке z_0. В точке z_0 он имеет локальный минимум модуля для круга $|z - z_0| < R - |z_0|$. Тогда многочлен $P(z + z_0)$ удовлетворяет условиям леммы 14.3. В силу этой леммы $P(z_0) = 0$. □

Задачи.

1. Докажите что дифференцируемая функция комплексного переменного, принимающая только вещественные значения постоянна.

2. Доказать, что функция непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества заммкнут.

3. Комплексная теорема Ролля. Комплексная функция вещественного переменного между любыми двумя нулями содержит или ноль вещественной части или ноль производной.