Лекции по анализу в СУНЦ.
Интегралы.

Е. В. Щепин

январь–апрель 2011 года

Оглавление

1 Интеграл Лейбница

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, согласно Лейбницу, представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно-малых слагаемых, индексированных точками x отрезка $[a,b]$. Слагаемые в этой сумме имеют вид произведения конечной величины $f(x)$, зависящей от точки x, на бесконечно-малую величину dx, называемую *дифференциалом* переменной x. Бесконечно-малая величина dx предполагается имеющей фиксированное (не зависящее от точки x) значение. Согласно Лейбницу то, что мы называем "точками"числовой прямой, на самом деле являются бесконечно-малыми отрезками, длины которых равна дифференциалу dx. При этом суммарная длина этих точек-отрезков, принадлежащих данному интервалу $[a,b]$ как раз и равна длине этого интервала. Таким образом, получается следующее *основное правило интегрирования*:

$$\int\limits_a^b dx = b - a \tag{1.1}$$

Согласно этой логике количество слагаемых в указанном интеграле представляет собой бесконечно-большую величину $\frac{b-a}{dx}$. Если все слагаемые в сумме одинаковы и равны cdx, то их сумму логично предполагать равной произведению их количества на величину одного слагаемого $cdx\frac{b-a}{dx} = c(b-a)$. Таким образом мы приходим к следующему *правилу интегрирования постоянной*:

$$\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a) \tag{1.2}$$

По аналогии с рядами, следует ожидать, что интегралы удовлетворяют следующим *правилам сложения и умножения*:

$$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{1.3}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx \tag{1.4}$$

Наконец, следующее *правило деления* интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx, \tag{1.5}$$

уже позволяет формально, методом авторекурсии, вычислять интегралы $\int\limits_0^1 x^n\,dx$. Рассмотрим для примера интеграл $\int\limits_0^1 x\,dx$. Отщепим от него кусочек:

$$\int\limits_0^1 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx.$$

Замена индекса суммирования $x \to x+\frac{1}{2}$ превращает интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx$ в равный ему $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} (x+\frac{1}{2})\,dx$. Действительно, справедливо следующее общее *правило сдвига переменной*:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx, \tag{1.6}$$

аналогичное правилу сдвига индексов для сумм рядов. В его обоснование можно заметить, что между слагаемыми обоих интегралов имеется взаимно-однозначное соответствие: слагаемому $f(x)dx$ с индексом x в левом интеграле соответствует слагаемое с индексом $x+c$ в правом, которое также равно $f(x)dx$. Таким образом два интеграла состоят из одних и тех же слагаемых и мы вправе рассчитывать на их равенство. Правило сдвига вместе с правилами сложения и интегрирования константы позволяют провести такое вычисление:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} (x+\frac{1}{2})\,dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{d} x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\ dx = \frac{1}{2} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx \tag{1.7}$$

Откуда получаем

$$\int\limits_{0}^{1} x\,dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x\,dx + \frac{1}{2} \tag{1.8}$$

Для получения уравнения авторекурсии нам нужно научиться делать замену переменной, изменяющую длину промежутка интегрирования. Простейшей заменой такого типа является растяжение $x \to kx$ с некоторым коэффициентом k. Итак, попробуем сделать замену переменной $y = kx$ в интеграле $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$. Если x меняется от a до b, то y меняется от ka, до kb и наш интеграл превращается в $\int\limits_{ka}^{kb} f(y)\,dy$. Теперь, казалось бы, мы вправе просто заменить в полученном выражении y на x. Разве не все ли равно какой буквой обозначить индекс суммирования? Оказывается это не все равно. Величина дифференциала dy оказывается отличной от dx. Действительно, гомотетия с коэффициентом k меняет размеры всех отрезков, умножая их на k. Это относится и к бесконечно-малым отрезкам! Поэтому образом отрезка длины dx будет отрезок длины $dy = kdx$. Таким образом мы приходим к следующему правилу замены переменной:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = k\int\limits_{ka}^{kb} f(x/k)\,dx. \tag{1.9}$$

Вот почему Лейбницу было важно считать точки прямой бесконечно-малыми отрезками! Точки не имеют размера и гомотетия не меняет их. Теперь мы достаточно вооружены, чтобы получить уравнение авторекурсии для интеграла $\int\limits_0^1 x\,dx$. А именно, замена переменной $y = 2x$ позволяет получить соотношение

$$\int\limits_0^1 x\,dx = 4\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\,dx.$$

Это соотношение вместе с равенством (1.8) позволяют получить: $\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Интегралы от степеней $\int\limits_0^1 x^n\,dx$ можно посчитать методом авторекурсии по той же схеме, по которой был выше посчитан $\int\limits_0^1 x\,dx$. Замена переменной $y = ax$ позволяет получить значение интеграла $\int\limits_0^a x^n\,dx$, зная значение $\int\limits_0^1 x^n\,dx$. А так как $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_0^b f(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx$, то мы можем посчитать все интегралы типа $\int\limits_a^b x^n\,dx$. Это дает принципиальную возможность вычисления интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для функций, разложения которых в степенные ряды нам известны.

Интегралы и неравенства. Если интеграл — это сумма, то логично ожидать, что увеличение всех слагаемых влечет увеличение суммы. Это приводит нас к следующему *правилу интегрирования неравенств*:

(1.10) Если $f(x) \geq g(x)$ при любом $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Интегральные суммы Правила интегрирования неравенств и констант вместе с правилом деления интегралов позволяют любой интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ посчитать с любой степенью точности.

Разбиение отрезка интегрирования $[a,b]$ на части, порождаемое последовательностью $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, дает представление интеграла по $[a,b]$ в виде суммы интегралов по его частям

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt$$

для любого слагаемого справа справедливы неравенства

$$(x_k - x_{k-1}) \min f[x_{k-1}, x_k] \leq \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt \leq (x_k - x_{k-1}) \max f[x_{k-1}, x_k]$$

Поэтому исходный интеграл заключен между двумя суммами: *верхней интегральной суммой* $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \max f[x_{k-1}, x_k]$ и *нижней интегральной суммой* $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \min f[x_{k-1}, x_k]$. Причем разность между верхней и нижней суммами для монотонной функции не превосходит $|f(b) - f(a)| \max(x_k - x_{k-1})$. Поэтому при измельчении разбиений разность между верхними и нижними интегральными суммами стремится к нулю, поэтому как те так и другие стремятся к интегралу.

Дифференциал функции На самом деле это формула не вполне точная. Она представляет собой лишь *относительное равенство* в следующем смысле: две величины считаются относительно равными, если их отношение бесконечно-мало отличается от единицы. Но этого хватает для вычисления интегралов в силу следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $F(x, dx)$ и $G(x, dx)$ представляют собой относительно равные бесконечномалые величины, тогда их интегралы по любому промежутку отличаются на бесконечномалую величину.*

Доказательство. Предположим сначала, что все рассматриваемые величины положительны. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b F(x, dx) \leq \int\limits_a^b G(x, dx) + \varepsilon$$

Поскольку для любого большего единицы q справедливы неравенства $F(x) \leq qG(x)$, то интегрирование этих неравенств с использованием дистрибутивности интегрирования дает неравенства

$$I(F) = \int\limits_a^b F(x) \leq q \int\limits_a^b G(x) = qI(G)$$

откуда при $q < 1 + \varepsilon/I(G)$ следует обещанное. Аналогично доказывается противоположное неравенство. В результате, разность $|I(F) - I(G)| < \varepsilon$ для любого положительного стандартного ε. Откуда и следует бесконечная малость этой разности. □

Доказанная теорема обосновывает *правило пренебрежения* при вычислении дифференциалов, по которому бесконечно-малыми величинами можно пренебрегать по сравнению с конечными. Например, вычисляя по формуле (**??**) дифференциал функции x^n, получаем

$$dx^n = (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + C_n^2 x^{n-2}(dx)^2 + \cdots = nx^{n-1}dx$$

Последнее равенство относительное и означает, что отношение его левой и правой частей отличается от единицы на бесконечномалую величину.

Геометрические применения. Метод неделимых Применения анализа бесконечномалых к геометрическим задачам определения площадей и объемов были разработаны Кавальери под именем *метода неделимых*. Название метода исходит из принципа существования бесконечномалых неделимых элементов континуума. Но на самом деле для применения метода важна не собственно неделимость элементов континуума, а их бесконечная малость, выводимая из их неделимости. Ссылка на существование неделимых позволяет избежать конкретизации процесса получения разбиения на бесконечномалые элементы.

Кеплеру принадлежит следующее доказательство теоремы Архимеда о том, что площадь кругового сектора OPQ (O — центр окружности) равна половине произведения его радиуса $R = OP = OQ$ на длину дуги PQ, на которую он опирается.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетом AB длины R и катетом AC равным длине дуги PQ. Тогда нам нужно доказать равновеликость ABC и OPQ. Разделим катет BC и дугу PQ на бесконечно большое число бесконечномалых отрезков последовательным делением пополам. Так что между получившимися элементами разбиения имелось взаимно однозначное соответствие и длины всех элементов были одинаковы. Назовем элементарным треугольником (сектором) треугольник (сектор) с вершиной A (соотв. O), основанием которого служит элементарный бесконечномалый отрезок (дуга окружности). Тогда сумма (интеграл) площадей элементарных треугольников равен площади треугольника ABC, а сумма (интеграл) площадей элементарных секторов равна площади сектора OPQ. А так как площадь элементарного треугольника отличается от площади элементарного сектора на бесконечномалую второго порядка, то их суммы-интегралы отличаются на бесконечномалую величину. Что и требовалось доказать.

Чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком положительной функции $f(x)$ а снизу отрезком $[a, b]$ оси абсцисс разделим этот отрезок на бесконечно большое число бесконечномалых отрезков. Пусть dx обозначает длину бесконечномалого отрезка, расположенного в точке x. Тогда площадь криволинейной трапеции с основанием в этом бесконечно малом отрезке обозначаемая ds будет отличаться от $f(x)dx$, выражающую площадь прямоугольника с основанием dx и высоты $f(x)$ на бесконечномалую величину второго порядка ($< df(x)dx$). Поэтому суммарная площадь этих бесконечномалых прямоугольников, выраженная интегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ совпадает с точностью до бесконечномалых первого порядка с площадью криволинейной трапеции.

В частности, интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$ выражает площадь под параболой $y = x^n$ над отрезком $[a, b]$. А так как $\frac{dx^{n+1}}{n+1}$ как нетрудно видеть отличается от $x^n dx$ на бесконечномалые высших по отношению dx порядков, то и интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$ лишь на бесконечномалую величину отличается от $\frac{1}{n+1}\int\limits_a^b dx^{n+1} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. Таким образом анализ бесконечномалых позволяет легко решить задачу о квадратуре парабол.

При этом рассуждении равномерность разбиения отрезка интегрирования не использовалась. Поэтому оно проходит и для неравномерных разбиений. В частности, если x является функцией другой переменной $x(t)$. Поэтому интеграл Стильтьеса $\int\limits_{t_0}^{t_1} y(t)\,dx(t)$ также выражает соответствующую площадь.

Дифференциал функции $f(t)$ в точке t обозначается через $df(t)$ и выражает собой изменение значения функции на бесконечно малом интервале длины dt соответствующем числу t. Величина дифференциала зависит от величины dt и, следовательно, зависит от рассматриваемого разбиения интервала. Но независимо от типа разбиения в силу принципа интегрируемости имеет место равенство

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a) \tag{1.11}$$

Интегралом можно выразить также и объем пространственного тела. Предположим, что нам известно функция $s(t)$, выражающая площадь сечения этого тела горизонтальной плоскостью на высоте h. Тогда интеграл $\int\limits_a^b s(h)\,dh$ выражает объем тела, в случае, если оно заключено по высоте между a и b. Действительно, легко видеть, что отличие между объемом цилиндра высоты dh с основанием являющимся сечением тела плоскостью на высоте h и частью тела с высотами из h-го отрезка разбиения является бесконечномалой второго порядка.

Задачи.

1. Выразить интегралом площадь фигуры в полярных координатах.
2. Найти геометрический смысл интеграла $\int |df(x)|$.
3. Найти геометрический смысл интеграла $\int g(x)df(x)$.
4. Найти геометрический смысл интеграла $\int(g(x)df(x) - f(x)dg(x)$.

2 Интеграл и производная

Первообразная. Функция $F(z)$ имеющая в качестве производной функцию $f(z)$ называется ее *первообразной* и обозначается обозначается символом *неопределенного интеграла* $\int f(z)dz$. Понятие первообразной позволяет по новому определить определенный интеграл $\int_a^b f(z)\,dz$ как разность первообразной $F(b) - F(a)$ на концах отрезка. Это определение не зависит от выбора первообразной, которая определена, как нам известно, с точностью до константы. Покажем, что для непрерывной функции $f(z)$ ее квадратура совпадает с интегралом, вычисленным через первообразную.

Определение интеграла через разность значений первообразной

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2.1}$$

распространяется и на случай $b < a$. Таким образом мы приходим к следующему равенству

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{2.2}$$

которое можно понимать как определение интеграла с верхним пределом меньшим нижнего.

При таком определении интеграла свойство *интервальной аддитивности*:

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt \tag{2.3}$$

выполняется без всяких ограничений на порядок точек a, b, c.

Существование первообразной у непрерывной функции.

Лемма 2.1 (о среднем). *Для непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ найдется такая точка ξ, для которой $f(\xi)(b-a)$ равно S — площади под графиком $f(x)$ над $[a, b]$.*

Доказательство. Если предположить, что всегда $f(x) > S/(b-a)$, то под графиком $f(x)$ окажется прямоугольник размером $S/(b-a)\times(b-a)$ площади S, а потому площадь под графиком окажется больше чем S, что невозможно. Аналогично доказывается, что неравенство $f(x) < S/(b-a)$ не может быть выполнено всегда. В результате есть точки, в которых выполнено одно неравенство, а есть — в которых другое. По теореме о промежуточных значениях есть точка в которой выполнено равенство. □

Теорема 1. *Всякая непрерывная на промежутке (a, b) функция $f(x)$ имеет на нем первообразную.*

Доказательство. Сначала рассмотрим положительную функцию $f(x)$. Зафиксируем точку $x_0 \in (a, b)$ данного промежутка. Определим $F(x)$ как площадь под графиком $f(x)$ над сегментом $[x_0, x]$, если $x > x_0$ и определим ее как взятую с минусом площадь под графиком $f(x)$ над сегментом $[x, x_0]$, если $x < x_0$.

Пусть $f(x)$ является непрерывной положительной функцией на промежутке (a, b). Зафиксируем точку $x_0 \in (a, b)$ и обозначим через $F(x)$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $f(x)$, а снизу отрезком с концами x_0 и x, если $x > x_0$ и эту же площадь, но взятую со знаком минус, если $x < x_0$. Докажем, что $F'(x) = f(x)$.

Применяя лемму о среднем к отрезку $[x, x+\Delta_n x]$, получаем точку x_n из этого интервала, для которой $f(x_n)$ равно отношению приращения площади под графиком к длине интервала, то есть

$$f(x_n) = \frac{F(x + \Delta_n x) - F(x)}{\Delta_n x}$$

Если $\Delta_n x$ сходится к нулю, то x_n сходится к x. Непрерывность $f(x)$ влечет сходимость левой части вышеприведенного равенства к $f(x)$. Следовательно, $F'(x) = f(x)$.

Для неположительной функции $f(x)$ рассмотрим ее положительную $f^+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$ и отрицательную $f^+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$ части. Если $f(x)$ непрерывна, то непрерывны и ее части $f^\pm(x)$. По доказанному выше они имеют первообразные $F^\pm(x)$. Тогда $F^+(x) - F^-(x)$ является первообразной для $f(x)$. $\square$

Геометрическое определение интеграла. Далеко не всякая функция имеет первообразную. Например, функция $[x]$ не имеет первообразной ни на каком интервале содержащем целые точки. Тем не менее понятие интеграла для этой функции, как и для любой *кусочно-непрерывной* определить можно, если исходить из следующего определения интеграла, обобщающего понятие интеграла Ньютона-Лейбница на очень широкий класс функций.

В общем случае интеграл от функции равен разности площадей ее подграфика и надграфика, где подграфиком называется часть плоскости, ограниченная снизу осью абсцисс и сверху графиком функции, а надграфиком — часть плоскости ограниченная сверху осью абсцисс и снизу графиком функции. Из рассмотрений предыдущего параграфа вытекает, что для непрерывной функции это определение совпадает с определением Ньютона-Лейбница. Для кусочно-непрерывной ограниченной функции на отрезке $[a, b]$ обозначим через $x_1, \dots, x_n$ все попавшие в этот отрезок точки разрыва, занумерованные в порядке возрастания. Положим $x_0 = a$ и $x_{n+1} = b$. Тогда на каждом промежутке (x_k, x_{k+1}) функция имеет первообразную $F_k(x)+c_k$ и можно единственным образом подобрать значения констант c_k, так чтобы ансамбль $\{F_k(x) + c_k\}$ образовал непрерывную функцию, разность значений этой функции в концах отрезка как раз даст геометрическое значение интеграла.

Производная интеграла по верхнему пределу. Пусть $f(x)$ функция, имеющая первообразную $F(x)$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ как функцию верхнего предела $\Phi(b) = F(b) - F(a)$, то есть, зафиксировав нижний предел, меняем верхний, тогда $\Phi'(b) = F'(b) = f(b)$.

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 2 (о замене переменной)**.** *Пусть* $\tau\colon [t_0, t_1] \to [\tau_0, \tau_1]$ *отображение такое что* $\tau(t_0) = \tau_0$ *и* $\tau(t_1) = \tau_1$ *и функции* $f(t)$ *и* $f(\tau(t))\tau'(t)$ *имеют первообразные на* $[t_0, t_1]$*. Тогда справедливо следующее равенство*

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(\tau(t))\tau'(t)\,dt = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau)\,d\tau, \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $F'(\tau) = f(\tau)$, тогда по теореме о производной сложной функции производная суперпозиции $F(\tau(t))$ равна $f(\tau(t))\tau'(t)$. Интеграл в левой части (2.4) представляется разностью $F(\tau_1) - F(\tau_0)$, а правой части — разностью $F(\tau(t_1)) - F(\tau(t_0))$, которые совпадают □

Линейность определенного интеграла. Следующие два свойства интеграла называются *линейностью*

$$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{2.5}$$

$$\int\limits_a^b (f_1(t) + f_2(t))\,dt = \int\limits_a^b f_1(t)\,t + \int\limits_a^b f_2(t)\,dt \tag{2.6}$$

Если $F'(t) = f(t)$, то $(cF(t))' = cf(t)$, откуда вытекает первое равенство. И если $F_i'(t) = f_i(t)$, то $(F_1(t) + F_2(t))' = f_1(t) + f_2(t)$, откуда вытекает второе равенство.

Интегрирование неравенств Если при любом $t \in [a, b]$ выполнено неравенство $f_1(t) \le f_2(t)$, то справедливо интегральное неравенство.

$$\int\limits_a^b f_1(t)\,dt \le \int\limits_a^b f_2(t)\,dt \tag{2.7}$$

Для доказательства рассмотрим оба интеграла как функции верхнего предела. Тогда при $b = a$ оба они равны нулю. А производная первого интеграла, равная $f_1(b)$ не превосходит производной второго, равной $f_2(b)$, при $b > a$, поэтому неравенство (2.7) вытекает из известной нам теоремы прошлого семестра.

Дифференциал и производная. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x и бесконечно-малой последовательности $\Delta_n \to 0$, представляет Лейбницев дифференциал dx независимой переменной x, то Лейбницев дифференциал функции $df(x)$ представляется последовательностью

$\{f(x+\Delta_n)-f(x)\}$, чье отношение к dx имеет пределом производную $f'(x)$. Таким образом для дифференциала Лейбница $df(x)=f(x+dx)-f(x)$ справедливо следующее равенство

$$df(x)=f'(x)dx, \tag{2.8}$$

которое обычно принимают как определение дифференциала при введениии интеграла как первообразной. В соответствии с этим подходом интеграл $\int f(t)dg(t)$ определяется как $\int f(t)g'(t)dt$.

Теорема 3 (формула интегрирования по частям.)**.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно-дифференцируемы, то имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int\limits_a^b g(t)\,df(t) \tag{2.9}$$

Доказательство. Так как по условию все функции и их производные непрерывны, то первообразные имеют произведения $f'(x)g(x)$ и $f(x)g'(x)$ и рассматриваемые интегралы допускают дифференцирование по верхнему пределу. Фиксируем a и рассмотрим левую и правую части этого равенства как функции от b. Производная левой части равна $f(b)g'(b)$, а правой — $(f'(b)g(b)+f(b)g'(b))-g(b)f'(a)$. Так как производные равны функции отличаются на константу. И эта константа равна нулю потому что при $b=a$ они обе равны нулю. □

Задачи.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$
2. $\int xe^{-x}dx$
3. $\int x^5e^{2x^2}dx$
4. $\int x\cos xdx$
5. $\int x^3\ln xdx$
6. $\int e^x\sin xdx$
7. $\int \ln xdx$
8. $\int \operatorname{arctg} xdx$
9. $\int \sin^4 xdx$
10. $\int \frac{dx}{1+x^3}$
11. * $\left(\int\limits_0^1 \frac{\sin kt}{t}\,dt\right)'_k$

3 Гамма функция.

В двадцатилетнем возрасте Эйлер решил проблему *интерполяции факториалов*. То есть ответил на вопрос, что такое $x!$ для нецелого числа x. Он придумал замечательную *гамма-функцию* $\Gamma(x)$, которая при любом x удовлетворяет следующему *функциональному уравнению гамма-функции*, называемому также *формулой понижения*:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{3.1}$$

Так как $\Gamma(1) = 1$, то из формулы понижения по индукции вытекает, что для натурального n будет $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Первая формула, полученная Эйлером для гамма-функции такова:

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}} \tag{3.2}$$

Выпуклые функции. Логарифмирование формулы понижения дает такое функциональное уравнение для функции *логамма* $\Theta(x) = \ln\Gamma(x)$ (так принято называть логарифм гамма-функции):

$$\Delta\Theta(x) = \ln x.$$

То есть логамма телескопирует натуральный логарифм.

Существует много функций, телескопирующих логарифм, но среди них есть только одна *выпуклая*.

Функция f называется *выпуклой* на некотором промежутке, если для любой тройки $x < y < z$ точек этого промежутка выполнено такое неравенство *разностных отношений*:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \tag{3.3}$$

Выпукла любая линейная функция $ax+b$, так как ее разностное отношение постоянно и равно a.

Лемма 3.1. *Сумма (даже бесконечная) выпуклых функций выпукла.*

Доказательство. Это верно потому что разностное отношение суммы функций на $[a, b]$ равно сумме разностных отношений. □

Лемма 3.2. *Для выпуклой функции $f(x)$ разностное отношение $\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ монотонно возрастает с ростом x при фиксированом a*

Доказательство. Если $x > y > a$, то выпуклость $f(x)$ дает нам неравенство $f(y) - f(x) \geq (f(x) - f(a))\frac{y-x}{x-a}$. Добавляя к обеим частям этого неравенства по $f(x) - f(a)$, получим

$$f(y) - f(a) \geq (f(x) - f(a))\left(1 + \frac{y-x}{x-a}\right) = (f(x) - f(a))\frac{y-a}{x-a},$$

откуда после деления на $y - a$ получаем обещанное неравенство для разностных отношений. □

Выпуклость и вторая производная.

Лемма 3.3. *Если $f''(x) \geq 0$ на интервале $[a, b]$, то имеют место неравенства*

$$f'(a) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq f'(b)$$

Доказательство. Так как $f'(x)' \geq 0$, функция $f'(x)$ не убывает на рассматриваемом промежутке. Рассмотрим функцию $g(x) = (f(x) - f(a)) - f'(a)(x - a)$. Ее производная равна $f'(x) - f(a)$ неотрицательна. Следовательно, $g(x)$ не убывает и $g(b) \geq g(a) = 0$. Откуда следует левое неравенство. Правое доказывается аналогично. □

Лемма 3.4. *Если $f(x)$ выпукла на промежутке $[a, b]$, то имеют место неравенства*

$$f'(a) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq f'(b)$$

Доказательство. Так как $f'(b) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}$, для последовательности $x_n = b - \frac{1}{n}$, а все разностные отношения $\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}$ оцениваются снизу отношением $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ в силу леммы 3.2, то и предельный переход сохраняет это неравенство. Аналогично доказывается левое неравенство. □

Теорема 1. *Функция $f(x)$, имеющая вторую производную на промежутке $[a, b]$, выпукла на нем в том и только том случае, когда $f''(x) \geq 0$ для любого x из этого промежутка.*

Доказательство. Пусть $f''(t) \geq 0$. Рассмотрим любую тройку точек $x < y < z$ из данного промежутка. Согласно лемме 3.3 имеем неравенства

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y) \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

которые влекут неравенство разностных отношений означающее выпуклость $f(t)$.

Если функция $f(t)$ выпукла, то при $x < y$ в силу леммы 3.4 получаем неравенства

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y),$$

из которых мы можем заключить, что производная $f'(t)$ является неубывающей функцией. Следовательно, ее производная, то есть вторая производная исходной функции, неотрицательна. □

Так как вторая производная натурального логарифма равна $-\frac{1}{x^2}$, то из доказанной теоремы вытекает выпуклость функции $-\ln(x + a)$ для любой константы a.

Характеризационная теорема Эйлера-Артина.

Теорема 2. *Существует единственная выпуклая функция* $\Theta(x)$*, телескопирующая* $\ln x$ *и принимающая в единице значение* 0*, и эта функция задается формулой*

$$\Theta(x) = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Доказательство. Функция Θ выпукла как предел последовательности выпуклых функций. А функция $\ln \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ выпукла как сумма линейной $\ln n^x n! = x\ln n + \ln n!$ и выпуклых $-\ln(x+k)$.

Пусть $f(x)$ является выпуклой функцией телескопирующей логарифм. Рассмотрим $x \in (0,1)$ и произвольное натуральное n. Если $f(1) = 0$, то $f(n) = \ln(n-1)!$. Выпуклость f дает неравенства

$$\frac{f(-1+n) - f(n)}{-1+n-n} \le \frac{f(x+n) - f(n)}{x+n-n} \le \frac{f(1+n) - f(n)}{1+n-n}$$

Откуда, ввиду равенства $f(n) = \ln(n-1)!$, получается

$$\ln(n-1) \le \frac{f(x+n) - f(n)}{x+n-n} \le \ln n$$

Откуда получаем оценки для $f(x+n)$

$$\ln\left((n-1)^x(n-1)!\right) \le f(x+n) \le \ln\left(n^x(n-1)!\right)$$

Так как $f(x+n) = f(x)x(x+1)\dots(x+n-1) = f(x)x^{\overline{n}}$ получаем оценки для $f(x)$

$$\ln\left((n-1)^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}} \le f(x+n) \le \ln\left(n^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}}$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом n мы и в левой его части можем заменить n на $n+1$. Мы получим тогда

$$\ln\left(n^x n!\right) - \ln x^{\overline{n+1}} \le f(x) \le \ln\left(n^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}}$$

Разность между левой и правой частями этого неравенства составляет $\ln(x+n) - \ln n = \ln(1+\frac{x}{n})$. Мы видим, что разность стремиться к нулю. Поэтому левая и правая части имеют $\Theta(x)$ в качестве общего предела. Следовательно, $f(x) = \Theta(x)$ для x, из интервала $(0,1)$, а потому и для всех x.

$\square$

В качестве непосредственного следствия доказанной характеризационной теоремы для логамма функции вытекает

Теорема 3 (характеризационная)**.** *Существует единственная логарифмически выпуклая функцией, определенной для всех* $x > 0$*, которая удовлетворяет формуле понижения* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *и принимает в единице значение* 1.

Формула удвоения Лежандра. Пусть $G(x) = \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$. Тогда $G(x+1) = \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x}{2}G(x)$. Следовательно $G(x)2^x$ удовлетворяет функциональному уравнению гамма-функции.Так как $G(x)$ логарифмически выпукла, как произведение логарифмически выпуклых функций, то из характеризационной теоремы заключаем, что $G(x)/G(1)$ совпадает с гамма функцией, то есть $\frac{G(x)2^x}{G(1)2^1} = \Gamma(x)$. Меняя x на $2x$ получаем

$$\boxed{\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x+0.5)\Gamma(x)}{\Gamma(0.5)}} \tag{3.4}$$

Задачи.

1. Доказать непрерывность выпуклой функции.
2. Чему равно $\Gamma(0)$ и $\Gamma(-1)$?
3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(x-n)\Gamma(x-n)$
4. Для $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ доказать неравенство Юнга $xy \le \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$
5. Доказать, что $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{x+k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^x = \Gamma(x+1)$
6. Докажите, что $\Delta x^{\underline{k}} = kx^{\underline{k-1}}$ для любых вещественных k, где $x^{\underline{k}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}$
7. Докажите, что $x^{\underline{k+m}} = x^{\underline{k}}(x-k)^{\underline{m}}$.
8. Доказать единственность функции, телескопирующей $\frac{1}{x^2}$ и стремящейся к нулю на бесконечности.
9. Доказать единственность монотонной функции, телескопирующей $\frac{1}{x}$
10. Доказать. что $\Delta\ln x$ — выпуклая функция.
11. Доказать, что функция с положительной второй производной выпукла.
12. Доказать, что произведение положительных монотонно возрастающих выпуклых функций — выпукло.
13. Доказать что функция $x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\cdot e^{\mu(x)}$ совпадает с $\Gamma(x)$, если $\mu(x)$ — выпуклая функция с разностью $\Delta\mu(x) = 1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

4 Эйлеровы интегралы.

Позднее Эйлер нашел также следующее интегральное представление для гамма-функции:

Теорема 1 (Euler)**.** *Для любого* $x \geq 0$ *выполнено равенство* $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Убедимся, что эйлеров интеграл удовлетворяет условиям характеризационной теоремы. Для $x = 1$ интеграл дает $\int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\,|_0^\infty = 1$. Интегрирование по частям $\int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -\int\limits_0^\infty t^x\,de^{-t} = -t^x e^{-t}\,|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-t}xt^{x-1}\,dx$ доказывает, что интеграл удовлетворяет формуле понижения гамма функции. Остается доказать логарифмическую выпуклость интеграла.

Неравенство центра масс. Для тройки точек $x < y < z$ положим $\theta = \frac{z-y}{z-x}$. Тогда $1-\theta = \frac{y-x}{z-x}$. И неравенство разностных отношений $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ при заменах $y - x = (1-\theta)(z-x)$ и $z - y = \theta(z-x)$ превратится в $(1-\theta)(f(z)-f(y)) \leq \theta(f(y)-f(x))$. После приведения подобных, ввиду того, что $y = \theta x+(1-\theta)z$ получаем, что неравенство разностных отношений равносильно следующему *неравенству центра тяжести*:

$$f(\theta x + (1-\theta)z) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(z), \tag{4.1}$$

которое таким образом можно рассматривать как еще одно определение выпуклости функции.

Логарифмическая выпуклость

Теорема 2. *Сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла.*

Доказательство. Логарифмическая выпуклость функций $f(x)$ и $g(x)$ означает справедливость неравенств

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} \qquad g(\theta x + (1-\theta)y) \leq g(x)^\theta g(y)^{1-\theta} \tag{4.2}$$

а логарифмическая выпуклость их суммы означает неравенство

$$f(\theta x + (1-\theta)y) + g(\theta x + (1-\theta)y) \leq (f(x)+g(x))^\theta (f(y)+g(y))^{1-\theta} \tag{4.3}$$

Последнее неравенство можно было получить из суммы первых, если бы удалось доказать следующее неравенство

$$f(x)\theta f(y)^{1-\theta} + g(x)^\theta g(y)^{1-\theta} \leq (f(x)+g(x))^\theta (f(y)+g(y))^{1-\theta} \tag{4.4}$$

И это неравенство верно, как доказано в следующей лемме 4.1. □

Лемма 4.1. *Для любых положительных* a, b, c, d, θ *при* $\theta < 1$ *справедливо неравенство*

$$a^\theta b^{1-\theta} + c^\theta d^{1-\theta} \leq (a+c)^\theta (b+d)^{1-\theta}$$

Доказательство. Положим $x = \frac{a}{a+c}$, $y = \frac{b}{b+d}$, тогда деление исследуемого неравенства на произведение $(a+c)(b+d)$ позволяет привести его к виду

$$x^{\theta} y^{1-\theta} + (1-x)^{\theta}(1-y)^{1-\theta} \le 1 \tag{4.5}$$

Для доказательства последнего зафиксируем y и рассмотрим левую часть неравенства как функцию от x. Производная этой функции имеет вид

$$\theta x^{\theta-1} y^{1-\theta} - \theta(1-x)^{\theta-1}(1-y)^{1-\theta} = \theta\left(\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\theta} - \left(\frac{1-y}{1-x}\right)^{1-\theta}\right)$$

Откуда видно, что при $x < y$ производная положительна, а при $x > y$ — отрицательна. Следовательно, своего максимального значения левая часть неравенства достигает при $x = y$. И это значение равно единице. □

Лемма 4.2. *Предел последовательности логарифмически выпуклых функций является логарифмически выпуклым.*

Доказательство. Предоставляется читателю. □

Лемма 4.3. *Пусть функция двух переменных $f(x,t)$ логарифмически выпукла при фиксированном t и имеет ограниченную производную по t на промежутке $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x,t)\,dt$ логарифмически выпукло зависит от x.*

Доказательство. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x,t_k)(t_k - t_{k-1})$, где $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ является разбиением исходного отрезка. Эта сумма равна интегралу по $[a,b]$ от функции $f_n(x,t)$, которая на интервале (t_{k-1}, t_k) принимает значение $f(x,t_k)$. Если производная $f'_t(x,t)$ ограничена константой M, а длины отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ не превосходят ε, то разность $|f_n(x,t) - f(x,t)|$ на отрезке $[a,b]$ ограничена величиной εM. Следовательно, разность интегралов $\int\limits_a^b f(x,t)\,dt - \int\limits_a^b f_n(x,t)\,dt$ оценивается сверху величиной $(b-a)\varepsilon M$ и стремится к нулю для измельчающейся последовательности разбиений. Тогда последовательность логарифмически выпуклых сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x,t_k)(t_k - t_{k-1})$ стремится к $\int\limits_a^b f(x,t)\,dt$, что и доказывает логарифмическую выпуклость этого интеграла. □

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы **1**. Интеграл Эйлера является пределом интегралов $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$ по конечным промежуткам. Поэтому достаточно доказать логарифмическую выпуклость последних. А интеграл по конечному промежутку $\int\limits_0^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$ удовлетворяет условиям леммы 4.3.

Бета-функция. Бета-функция — это функция двух переменных $B(x,y)$, которая определяется при $x,y>0$ с помощью так называемого эйлерова интеграла первого рода

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{4.6}$$

Проверим, что он действительно сходится при $x,y>0$. Достаточно убедиться в сходимости двух интегралов

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Подинтегральное выражение ≥ 0, поэтому достаточно оценить его сверху на отрезках $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2},1\right]$ функциями $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно, для которых сходятся интегралы $\int_0^{1/2}\varphi(t)dt$ и $\int_{1/2}^1\psi(t)dt$. Если $0\leq t\leq 1$, то при уменьшении показателя α числа $(1-t)^\alpha$ и t^α не уменьшаются. Мы применим это соображение к тому из сомножителей в $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$, который непрерывен на соответствующем отрезке. На отрезке $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ используем, что $(1-t)^{y-1}\leq\frac{1}{1-t}\leq\frac{1}{2}$, на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$ — что $t^{x-1}\leq\frac{1}{t}\leq 2$. Поэтому

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\leq\begin{cases}2t^{x-1} & \text{при } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 2t^{y-1} & \text{при } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

А интегралы $\int_0^{1/2}2t^{x-1}dt$ и $\int_{1/2}^1 2(1-t)^{y-1}dt$ сходятся.

Лемма 4.4. *Для любых положительных x,y справедливо равенство*

$$B(x,y)=B(x+1,y)+B(x,y+1), \tag{4.7}$$

Доказательство. Так как $1=t+(1-t)$, то

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}=t^x(1-t)^{y-1}+t^{x-1}(1-t)^y,$$

и интегрирование по t сразу даёт (4.7). □

Лемма 4.5. *Для любых положительных x,y справедливо равенство*

$$B(x+1,y)=\frac{x}{y}B(x,y+1). \tag{4.8}$$

Доказательство. Интегрирование по частям дает

$$B(x+1,y)=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\int_0^1 t^x d\left(-\frac{(1-t)^y}{y}\right)=$$

$$=-\frac{1}{y}t^x(1-t)^y\Big|_0^1+\frac{1}{y}\int_0^1(1-t)^y dt^x=\frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt=\frac{x}{y}B(x,y+1).$$

□

Из (4.7) и (4.8) сразу получается, что

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y) \tag{4.9}$$

(сперва выражаем $B(x,y+1)$ в (4.7) через $B(x+1,y)$, пользуясь (4.8)).

$x+y$ в знаменателе (4.9) нарушает сходство со с формулой понижения гамма-функции. Чтобы убрать этот знаменатель, умножим $B(x,y)$ на функцию $\Gamma(x+y)$, — она как раз умножается на $x+y$ при увеличении x (а значит, и $x+y$) на 1. Мы приходим к мысли рассмотреть функцию $f(x) = B(x,y)\Gamma(x+y)$ (на её зависимость от y мы не указываем явно, так как y некоторое время будет фиксированным). Эта функция удовлетворяет формуле понижения гамма-функции. И она является логарифмически выпуклой функцией от x как произведение двух логарифмически выпуклых функций: $x \mapsto \Gamma(x+y)$ и $x \mapsto B(x,y)$. Логарифмическая выпуклость последней поверяется с помощью неравенства Коши-Буняковского. Из характеризационной теоремы получаем, что $f(x)$ может отличаться от $\Gamma(x)$ на некоторый постоянный множитель a. А так как на самом деле f зависит также и от y, то и этот множитель надо рассматривать как (пока что неизвестную) функцию от y. Мы доказали, что

$$B(x,y)\Gamma(x+y) = a(y)\Gamma(x) \tag{4.10}$$

Чтобы найти $a(y)$, положим $x=1$. Мы знаем, что $\Gamma(1+y) = y\Gamma(y)$ и $\Gamma(1) = 1$; нам надо ещё выяснить, чему равно $B(1,y)$. Это совсем просто:

$$B(1,y) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{y-1}dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt}\frac{(1-t)^y}{y}dt = -\left.\frac{(1-t)^y}{y}\right|_0^1 = \frac{1}{y}.$$

Собирая всё вместе, получаем $\frac{1}{y}y\Gamma(y) = a(y)\cdot 1$, т.е. $a(y) = \Gamma(y)$. Стало быть,

$$\boxed{B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}} \tag{4.11}$$

В качестве приложения формулы 4.11 мы еще раз вычислим $\Gamma(1/2)$:

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\sin^2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}} =$$
$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \int_0^{\pi/2} 2d\varphi = \pi.$$

А из (4.11) видно, что $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)$. Поэтому

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{4.12}$$

Задачи.

1. Чему равно $\Gamma(0)$ и $\Gamma(-1)$?

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(x-n)\Gamma(x-n)$

3. Для $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ доказать неравенство Юнга

$$xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

4. $\Gamma(x)=\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}^{x-1}\right)\,dt$

5. $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{x}}}\frac{1}{x}\,dt$

6. $\Gamma(1+\frac{1}{x})=\int\limits_0^\infty e^{-t^x}\,dt$

7. $B(x,y)=\int\limits_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$

8. Вычислить $\int\limits_0^1 x^p(1-x^2)^q\,dx$

9. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sqrt{\sin x}\,dx$

10. $\int\limits_0^\infty \frac{t^x}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin\pi x}$

11. $\int\limits_0^{\pi/2}(\operatorname{tg}\varphi)^{2x-1}\,d\varphi=\frac{\pi}{\sin\pi x}$

12. $\int\limits_0^\infty e^{-at}t^{x-1}\,dt=\frac{\Gamma(x)}{a^x}$

13. $\Gamma(x)=\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}^{x-1}\right)\,dt$

14. $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{x}}}\frac{1}{x}\,dt$

15. $\Gamma(1+\frac{1}{x})=\int\limits_0^\infty e^{-t^x}\,dt$

16. $\int\limits_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\sqrt{\pi}}{n\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)}$

17. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{32\pi}}$

18. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}\,dt=\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16\pi}}$

5 Гамма функция и бесконечные произведения.

Формальное телескопирование. Мы снова возвращаемся к задаче по данной функции $f(x)$ найти функцию $F(x)$ такую что $\Delta F = f$. В частности для $f = 0$ любая периодическая функция периода 1 будет решением. В общем случае к любому решению задачи можно добавить 1-периодическую функцию и опять получить решение. Формальное решение задачи дает такая формула

$$F(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} f(x+k) \tag{5.1}$$

Тригамма. Ряд (5.1) сходится для $f(x) = \frac{1}{x^m}$ при $m \geq 2$ и $x \neq -n$ для натурального $n > 1$. В частности, функция

$$\text{₣}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \tag{5.2}$$

называется *тригамма* функцией с разностью $-\frac{1}{(1+x)^2}$. Величина $\text{₣}(0)$ как раз равно сумме ряда обратных квадратов.

Теорема 1. *Если монотонная функция $f(x)$ имеет разность $\Delta f(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, то $f(x) - \text{₣}(x)$ постоянна.*

Доказательство. Во-первых очевидно, что $f(n) - \text{₣}(n)$ — постоянная последовательность. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \text{₣}(x) = 0$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = c$. Из монотонности f вытекает существование предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$. Значит существует и предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \text{₣}(x) = c$. Но периодическая функция имеет предел при $x \to \infty$ только если она постоянна. □

Доказанная теорема позволяет охарактеризовать тригамму как единственную монотонную функцию телескопирующую $-\frac{1}{(1+x)^2}$ и стремящуюся к нулю при $x \to \infty$.

Дигамма. Ряд $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x+k}$, формально телескопирующий $\frac{1}{x}$, расходится. Зато сходится ряд $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}[k \neq 0]\right)$, который также телескопирует $\frac{1}{x}$, потому что добавление постоянной не меняет разности. Действительно,

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+1+k} - \frac{1}{k}[k \neq 0]\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}[k \neq 0]\right) = -\sum_{k=0}^{\infty} \Delta \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x}. \tag{5.3}$$

Функция

$$\digamma(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right) \tag{5.4}$$

называется *дигамма* функцией. Здесь γ — постоянная Эйлера. Монотонность выделяет $\digamma$ среди других функций телескопирующих $\frac{1}{1+x}$.

Теорема 2. *Монотонная дифференцируемая функция, телескопирующая* $\frac{1}{(1+x)}$ *отличается от* $\text{Ꞙ}(x)$ *на константу.*

Доказательство. Предположим $f(x)$ — монотонная функция, телескопирующая $\frac{1}{1+x}$. Для любого $\theta \in [0,1]$ и любого натурального n в силу монотонности $f(x)$ справедливо неравенство $|f(n+\theta)-f(n)| \leq |f(n+1)-f(n)| = \frac{1}{n+1}$. Аналогично $|\text{Ꞙ}(n+\theta) - \text{Ꞙ}(n)| \leq \frac{1}{n+1}$. Откуда для разности $g(x) = f(x) - \text{Ꞙ}(x)$ получаем неравенство

$$|g(n+\theta) - g(n)| \leq |f(n+\theta) - f(n)| + |\text{Ꞙ}(n+\theta) - \text{Ꞙ}(n)| = \frac{2}{n+1}. \tag{5.5}$$

Однако $g(x)$ имеет нулевую разность и, следовательно, является 1-периодической функцией. Поэтому левая часть неравенства (5.5) от n не зависит. Поэтому переход к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$ дает равенство $g(n+\theta) = g(n) = g(1)$ при любом θ, что и доказывает постоянство $f(x) - \text{Ꞙ}(x)$. □

Лемма 5.1. $\text{Ꞙ}' = \text{₣}$.

Доказательство. Чтобы доказать, что $\text{Ꞙ}'(x) = \text{₣}(x)$, рассмотрим $F(x) = \int\limits_1^x \text{₣}(t)\,dt$. Эта функция монотонна потому что $F'(x) = \text{₣}(x) \geq 0$. Далее $(\Delta F)' = \Delta F' = \Delta\text{₣}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$. Откуда $\Delta F = \frac{1}{1+x} + c$, где c постоянна. По теореме **2** получаем $F(x+1) - cx - \gamma = \text{Ꞙ}(x)$. Следовательно, $\text{Ꞙ}(x)' = F'(x+1) + c = \text{₣}(x)$. Это доказывает, что $\text{Ꞙ}'$ дифференцируема и имеет конечную вариацию. так как $\Delta\text{Ꞙ}(x) = \frac{1}{1+x}$ получаем $\Delta\text{Ꞙ}'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$. Мы получаем, что $\text{Ꞙ}'(x) = \text{₣}(x)$ в силу теоремы **1**. □

Телескопирование логарифма. Мы начнем с формального решения $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ln(x+k)$. Чтобы уменьшить расходимость добавим почленно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln k$. Получим $-\ln x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\ln(x+k) - \ln k) = -\ln x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+\frac{x}{k})$. Мы знаем, что $\ln(1+x)$ близок к x, но ряд все еще расходится. Теперь сходимость можно достичь вычитая $\frac{x}{k}$ из k-го члена ряда. Это вычитание меняет разность. Посчитаем разность для $F(x) = -\ln x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\ln(1+\frac{x}{k}) - \frac{x}{k})$. Разность n-го члена ряда есть

$$\left(\ln\left(1+\frac{x+1}{k}\right) - \frac{x+1}{k}\right) - \left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right) =$$
$$\left(\ln(x+k+1) - \ln k - \frac{x+1}{k}\right) - \left(\ln(x+k) - \ln k - \frac{x}{k}\right) = \Delta\ln(x+k) - \frac{1}{k}$$

Следовательно,

$$\Delta F(x) = -\Delta \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\Delta \ln(x+k) - \frac{1}{k}\right) = \tag{5.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\Delta \ln x - \sum_{k=1}^{n}\left(\Delta \ln(x+k) - \frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x - \ln(n+x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) =$$

$$\ln x + \lim_{n\to\infty}(\ln(n) - \ln(n+x)) + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \ln x + \gamma$$

В результате получается следующая формула для функции телескопирующей логарифм:

$$\Theta(x) = -\gamma x - \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right) \tag{5.7}$$

Теорема 3. *Ряд* (5.7) *абсолютно сходится для всех x за исключением отрицательных целых чисел. Он представляет функцию* логамма $\Theta(x)$, *такую что* $\Theta(1) = 0$ *и* $\Delta\Theta(x) = \ln x$.

Доказательство. Неравенство $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ влечет

$$|\ln(1+x) - x| \le \left|\frac{x}{1+x} - x\right| = \left|\frac{x^2}{1+x}\right|. \tag{5.8}$$

Через ε обозначим расстояние от x до ближайшего отрицательного числа. Тогда благодаря (5.8), ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(\left(1+\frac{y}{k}\right) - \frac{y}{k}\right)$ почленно мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{\varepsilon k^2}$. Это доказывает абсолютную сходимость для (5.7).

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln(1+\frac{1}{k})-\frac{1}{k}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) = -\gamma$, то $\Theta(1) = 0$. □

Гамма функция. Эйлерова *гамма функция* $\Gamma(x)$ совпадает с $\exp(\Theta(x))$ в силу характеризационной теоремы, где $\Theta(x)$ — построенная выше функция, телескопирующая логарифм. Потенцирование (5.7) дает представление гамма функции в так называемой *канонической форме Вейерштрасса*:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}} \tag{5.9}$$

Формула дополнения. Из канонической формы Вейерштрасса вытекает

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right\} = \frac{-e^{\gamma x}}{x\Gamma(-x)} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\} = \frac{e^{-\gamma x}}{x\Gamma(x)} \tag{5.10}$$

Можно вычислить много произведений, расщепляя их на части, имеющие каноническую форму (5.10). Например, рассмотрим произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. По формуле разности квадратов преобразуем его к виду $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x}{n\pi})^{-1}(1+\frac{x}{n\pi})^{-1}$. Вводя множители $e^{\frac{x}{n\pi}}$ и $e^{-\frac{x}{n\pi}}$, получаем каноническую форму

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)e^{-\frac{x}{n\pi}}\right\}^{-1} \tag{5.11}$$

Теперь мы применяем (5.10) для $\frac{x}{\pi}$ вместо x. Первое произведение из (5.11) равняется $-\frac{x}{\pi}\Gamma(-x/\pi)e^{-\gamma x/\pi}$, а второе есть $\frac{x}{\pi}\Gamma(x/pi)e^{\gamma x/\pi}$. Так как согласно формуле понижения $\Gamma(1-x/\pi)=-\frac{x}{\pi}\Gamma(-x/\pi)$, получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=-\frac{x}{\pi}\Gamma(-x/\pi)e^{-\gamma x/\pi}\frac{x}{\pi}\Gamma(x/pi)e^{\gamma x/\pi}=\Gamma(1-x/\pi)\frac{x}{\pi}\Gamma(x/pi)$$

Так как произведение в левой части, как доказал Эйлер, равно $\frac{\sin x/\pi}{x/\pi}$, то полученная формула при замене x на $x\pi$ превращается в следующую *формулу дополнения* для гамма-функции:

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}} \tag{5.12}$$

Задачи.

1. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{2x}{n}\right)\left(1-\frac{3x}{n}\right)$
2. Вычислить $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
3. Вывести формулу дополнения для гамма-функции из разложения синуса в бесконечное произведение.
4. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\left(1+\frac{1}{n^4}\right)$
5. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$
6. Вычислить $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$
7. Доказать $\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi}$.

6 Комплексный логарифм и интеграл.

Натуральный логарифм по существу определялся как интеграл $\int \frac{dx}{x}$. Таким же интегралом определяется и комплексный логарифм. Но прежде нам нужно определить, что же такое интеграл от комплексной функции.

Криволинейный интеграл Интеграл от комплексной функции вещественного переменного определяется раздельным интегрированием ее вещественной и мнимой частей.

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + i\int\limits_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt \tag{6.1}$$

Пусть теперь $f(z)$ и $g(z)$ представляют собой пару функций комплексного переменного. В отличие от вещественного случая, для того, чтобы определить интеграл $\int\limits_a^b f(z)\,dg(z)$ недостаточно указать начало и конец интегрирования. В комплексном случае нужно также указать *путь* интегрирования, то есть отображение вещественного интервала в комплексную плоскость $p\colon I \to \mathbb{C}$. Интеграл от дифференциальной формы $f(z)\,dg(z)$ вдоль пути p обозначается $\int\limits_p f(z)\,dg(z)$ и определяется посредством следующего равенства:

$$\int\limits_p f(z)\,dg(z) = \int\limits_a^b f(p(t))g'(p(t))p'(t)\,dt \tag{6.2}$$

Таким образом комплексный интеграл по любому пути сводится к вещественным интегралам.

Зависимость от параметризации. Если два пути без самопересечений $p_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ и $p_2\colon [a',b'] \to \mathbb{C}$ имеют один и тот же образ, то композиция $p_2^{-1}p_1$ определяет монотонное отображение $\tau\colon [a,b] \to [a',b']$ так что $p_1(t) = p_2(\tau(t))$. Если τ возрастающее, то для любой дифференциальной формы соответствующие криволинейные интегралы совпадают

$$\int\limits_{p_1} f(z)\,dg(z) = \int\limits_a^b f(p_1(t))g'(p_1(t))p_1'(t)\,dt = \int\limits_a^b f(p_2(\tau(t)))g'(p_2(\tau(t)))(p_2(\tau(t)))'\,dt$$

Но последний интеграл расщепляется на вещественную и мнимую часть, представляющие собой вещественные интегралы, для которых справедлива теорема о замене переменной интегрирования. Замена $\tau(t)$ на τ преобразует этот интеграл к виду

$$\int\limits_{a'}^{b'} f(p_2(\tau))g'(p_2(\tau))(p_2(\tau))'\,d\tau = \int\limits_{p_2} f(z)\,dg(z)$$

Если же τ убывает, то она меняет местами концы отрезков $\tau(a) = b'$ и $\tau(b) = a'$. Поэтому полученный интеграл имеет противоположный знак. Таким образом интегралы от одного и того же пути пройденного в одном направлении совпадают, а в противоположных направлениях — имеют противоположные знаки.

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1. *Для любой комплексно-дифференцируемой функции $f(z)$, определенной вдоль гладкого пути $p(t)\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\int_p f'(z)\,dz = f(p(b)) - f(p(a)) \tag{6.3}$$

Доказательство.

$$\int_p f'(z)\,dz = \int_a^b f'(z(t))\,dz(t) = \int_a^b f'(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b f(z(t))'\,dt =$$
$$= \int_a^b \operatorname{Re} f(z(t))'\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f(z(t))'\,dt =$$
$$= \operatorname{Re} f(p(b)) - \operatorname{Re} f(p(a)) + i(\operatorname{Im} f(p(b)) - \operatorname{Im} f(p(a))) = f(p(b)) - f(p(a)).$$

□

Логарифм Так как $(z^n)' = nz^{n-1}$, то на основании формулы Ньютона-Лейбница мы можем заключить $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

Особый случай представляет интеграл от формы $\frac{dz}{z}$. Рассмотрим представленный в полярных координатах путь $p(t) = r(t)e^{it}$, $t \in [0,T]$, с началом $p(0) = 1$ и концом в точке $p(T) = Z$. Тогда

$$\int_p \frac{dz}{z} = \int_0^T \frac{dr(t)e^{it}}{r(t)e^{it}} = \int_0^T \frac{e^{\ it}dr(t)}{r(t)e^{it}} + i\int_0^T \ dt = \ln|Z| + i\arg Z \tag{6.4}$$

Таким образом $\int \frac{dz}{z}$ по дуге окружности с раствором φ оказывается равным $i\varphi$. И, в частности, интеграл по полной окружности дает $2\pi i$. Интегралы по путям, с совпадающими началом и концом, называются *контурными* и имеют специальное обозначение: $\oint$. Применяя это обозначение, мы можем записать следующее равенство:

$$\boxed{\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i} \tag{6.5}$$

Где интеграл берется по любому замкнутому пути, один раз обходящему начало координат против часовой стрелки.

Интеграл вращения. Пусть $p(t)$ представляет собой замкнутый путь, не проходящий через точку z_0. Вещественную часть следующего интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_p \frac{dz}{z_0 - z} \tag{6.6}$$

мы будем называть *вращением* пути $p(t)$ относительно точки z_0, а сам интеграл *интегралом вращения.*

Лемма 6.1. *Вращение замкнутого пути всегда целое число.*

Доказательство. Действительно, согласно лемме (**??**) имеем представление $p(t) - z_0 = r(t)e^{i\varphi(t)}$, $t \in [0, l]$, где $r(t) = |p(t) - z_0|$ и $p(l) = p(0)$. Поэтому

$$\oint_p \frac{dz}{z_0 - z} = \int_0^l \frac{r'(t)e^{i\varphi(t)} + ir(t)e^{i\varphi(t)}\varphi'(t)}{r(t)e^{i\varphi(t)}}\, dt = \tag{6.7}$$

$$\int_0^l d\ln r(t) + \int_0^l i\, d\varphi(t) = \ln r(l) - \ln r(0) + i(\varphi(l) - \varphi(0))$$

А так как $r(0)e^{i\varphi(0)} = r(l)e^{i\varphi(l)}$, то $\varphi(l) - \varphi(0) = 2\pi k$ для целого k. $\square$

Топология плоскости. *Граница* плоского множества определяется как множество точек в любой окрестности которых имеются как точки самого множества, так и точки его дополнения. Ограниченную область плоскости, граница которой представляет собой кривую, являющуюся образом непрерывного замкнутого пути называют *односвязной.* Мы будем считать очевидными следующие утверждения, которые, действительно, легко проверить для конкретных областей, с которыми обычно имеют дело, и которые остаются верными в очень широких предположениях, но требуют в общем случае значительных усилий для строгих доказательств.

1. Всякие две точки односвязной области можно соединить ломаной целиком лежащей внутри области
2. Всякие две точки, лежащие за пределами односвязной области, можно соединить ломаной целиком лежащей вне области
3. Всякую точку области можно соединить со всякой точкой дополнения путем пересекающим ее границу ровно один раз.

Лемма 6.2. *Интеграл* $\int\limits_{p(t)} \frac{dz}{z_0 - z}$ *непрерывно зависит от* z_0 *при фиксированном пути интегрирования.*

Доказательство. Если путь помещается в полуплоскости проходящей через z_0, интеграл $\int\limits_{p(t)} \frac{dz}{z_0 - z}$ равен величине угла с вершиной в z_0, стороны которого проходят через начало и конец пути. Малое изменение z_0 мало меняет этот угол. В общем случае путь можно разбить на несколько кусков, каждый из которых помещается в полуплоскость. Тогда интеграл по всему разобьется в сумму интегралов его кусков, каждый из которых непрерывно зависит от z_0. Поэтому и весь интеграл непрерывно зависит от z_0 как сумма непрерывных функций. $\square$

Теорема 2. *Пусть D представляет собой односвязную область, границу которой ∂D обходит замкнутый путь. Тогда интеграл $\oint_{\partial D} \frac{dz}{z_0 - z}$ равен нулю для любой точки z_0 за пределами D и равен $2\pi i$ для любой точки внутри D.*

Доказательство. Если точка z_1 находится на вещественной прямой левее проекции D, то для любого $z \in D$ разность $z - z_1$ представляются в тригонометрической с помощью главного значения аргумента. Поэтому интеграл вращения от $\frac{dz}{z_1 - z}$ по любому пути содержащемуся в D равен разности главных значений аргумента конца и начала пути, и по замкнутому пути интеграл равен нулю. Таким образом есть точка z_1 вне D с нулевым интегралом вращения. Любую другую точку z_2 вне D можно связать с z_1 непрерывным путем $z(t)$. Так как интеграл вращения границы D относительно $z(t)$ меняется непрерывно в зависимости от t и принимает при этом только целые значения, то из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции вытекает, что этот интеграл постоянен. Следовательно, интеграл вращения равен нулю для всех точек вне D. Аналогичные соображения показывают что интеграл вращения одинаков для всех точек внутри D.

Поэтому осталось разобраться как меняется интеграл вращения при пересечении границы D. Не теряя общности рассуждений можно предположить, что область D пересекает отрезок $[-1, 1]$ по его правой половине $(0, 1]$,а начало координат принадлежит границе области. Таким образом $-\varepsilon \notin D$ и $\varepsilon \in D$ для любого малого положительного ε. Обозначим через $p_1(t)$ путь проходящий небольшой (скажем,диаметра меньшего единицы) кусок границы D, содержащий пересечение границы области D с отрезком $[-1, 1]$ и обозначим через $p_2(t)$ путь дополняющий $p_1(t)$ до замкнутого пути обходящего всю границу D и находящийся на положительном расстоянии от начала координат. Пусть A и B являются началом и концом $p_1(t)$ и концом и началом пути $p_2(t)$. Для вычисления интеграла вращения пути $p_1(t)$ относительно точки $z_0 = -\varepsilon$ мы можем воспользоваться главным значением аргумента, ибо $z_0 - p_1(t)$ не пересекает отрицательной полуоси. Таким образом этот интеграл равен разности $\arg(B + \varepsilon) - \arg(A + \varepsilon)$ и при стремлении ε к нулю он стремится к $\arg(B) - \arg(A)$. Для вычисления интеграла вращения относительно $z_0 = \varepsilon$ мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что $z(t) = p_2(t) - z_0$ не принимает отрицательных значений и поэтому соответствующий интеграл вращения можно вычислить с помощью параметризации $z_0 - p_2(t) = r(t)e^{\pi - \arg(z_0 - p_2(t))}$. В результате получаем, что значение этого вращения $(\pi - \arg(B - \varepsilon)) - (\pi - \arg(A - \varepsilon))$ и при стремлении $\varepsilon \to 0$ стремится к $2\pi + \arg(A) - \arg(B)$. Таким образом разность интегралов вращения пути p_1 относительно точек $\pm\varepsilon$ стремится к 2π, а разность их вращений относительно p_2 стремится к нулю в силу леммы 6.2. В результате разность интегралов от этих точек по всей границе области стремится к 2π. А поскольку эта разность принимает значения кратные 2π, то она постоянна и равна 2π. $\square$

7 Криволинейные интегралы.

Модульное неравенство Модульное неравенство

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(t)|dt \geq \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right| \tag{7.1}$$

В случае вещественной функции легко. Если интеграл от мнимой части нулевой, то это сводится к случаю вещественного неравенства. Домножение на $e^{i\varphi}$ не меняет левой и правой частей, но позволяет свести задачу к случаю нулевого интеграла от мнимой части.

Длина кривой. *Интеграл длины* для пути $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ определяется как $\int\limits_a^b |p'(t)|\,dt$. При монотонно-возрастающей замене переменной значение интеграла не меняется. Действительно, если $t(\tau)\colon [c,d] \to [a,b]$ и $t'(\tau)$ положительно, то замена переменной дает

$$\int\limits_c^d |p'(t(\tau)|\,dt(\tau) = \int\limits_c^d |p'(t(\tau))|t'(\tau)\,d\tau = \int\limits_c^d |p'(t(\tau))t'(\tau)|\,d\tau = \int\limits_c^d |p'_\tau(t(\tau))|\,d\tau$$

Если $p(t) = a + t(b-a)$ прямолинейный путь, то $|p'(t)| = |b-a|$ и $\int\limits_p |\,dz| = \int\limits_0^1 |b-a|\,dt = |b-a|$, то есть для прямолинейного пути интеграл длины действительно дает его длину.

Если путь идет по дуге окружности $p(t) = c + re$ при $t \in [\alpha, \beta]$, то $|p'(t)| = r$ и интеграл длины дает $r(\beta - \alpha)$, что и является длиной дуги окружности. Таким образом для любого простого пути интеграл длины действительно дает длину пройденного пути.

Лемма 7.1 (об оценке интеграла). *Для простого пути $p(t)$ длины L и комплексной функции $f(z)$, удовлетворяющей неравенству $|f(z)| \leq C$ при всех z из образа p, справедливо неравенство:*

$$\left|\int\limits_p f(z)\,dz\right| \leq LC$$

Доказательство. Имеем $\int\limits_p f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(p(t))\,dp(t) = \int\limits_a^b f(p(t))p'(t)\,dt$ Далее имеем неравенства

$$\left|\int\limits_a^b f(p(t))p'(t)\,dt\right| \leq \int\limits_a^b |f(p(t))p'(t)|\,dt \leq \int\limits_a^b C|p'(t)|\,dt = LC$$

□

Лемма о треугольнике

Лемма 7.2 (о треугольнике). *Пусть функция $f(z)$ определена и аналитична в области, содержащий треугольник ABC, тогда*

$$\int_A^B dz + \int_B^C f(z)\,dz = \int_A^C f(z)\,dz$$

Доказательство. Обозначим через $\oint\limits_{ABC} f(z)\,dz$ интеграл по замкнутому контуру — границе треугольника ABC. Обозначим через A', B', C' середины сторон треугольника ABC. Возникает разбиение нашего треугольника на четыре подобных с коэффициентов половина треугольника. Тогда легко проверить следующее равенство.

$$\oint\limits_{ABC} f(z)\,dz = \oint\limits_{AC'B'} f(z)\,dz + \oint\limits_{BA'C'} f(z)\,dz + \oint\limits_{CB'A'} f(z)\,dz + \oint\limits_{A'B'C'} f(z)\,dz$$

Из этого равенства вытекает, что если $|\oint\limits_{ABC} f(z)\,dz|$ обозначить за I, то максимум из модулей интегралов четырех треугольников разбиения обозначаемый I_1 будет не меньшим, чем $I/4$. Возьмем из четырех "половинных"тот для которого модуль интеграла максимален и, в свою очередь, разобьем его на четыре подобных треугольника. Так мы получим треугольник в четыре раза меньший исходного модуль интеграла по которому будет $\geq I/16$. Продолжая построение мы получим последовательность вложенных треугольников $A_nB_nC_n$ подобных первоначальному с коэффициентом $1/2^n$ и с модулем контурного интеграла $I_n \geq I/4^n$. Обозначим через P периметр исходного треугольника, тогда периметр n-го треугольника будет $P_n = P/2^n$. Обозначим через z_0 общую точку полученной последовательности треугольников. В силу дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0 имеем $f(z_0+\Delta z) = f(z_0)+f'(z_0)\Delta z+o(1)\Delta z$. Поскольку интегралы по замкнутому контуру от первых двух слагаемых нулевые, постольку модуль интеграла от $f(z)$ по треугольнику $A_nB_nC_n$ оценивается сверху произведением периметра треугольника на максимум модуля $o(1)\Delta z$ то есть сам имеет вид $o(1)P_n^2$, что противоречит полученной ранее оценке снизу для модуля этого интеграла. □

Лемма 7.3. *Если для непрерывной комплексной функции $f(z)$, определенной на многоугольной области D равен нулю по любому треугольнику, лежащему в ней (вместе с внутренностью), то равен нулю и интеграл по границе области.*

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по числу сторон выпуклого многоугольника. Проводим диагональ. В общем случае доказательство ведем по числу углов больших развернутого. Если есть угол больший развернутого, то проводим его внутреннюю биссектриссу, рассекая наш многоугольник на два с меньшим числом внутренних углов больших развернутого. □

Теорема 1 (Морера). *Если для непрерывной комплексной функции $f(z)$ интеграл по любому треугольнику из области D со связной границей нулевой, то она имеет первообразную в D.*

Доказательство. Во-первых, заметим что интегралы по различным ломаным $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ с началом z_0 и концом z совпадают. Доказательство ведем индукцией по числу пересечений. Если пересечений нет, то в силу теоремы Жордана объединение двух ломаных ограничивает многоугольную область D'. Ограниченная область целиком содержится внутри D. Действительно, предположение противного приводит к выводу, что внутри D есть как точки внутренности, так и внешности D. Поэтому там есть и точки границы D (иначе D_0 распадется в объединение двух открытых множеств: внутренних точек D и его дополнения.) Но если там есть точки границы, то за пределами D' точек границы уже нет ввиду предположения о связности последней. Тогда мы получаем, что внутренность дополнения D' распадется в объединение двух открытых множеств: внутренних точек D и его дополнения. Итак, D' содержится в D и нужное нам утверждение следует из леммы 7.3.

Пусть z_1 является общей точкой ломаных. Тогда для обеих ломаных справедливо разложение $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta$, в котором слагаемые совпадают по предположению индукции.

Итак, корректно определена следующая функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ от верхнего предела, где интеграл вычисляется по любой ломаной. Покажем, что она имеет комплексную производную равную $f(z)$. Действительно, приращение $\Delta F(z)$ представляется интегралом $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$. Поскольку $f(\zeta) = f(z) + o(1)$ при $\Delta z \to 0$, то отношение приращения функции к приращению аргумента имеет вид $f(z) + o(1)$. □

Теорема 2 (Коши). *Если $f(z)$ является комплексно-дифференцируемой функцией в области D со связной границей, то $\oint f(z)dz = 0$ для любого замкнутого пути, идущего по границе области.*

Доказательство. Из комплексной формулы Ньютона-Лейбница вытекает, что интеграл по замкнутому пути от производной равен нулю. Так как комплексно-дифференцируемая функция в односвязной области имеет первообразную в силу теоремы Морера и леммы о треугольнике, то теоерема Коши вытекает из комплексной формулы Ньютона-Лейбница. □

Задачи.

1. Вычислить интеграл $\oint\limits_{0}^{4} \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$
2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}$
3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{1}^{1} \frac{dz}{z^4+1}$
4. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{13+12\cos\varphi}$

8 Особые точки и вычеты.

Лемма 8.1. *Если функция $f(z)$ комплексно-дифференцируема в области D со связной границей за исключением конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_n$, то для достаточно малого ε*

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{z_k}^{\varepsilon} f(z)dz$$

Доказательство. Выберем ε столь малым, чтобы для каждой особой точки z_k круг D_k с центром z_k и радиусом ε содержался в D и чтобы все эти круги попарно не пересекались.

Пусть D' область полученная из D выбрасыванием внутренностей D_k. Тогда по теореме Коши интеграл по границе D' равен нулю. А этот интеграл равен разности $\oint\limits_{\partial D} f(z)dz - \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{z_k}^{\varepsilon} f(z)dz$ □

Следующая формула Коши считается основной формулой комплексного анализа.

Теорема 1 (Интегральная формула Коши)**.** *Если $f(z)$ комплексно-дифференцируема в области D со связной границей, то*

$$\boxed{\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)}$$

Доказательство. В силу леммы 8.1 интеграл по границе области совпадает с интегралом по малой окружности с центром в z_0. Поэтому теорема будет доказана, если мы докажем равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

Так как $\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{z-z_0} = 2\pi i$, то требуемое равенство равносильно следующему

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0,$$

которое легко получить из леммы об оценке интеграла. Действительно, подинтегральная функция ограничена ввиду дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0, а длина пути интегрирования стремится к нулю. □

Вычеты. Точка z_0 называется *особой точкой* аналитической функции $f(z)$, если $f(z)$ определена и аналитична в проколотой окрестности точки $f(z)$, а в самой точке функция или не определена или не аналитична.

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в особой точке z_0 называется интеграл (обозначается $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$)

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0}^{\varepsilon} f(z)dz, \tag{8.1}$$

где ε достаточно мало, чтобы в ε-окрестности z_0 не содержалась особых точек отличных от z_0.

Теорема 2 (Коши о вычетах)**.** *Если функция $f(z)$ аналитична в области D за исключением конечного числа особых точек, то*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in D} \mathrm{res}_z\, f$$

Доказательство. Пусть $z_1, \dots, z_n$ все особые точки функции $f(z)$ в области D. Выберем для каждой особой точки z_k круг D_k с центром z_k и столь малым радиусом r_k, что все эти круги попарно не пересекаются и содержатся в D. А из теоремы Коши следует, что интеграл по границе D равен сумме интегралов по границам D_k. □

Устранимые особые точки Особая точка функции $f(z)$ называется *устранимой*, если функцию $f(z)$ можно доопределить в этой точке таким образом, что доопределенная функция является аналитической в этой точке.

Например, функция $\frac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особенность в нуле, поскольку ряд синуса делится на z.

Лемма 8.2. *Если функция $f(z)$ ограничена на контуре C, то функция, представленная интегралом Коши комплексно-дифференцируема и ее производная выражается интегралом $\oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$*

Доказательство. Производная интеграла Коши выражается пределом

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left(\oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z - \Delta z} - \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0} \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} \tag{8.2}$$

Разность между полученным выражением и его предполагаемым пределом выражается пределом при $\Delta z \to 0$ интеграла

$$\oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} - \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \oint \frac{\Delta z f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}, \tag{8.3}$$

модуль которого по лемме об оценке не превосходит произведения $M|\Delta z|L$, где M верхняя оценка модуля $f(z)$ на контуре интегрирования и L — длина контура интегрирования, откуда видно, что этот предел равен нулю. □

Теорема 3 (об устранимой особенности)**.** *Если $f(z)$ комплексно-дифференцируема в проколотой окрестности точки z_0 и $\lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, то существует $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ и, доопределяя $f(z)$ в точке z_0 значением этого предела, мы получаем комплексно-дифференцируемую функцию в окрестности z_0.*

Доказательство. Условие $\lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$ влечет равенство нулю вычета в точке z_0, ибо интеграл $\oint f(z)dz$ по окружности радиуса ε по лемме об оценке не превосходит произведения максимума модуля $f(z)$ на этой окружности на длину окружности и стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ по условию $\lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$

Поэтому теорема о вычетах дает для $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ равенство

$$2\pi i f(z) = \oint_{z_0}^{\varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

Но это равенство задает аналитическую функцию, определенную во всем круге $|z-z_0| < R$, которая продолжает $f(z)$ в z_0 в силу леммы о производной интеграла Коши. $\square$

Следующая теорема является аналогом теоремы Безу для многочленов.

Теорема 4. *Если комплексно-дифференцируемая функция $f(z)$ обращается в ноль в точке z_0, то частное $\frac{f(z)}{z-z_0}$ имеет в z_0 устранимую особенность.*

Полюсы. Если при натуральном k существует конечный ненулевой предел $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$, то точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$ а число k называется *кратностью* полюса.

Лемма 8.3. *Если $f(z)$ имеет полюс порядка n в z_0, то имеет место разложение $f(z) = g(z) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(z-z_0)^k}$, где $g(z)$ не имеет особенности в z_0.*

Доказательство. Если k является наименьшим числом, для которого равен нулю предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)^k$, то z_0 является полюсом порядка $k - 1$. Действительно, в этом случае особенность произведения $f(z)(z-z_0)^{k-1}$ устранима и по теореме об устранимой особенности существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^{k-1}$, отличный от нуля в силу минимальности k. $\square$

Теорема 5. *Вычет в полюсе порядка k вычисляется по формуле*

$$\operatorname{res} f(z_0) = (k-1)! \lim_{z\to z_0} (f(z)(z-z_0)^k)^{(k-1)} \tag{8.4}$$

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + f_0(z),$$

где $f_0(z)$ не имеет особенности в z_0. Умножив это равенство на $(z - z_0)^k$, продифференцировав полученное равенство $k - 1$ раз и перейдя к пределу при $z \to z_0$ в правой части, мы получим $(k - 1)!a_{-1}$. Сравнив это с левой частью, получим обещанное равенство (8.4). $\square$

Полюс первого порядка также называется *простым.* Вычет в простом полюсе дается формулой

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) \tag{8.5}$$

Нули и полюса Говорят, что аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке z_0 ноль порядка k, если $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Следующая лемма весьма полезна для определения порядка полюса.

Лемма 8.4. *Отношение $P(z)/Q(z)$ двух аналитических в z_0 функций имеет в точке z_0 полюс порядка k, равного разности порядков нуля числителя и знаменателя.*

Доказательство. Если $P(z)$ имеет нуль порядка n, то ее ряд Тэйлора в z_0 начинается с $a_n(z-z_0)^n$. Аналогично ряд $Q(z)$ начинается с $b_{n+k}(z-z_0)^{n+k}$. Поэтому $\lim\limits_{z\to z_0} P(z)(z-z_0)^k/Q(z) = a_n/b_{n+k}$. □

Теорема 6 (правило Лопиталя)**.** *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими функциями такими что $f(z_0) = g(z_0) = 0$ и существует предел отношения производных $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ и имеет место равенство*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Доказательство. Пусть $f(z) = a_m(z-z_0)^m + \dots$ и $g(z) = b_n(z-z_0)^n + \dots$. Тогда $f'(z) = ma_m(z-z_0)^{m-1} + \dots$ и $g'(z) = na_n(z-z_0)^{n-1} + \dots$. Если $m > n$, то оба рассматриваемых предела равны нулю. Если $m < n$, то пределы отношения производных и функций бесконечны. Если $m = n$, то оба эти предела равны отношению первых ненулевых коэффициентов. □

Задачи.

1. Найти вычеты в особых точках $\frac{1}{z+z^3}$
2. Найти вычеты в особых точках $\frac{1}{(z^2+1)^2}$
3. Найти вычеты в особых точках $\operatorname{ctg} \pi z$
4. Найти вычеты в особых точках $\frac{1}{e^z+1}$
5. Найти вычеты в особых точках $\frac{1}{\sin z^2}$
6. Найти вычеты в особых точках $\frac{1}{z^2} \operatorname{ctg} \pi z$
7. Найти вычеты в особых точках $\operatorname{ctg}^2 z$

9 Комплексно-аналитические функции.

Что такое функция? Современное определение функции возникло с появлением теории множеств. По существу оно отождествляет функцию с множеством — ее графиком. Главное, что требуется от функции — это однозначность. Во времена Эйлера функцию определяли иначе. Функция определялась как аналитическое выражение, содержащее постоянные и переменные. То есть функция определялась как формула. Правда, на самом деле, скоро выяснялось, что одна и та же функция может быть задана различными формулами.

Функция устанавливает соответствие между значениями аргумента и функции. То есть для любого данного значения аргумента из некоторого множества (называемого областью определения функции) задается значение функции этого аргумента.

Формула, по первоначальной идее позволяет устанавливать такое соответствие. Но тут есть несколько но. Во-первых, даже конечное арифметическое выражение, содержащее дроби, может порождать неопределенность типа $0/0$, разрешение которой может быть непростой задачей. Ну а бесконечное аналитическое выражение, например, степенной ряд, может расходится при подстановке значения аргумента, и суммирование расходящегося ряда может быть весьма нелегкой процедурой с заранее неизвестным исходом. Может и не получиться. Поэтому вообще говоря трудно определить по формуле относится ли данное значение аргумента к области определения функции или не относится. В третьих, формула может задавать *обобщенную функцию*, значения которой не определены ни в какой точке, хотя определены интегралы от нее.

Принципиальным отличием теоретико-множественного и аналитического подходов к определению функции является понятие *области определения.* Если функция задана формулой, то не так важно какова область определения. Одна и та же формула позволяет определять функцию на вещественных, комплексных, бесконечно-малых числах. С другой стороны различные формулы, представляющие одну и ту же функцию могут иметь различные области определения. При теоретико-множественном подходе функции, представленные формулами с различными областями определения, различны. Например, формулы $\frac{x^2-1}{x-1}$ и $x+1$ представляют собой различные функции с теоретико-множественных позиций, но для Эйлера и Ньютона они представляли одну и ту же функцию, хотя при $x = 1$ первая формула, в отличие от второй, дает неопределенность.

Две формулы назовем *согласованными*, если их значения совпадают везде, где они обе определены. (и при этом множество чисел, для которых они обе определены имеет непустую внутренность, то есть содержит окрестность некоторой точки.)

Эйлер интуитивно полагал, что согласованные формулы представляют одну и ту же функцию. Эйлер называл *непрерывной* функцию, представленную одной формулой, и называл разрывной функцию, которая на одном отрезке представлена одной, а на другом — другой формулой. Но с появлением тригонометрических рядов оказалось, что любую разрывную в смысле Эйлера, функцию можно представить одной формулой. Это открытие привело к тому, что теоретико множественный подход к понятию функции возобладал, а аналитический был отвергнут.

Однако, если ограничить используемых формул степенными рядами, то аналитический подход можно спасти. Преимущество аналитического определения функции заключается в том, что в формулу можно подставлять какие угодно числа, лишь бы мы знали как их складывать и умножать. Поэтому нет необходимости определять, например, что представляет собой множество всех величин, включающих в себя бесконечно-малые и бесконечно-большие. А этого требует теоретико-множественный подход.

Теорема о почленном интегрированиию

Теорема 1. *Если функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *мажорируется сходящимся числовым рядом* $|f_k(z)| \leq c_k$ *в области* D*, то для любого пути* $p(t)$ *в* D *справедливо равенство*

$$\int_p \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_p f_k(z)dz \tag{9.1}$$

Доказательство. Для конечных сумм имеет место равенство

$$\int_p \sum_{k=1}^{n} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_p f_k(z)dz \tag{9.2}$$

При $n \to \infty$ правая часть последнего равенства стремится к правой части (9.1). Поэтому нам достаточно убедится что и его левая часть стремится к левой части (9.1). Разность левых частей имеет вид интеграла $\int_p \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)dz$. Максимум модуля подъинтегральной функции оценивается сверху суммой мажорант $C_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$, которая стремится к нулю в силу условия сходимости этого ряда. Тогда по лемме об оценке эта разность оценивается по модую произведением C_n на длину пути интегрирования, и, значит, тоже стремится к нулю с ростом n. □

Теорема о разложении в степенной ряд.

Теорема 2. *Если* $f(z)$ *является аналитической функцией в круге* $|z-z_0| \leq R$*, то для* $|z - z_0| < R$ *имеет место равенство*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \oint\limits_{|z-z_0|\leq R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta, \tag{9.3}$$

где ряд в правой части абсолютно сходится для $|z - z_0| < R$.

Доказательство. Фиксируем точку z такую что $|z - z_0| < R$ и рассмотрим ζ как переменную. Для $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$ получим

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \tag{9.4}$$

На круге $|\zeta - z_0| = R$ ряд в правой части мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{R^{k+1}}$ для $r > |z - z_0|$. Функция $f(\zeta)$ ограничена на $|\zeta - z_0| = R$ (как непрерывная функция). Следовательно после умножения (9.4) на $f(\zeta)$ выполнены условия теоремы о почленном интегрировании.

$$f(z) = \oint\limits_{|z-z_0|\le R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \oint\limits_{|z-z_0|\le R} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \tag{9.5}$$

□

Радиус сходимости степенного ряда. Сумма степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ с положительными коэффициентами монотонно возрастает, при увеличении x, если $x > 0$. Поэтому для любого степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ определяется такое число R, называемое его *радиусом сходимости*, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k||z-z_0|^k < \infty$ при $|z - z_0| < R$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k||z-z_0|^k = \infty$ при $|z - z_0| > R$.

Круг в комплексной плоскости с центром z_0 радиуса R называется *кругом сходимости* этого степенного ряда.

Для z из внутренности круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится. За пределами круга сходимости степенной ряд расходится.Степенной ряд можно почленно интегрировать и почленно дифференцировать, как нам известно еще из прошлого семестра. Таким образом мы получаем замечательный факт: *если комплексная функция дифференцируема один раз, то она дифференцируема бесконечно много раз.*

Особые точки функции являются единственным препятствием к сходимости представляющего ее степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда, представляющего аналитическую функцию, можно определить,если известны особые точки этой функции. В частности, степенной ряд, представляющий функцию, не имеющую особых точек на плоскости, сходится везде.

Если, например, $\operatorname{arctg} x$ разложить в степенной ряд в точке 5, то сходимости получившегося ряда в точке -1 препятствует особость точки i. Дело в том, что производная арктангенса равная $\frac{1}{x^2+1}$ имеет полюс в i. Поэтому степенной ряд арктангенса не может сходится в окрестности этой точки, а значит его круг сходимости не включает i, а значит и -1, которая расположена от 5 еще дальше.

Три характеристики класса аналитических функций

Теорема 3. *Функция $f(z)$ в области D*

1. *комплексно дифференцируема в любой точке внутренности D*
2. *разлагается в степенной ряд в окрестности любой точки внутренности D*
3. *имеет нулевые интегралы по границам треугольников, содержащихся в области D*

Доказательство. То, что комплексная дифференцируемость влечет разложимость в степенной ряд доказано выше. Разложимость в степенной ряд влечет комплексную дифференцируемость в силу результатов прошлого семестра о почленном дифференцировании. Нулевые интегралы по треугольникам комплексно-дифференцируемая функция имеет в силу теоремы Коши (леммы о треугольнике). Если же нулевыми являются интегралы по всем треугольникам области, то по теореме Морера наша функция имеет первообразную. Но первообразная, будучи комплексно-дифференцируемой, разлагается в степенной ряд. Значит и ее производная разлагается в степенной ряд. □

Теорема единственности.

Теорема 4 (единственности)**.** *Если две аналитических функции, определенные в связной области, совпадают на точках некоторой,сходящейся последовательности, то они совпадают всюду.*

Доказательство. Пусть z_0 обозначает предельную точку последовательности z_k точек, в которых совпадают функции $A(z)$ и $B(z)$. Рассмотрим разложение разности $A(z)-B(z)$ в степенной ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, где $a_n \neq 0$ первый отличный от нуля коэффициент. При z достаточно близком к z_0 сумма ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k-n}$ по модулю не превосходит $|a_n|/2$. Поэтому $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = (z-z_0)^n a_k(z-z_0)^{k-n} \neq 0$ вопреки предположению об обращении в нуль на членах бесконечной последовательности, сходящейся к z_0. Чтобы избежать противоречия мы приходим к заключению, что все коэффициенты степенного ряда равны нулю. В этом случае мы имеем тождественное совпадение функций в окрестности точки z_0. Рассмотрим множество D_0 всех точек, в окрестностях которых разность $A(z)-B(z)$ тождественно равна нулю. Если D_0 отлично от D, то имеется граничная точка z_1 у D_0 лежащая в D. В любой окрестности этой точки имеется бесконечное число точек D_0, где рассматриваемые функции совпадают. Следовательно предыдущее рассуждение доказывает, что они совпадают и в целой окрестности точки z_1. Получаем, что z_1 принадлежит D_0 вместе с окрестностью. То есть является внутренней точкой D_0 вопреки нашему предположению. □

В силу теоремы единственности интегралы, представляющие коэффициенты в разложении теоремы **2**, совпадают с соответствующими коэффициентами ряда Тэйлора. Откуда получаем интегральные формулы Коши для производных функции

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{z_0}^{R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta \tag{9.6}$$

Задачи.

1. Вычислить $\oint\limits_0^2 \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$.

2. Найти $\oint\limits_0^2 \frac{e^z dz}{(z^2+1)^2}$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$

5. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)}\, dx$

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)\cos x}{1+x^4}\, dx$

7. $* \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\, dx$