И.Р.Шафаревич

Бесконечномерные группы и проблема якобиана для аффинной плоскости A(2).

Специфика предлагаемого подхода заключается в том, что вместо индивидуального отображения аффинных пространств $A(n)\to A(n)$ при любом n рассматриваются обе группы AutA и J(A) (с постоянным обратимым якобианом). В очень старой работе [1] я обратил внимание на эти группы как примеры бесконечномерных алгебраических групп и привел некоторые результаты (большей частью типа general nonsense), которые легко переносятся на них со случая конечномерных групп. Обе указанные группы действительно бесконечномерны при $n>1$, так как содержат преобразования де-Жонкьера: $(x_1, x_2,\ldots, x_n)\to(y_1, y_2,\ldots, y_n)$, где $y_i=a_ix_i+f_i(x_{i+1},\ldots,x_n)$, $a_i\neq 0$ и f_i - произвольный многочлен от переменных $x_{i+1},\ldots,x_n$.

Мы приведем тот вариант определения бесконечномерной алгебраической группы, который охватывает указанные примеры. Предполагается заданным множество X с групповыми операциями$X\times X\to X$ (умножение) и $X\to X$ (взятие обратного). При этом X предполагается заданным как объединение конечномерных алгебраических многообразий X_n где n – натуральные числа и при $m\leq n$ задано вложение $X_m\to X_n$, являющееся замкнутым вложением. При этом групповые операции, примененные к множествам X_n, по определению должны задаваться морфизмами $X_n\times X_m\to X_l$, где l – свое для каждых n и m. Обычные определения касательного пространства в точке и простой точки переносятся формально. Доказывается, что если группа определена над полем характеристики О, то все ее точки просты. Точно так же доказывается, что если многообразия X и Y просты в точках x и y и имеется вложение f: $X\to Y$, являющееся строго замкнутым (в смысле, определенном Бурбаками и Гротендиком), такое, что $f(x)=y$, и индуцирующее изоморфизм касательных пространств, то f определяет взаимно однозначное соответствие замкнутых точек многообразий X и Y. Касательные пространства групп AutA(n) и J(A) не трудно вычислить, они оказываются изоморфными (это сделано в работе [1]). Отсюда можно было бы надеяться получить решение проблемы якобиана, если бы не условие строгой замкнутости, которое оказывается трудно проверяемым(а может быть и не верно для $n>2$). Но несколько лет назад Д.А.Пономарев [2] нашел некоторый критерий строгой замкнутости, который, как мне кажется, проверяем при $n=2$. Ему и его проверке в нескольких частных случаях, и посвящен доклад.

В нашем случае для формулировки критерия Пономарева нет необходимости даже напоминать определение строгой замкнутости. Именно, если ввести в $A(n)$ некоторую систему координат $x_1, x_2,\dots, x_n$, то любое преобразование $g€AutA(n)$ определяется таким набором многочленов $f_1, f_2,\dots, f_n$ от $x_1, x_2,\dots, x_n$, что g переводит точку $(x_1, x_2,\dots, x_n)$ в $(f_1(x_1, x_2,\dots, x_n),\dots, f_n(x_1, x_2,\dots, x_n))$. В связи с этим обозначим через R кольцо всех многочленов от $x_1, x_2,\dots, x_n$, а через E совокупность любых наборов n многочленов $f€R$. Мы имеем, таким образом, естественное вложение групп $AutA(n)$ и $J(A)$ в E. Прежде всего, оказывается, что достаточно убедиться в том, что вложение $AutA(n)$ в E является строго замкнутым - тогда и вложение $AutA(n)$ в $J(A(n))$ будет строго замкнутым. Для построенного вложения $AutA(n)$ в E критерий Пономарева дает следующее. Положим для $f€E$, $f=(f_1, f_2,\dots, f_n)$, $\deg f$=максимуму степеней многочленов $f_1, f_2,.., f_n$ и также определим $\deg(g)$ для $g€G$, множество элементов f с $\deg(f)\le n$ обозначим черезY_n, а соответствующее множество в G - через X_n. Очевидно, всегда $\deg(gh)\le\deg(g)\deg(h)$. Пусть X_n определяется в G идеалом I_n. Для любых $m>n$ существует естественный гомоморфизм I_m в I_n. Если все эти гомоморфизмы эпиморфны, то наше вложение является строго замкнутым. (На самом деле, Пономарев доказывает, что для строгой замкнутости необходимо и достаточно некоторое более слабое свойство, так называемое свойство Миттаг-Леффлера для соответствующих гомоморфизмов, заведомо выполняющееся в случае эпиморфности, но дальше будет обсуждаться именно эпиморфность и мне кажется, что это единственный эффективно проверяемый случай). Вероятно, свойство эпиморфности естественно включить в «правильное» определение бесконечномерного алгебраического подмногообразия в E- оно тогда определяется единой системой алгебраических уравнений в E. (Примером такой единой системы уравнений является соотношение $Jac(g)=const$ для $J(A)$.) Множество преобразований X_n можно было бы следующим образом задать алгебраическими уравнениями. Прежде всего, легко видеть, что вопрос сводится к группе G(1), состоящей из таких преобразований g,что многочлены f_n (в прежних обозначениях) не имеют свободных членов, а их линейные члены совпадают с x_n. Для двух преобразований такого типа g и h, как легко видать, их произведение gh имеет такой же вид и для них соответствующие многочлены $h_n=f_n+g_n+P_n$,где g_n играет такую же роль для h, а P_n являются многочленами от коэффициентов многочленов f_m и g_m с m<n для преобразований g и h. Для n=2 известно, что $\deg g^{-1\leq} \deg g$ [3] (для любого n, $\deg(g^{-1)} \leq\deg(g)^{n-1}$).Общий обзор результатов по проблеме якобиана см.в [4].Соотношение gh=1 позволяет найти многочлены g_m,определяющие h для m<deg(g), а их подстановка дает нужные соотношения на g. Однако полученные таким образом схемы, по-видимому, не являются приведенными и для них не выполняются требование строгой замкнутости вложения AutA(n)→J(A). Позже мы введем другую структуру бесконечномерной группы в то же множество при n=2. Представляется вероятным, что при этом неприведенная схема X_n заменяется своей приведенной подсхемой, однако это для последующих рассуждений не существенно и мы не будем предполагать схемы X_n, которые позже определим, приведенными. Важная для дальнейшего мысль рассматривать и такого типа группы, то есть, как он называет их, инд-группы, принадлежит Д.А. Пономареву [2]. Доказанный им критерий утверждает, что в любом случае отображение f задает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми точками схем Aut(A) и J(A).

Дальше мы будем рассматривать только случай n=2. Специфика этого случая заключается в том, что группа AutA(2) является амальгамой двух своих подгрупп-A=AffA(2), состоящей из аффинных преобразований и B, состоящей из преобразований де-Жонкьера. Этот результат называется теоремой Ван дер Кульке. (В то время, когда публиковалась работа [1], я не знал, что эта теорема доказана и формулировал результат как новый). Доказательство теоремы можно прочесть в [4] или [5]. Обобщение на группы автоморфизмов некоторых других поверхностей содержится в работе [5]. Свойства амальгам содержатся в книге А. Г.Куроша «Теория групп» [6] (где они называются свободными произведениями с объединенной подгруппой) и в книге Серра о деревьях [7]. Мы выберем произвольную точку $O€A(2)$ и обозначим через G ее стабилизатор. Тогда любой элемент $g€AutA(2)$ однозначно представляется в виде $g=th$, где t есть сдвиг, а $h€G$ и проблема сводится к преобразованиям из группы G. Дальше мы будем предполагать, что $g€G$. Для преобразований $g€G$ определено линейное преобразование $L(g)$ - линейная часть g в O и сопоставление $g\rightarrow L(g)$, очевидно, является гомоморфизмом, а введенная выше группа $G(1)$ - его ядром. Очевидно, что любой элемент $g€G$ однозначно представляется в виде $g=L(g)g_1$, где $g_{1€}G(1)$ и, таким образом, проблема сводится к группе $G(1)$.

Основное свойство амальгам, которое нам понадобится, заключается в наличии так называемого «канонического разложения». А именно, если группа G является амальгамой двух своих подгрупп Аи В с $A\cap B= C$, то выберем произвольно таких представителей $a_i€A$ и $b_j€B$, что $A\text{-}C=\sum Ca_i$ и $B\text{-}C=\sum Cb_j$ (объединения без пересечений). Тогда любой элемент $g€G$ может быть записан в виде произведения некоторого элемента $c€C$ и элементов a_i и b_j в любом порядке с единственным условием, чтобы элементы из одной подгруппы (А или В) не стояли рядом. При этом такая запись единственна.

Легко видеть, что представителей a_i и b_j в группе $AutA(2)$ можно выбрать принадлежащими подгруппе G. При этом преобразования де-Жонкьера b_j можно взять в виде $b_j= b_f$, где b_f переводит точку (x, y) в $(x+f(y), y)$, а f - произвольный многочлен от y, не содержащий ни свободного, ни линейного членов. Тогда для элемента $g€G$ и элемент c в его каноническом разложении должен содержаться в G.

Вид канонического разложения зависит от того, с какого элемента оно начинается - a_i или b_j - и каким оканчивается. Чтобы не различать эти случаи, заметим, что любой элемент $g€G$ можно записать в виде

$$g=a_0b_1a_1b_2...b_ka_k, \qquad (1)$$

где a_i - любые элементы из А, причем $a_i€A\text{-}C$ для $0<i<k$, а b_j выбраны указанным выше образом, то есть $b_j=b_{fj}$ для некоторого многочлена f_j, не содержащего ни свободного, ни линейного членов и $f_i\neq 0$. При этом уже однозначность такой записи не предполагается. В записи (1) условие $L(g)=1$ записывается как

$$a_0a_1a_{2...}a_k =1. \qquad (2)$$

(Надо вспомнить, что мы условились положить $b_j=b_{fj}$, а

$L(b_f)=1$.) При записи (1) верно соотношение

$$deg(g)=degb_1degb_2\dots degb_k. \qquad (3)$$

Для доказательства нужно заметить, что всегда $deg(ga)=deg(ag)=deg(g)$ и мы можем, отбросив в (1) множитель a_0 или приписав a_k, рассмотреть произведение пар вида b_ia_i с a_i€A-C. Если g переводит точку (x, y) в (P, Q), то мы будем писать, что g=(P, Q). Сначала рассмотрим одну такую пару. Если $a=(ax+by, cx+dy)$ с $c\neq0$, а $b=(x+f(y), y)$, то $ba=(ax+by+f(cx+dy), cx+dy)$. Если f(t) содержит старший член с t^m, то такой же член содержится и в $(cx+dy)^m$ Значит, если g=ba=(P, Q), то deg(g)=degP и P содержит член с y^m , где m=deg(g). Отправляясь от этого замечания, мы проверим индукцией по k, то же свойство для произведения k множителей вида b_ia_i. Если это произведение равно g, то $g=g_1ba$, а для g_1 наше утверждение можно считать проверенным. Если g=(P, Q), а $g_1=(P_1, Q_1)$, то, подставляя в g_1 найденное выше выражение для ba, мы получим, что P содержит ненулевой член с y^m, где $m=deg(g_1)degb$.

Полезным замечанием является то, что при c€C, $c^{-1}b_f c=b_g$. Это следует из того, что $L(c^{-1}b_fc)=1$, но может быть проверено и простым вычислением: если c=(ax+dy, by), то $c^{-1}b_fc=b_g$, где

$g(t)=a^{-1}f(bt)$. Отсюда следует, что разложение (1) все же обладает некоторыми свойствами инвариантности. Именно, если все множители a_i, кроме, может быть, первого содержатся в A-C, т. е.

$$a_i \text{ €A-C при } 1\leq i\leq k, \qquad (4)$$

то число множителей b_j в (1), т. е. число k,одно и то же во всех разложениях (1) элемента g. Это число мы будем дальше обозначать через k(g).

Кроме того, если в каноническом разложении элемента g мы выберем b_j как b_{fj} и $degf_j=r_j$, то в любом разложении (1) элемента g будет deg fj= r_j .

Для доказательства представим элемент a_k в виде c или ca_j, где a_j - один из представителей, выбранных при определении канонических разложений. Тогда, применяя только что изложенное соображение, мы получим, что при $b_k=b_f$, $b_kc=cb_g$, причем deg(g)=deg(f). Тогда выражение (1) для g можно записать в виде

$$g= g' bg,$$

где $g'=a_1b_1\ldots a_{k-1}c=a_1b_1\ldots a'_{k-1}$ с некоторым a'_{k-1}€A-C. В результате мы получили g', у которого число множителей b_i в разложении (1) на 1 меньше. Продолжая этот процесс, мы передвинем элемент c в начало и так получим каноническое разложение для g с тем же значением числа k и теми же r_j. Нужный результат следует тогда из единственности канонического разложения. Множество элементов g с k(g)=m мы будем обозначать X(m).

В заключение, еще одно простое замечание. Если L(g)=1, то из соотношения (1) следует, что g может быть записано в виде

$$g=a_1^{-1}b_1a_1a_2^{-1}b_2a_2\ldots a_k^{-1}b_ka_k, \qquad (5)$$

где a_i €A-C, а b_i можно считать равными b_f с некоторыми многочленами f. Для доказательства надо последний множитель в (1) записать в виде $a_ka_k^{-1}b_ka_k$, а затем объединить множители a_{k-1} и a_k. В результате наше разложение принимает вид

$$g=g'a_k^{-1}b_ka_k.$$

Очевидно, что опять $L(g')=1$ и мы можем применить индукцию по k. На последнем шаге мы получим элемент a_0b_1a.Так как для него по-прежнему L=1, то $a_0a=1$ и мы получаем нужный результат. При такой записи условие (4) записывается в виде

$$a_i^{-1}a_{i+1}\text{€A-C} \qquad (6)$$

при $1\le i<k$.

Дальше будут в качестве примеров рассмотрены случаи, когда k(g) равно 1 или 2.

1. Случай k(g)=1.

Согласно формуле (4) в этом случае $g=a^{-1}ba$, где a=(ax+by, cx+dy), b=(x+f(y), y) и мы можем, в случае необходимости изменяя многочлен f, считать, что ad-bc=1. Тогда g=(dx-by, -cx+ay)(x+f(y), y)(ax+by, cx+dy). Производя нужные подстановки, мы получаем, что g=(x+P, y+Q), где P=df(cx+dy), Q=-cf(cx+dy). Числа c и d не могут быть равными 0 одновременно. Мы предположим, что $d\neq0$ (случай d=0, $c\neq0$ рассматривается аналогично). Положим df=h и $c/d=\tau$. Мы получим, что $P=h(\tau x+y)$,$Q=-\tau h(\tau x+y)$ (с измененным многочленом h). Дифференцируя первое соотношение, мы получаем $P_x'=\tau P_y'$, а подставляя выражение для τ из второго, находим, что

$$P_x'P+P_y'Q=0. \qquad (7)$$

Кроме того, мы должны записать условие, что отношение Q к P есть постоянная. Это значит, что его частные производные по x и y равны 0. Таким образом мы получаем еще два соотношения

$$P_y'Q-Q_y'P=0, \quad P_x'Q-Q_x'P=0. \qquad (8)$$

Эти уравнения эквивалентны, как легко видеть, тем соотношениям, которым должны удовлетворять многочлены P и Q. Доказательство совершенно очевидно, если иметь в виду следующее утверждение:

Лемма. Многочлен P(x, y) тогда и только тогда может быть представлен в виде f(ax+by), где f(t) – многочлен от одной переменной t, а ax+by – ненулевая линейная форма, когда многочлены P_x' и P_y' пропорциональны.

Для доказательства достаточно найти такие c и d, что ad-bc=1, и положить ax+by=u, cx+dy=v. Тогда u и v будут новыми независимыми переменными и наше условие на P означает, что P=f(u), т. е. что $P_v'=0$. Но $P_v'=-bP_x'+aP_y'$, так как x=du-bv, y=-cu+av. (Надо применить обычные правила вычисления частных производных от сложных функций.)

Таким образом, за систему уравнений для X_n могут быть взяты уравнения (7) и (8), ограниченные на Y_n. Так как уравнения (7) и (8) не зависят от n, то критерий Пономарева для них очевидно выполнен.

Замечание. Легко видеть, что первое из уравнений (8) можно заменить на основании уравнения (7) на линейное: $P'_x+Q'_y=0$. Это уравнение можно записать в виде DivD=0, где D – дифференциальный оператор $P\partial/\partial x+Q\partial/\partial y$. Однако, все это для наших рассуждений не существенно.

В связи с этим мы сформулируем гипотезу, которую позже проверим для m=2.

Гипотеза. Обозначим через E совокупность пар многочленов от x и y без постоянных и линейных членов. Обозначим также через X(m) множество элементов g€G(1) с k(g)=m и его образ в E, т.е. совокупность таких пар (P, Q), что (x+P, y+Q)€X(m). Гипотеза утверждает, что множество $X(m)_n$ - пересечение X(m) и X_n - может быть определено конечным числом уравнений вида $F_i(P, Q)=0$, где

F_i - многочлены от P, Q, P(0,y), P(x,0), Q(0,y), Q(0,x) и их производных. При этом порядок производных должен быть ограничен постоянной c(m), зависящей только от m.

Выше мы проверили эту гипотезу для m=1. Конечно, так мы получаем бесконечное число уравнений, так как мы должны приравнивать 0 все коэффициенты многочленов F_i(P, Q).

Иначе говоря, мы определяем новую схему с тем же множеством замкнутых точек. В случае m=1 можно доказать, что эта схема приведена в ее общей точке и возможно, что она всегда приведена во всех своих точках, но это для дальнейшего не существенно. Подсхемы (вообще говоря, бесконечномерные) в E, определенные подобного типа уравнениями, мы будем дальше называть дифференциальными. Очевидно, что обычное доказательство того, что сумма и пересечение двух схем является такой же схемой, сохраняется и в этом случае. Из сформулированной гипотезы следует выполнение критерия Пономарева. Действительно, так как разложение (5) имеет место для любого элемента g группы G(1) (определенной условием L(g)=1), то G(1) есть объединение непересекающихся подмножеств X(m) (для всех m). Соответственно,

$$G(1)_n = X(1)_n + X(2)_n + \ldots + X(k),$$

но теперь уже с некоторым конечным k. Действительно, так как в разложении (1) $r_i = \deg b_i \geq 2$, то из соотношения (3) следует, что $\deg(g) \geq 2^k$ и, значит, $k \leq \log_2 \deg(g)$.Так как, согласно гипотезе, все $X(i)_n$ являются дифференциальными многообразиями, то таково же и их объединение, что влечет за собой выполнение критерия Пономарева.

2.Случай k(g)=2.

Согласно равенству (4) в этом случае элемент g может быть записан в виде $g=(a_1^{-1}b_1a_1)(a_2^{-1}b_2a_2)$, где a_1 и a_2 - линейные преобразования, причем $a_1a_2^{-1}$€A-C. Мы положим $b_1=b_f$, $b_2=b_g$, где f и g - два многочлена, не имеющие ни свободных, ни линейных членов. Вид каждой из двух скобок нами вычислен в связи с рассмотрением предшествующего случая. Таким образом, мы можем считать, что

$$g=(x+f(\tau x+y),\ y-\tau f(\tau x+y))(x+g(\sigma x+y),\ y-\sigma g(\sigma x+y)),$$

так что, если мы положим $g=(x+P,\ y+Q)$, где P и Q начинаются с членов степеней, не меньших, чем 2, то

$$P=g(\sigma x+y)+f(\tau x+y+(\tau-\sigma)g(\sigma x+y)), \quad (9)$$

$$Q=-\sigma g(\sigma x+y)-\tau f(\tau x+y+(\tau-\sigma)g(\sigma x+y)). \quad (10)$$

Положим $\sigma x+y=u$, $\tau x+y=v$. Покажем, что в наших предположениях это преобразование невырожденно. Действительно, если $a_1=(a_1x+b_1y,\ c_1x+d_1y)$, $a_2=(a_2x+b_2y,\ c_2x+d_2y)$, то условие $a_1a_2^{-1}€A\text{-}C$ означает, что $(c_1d_2-d_1c_2)\neq 0$. Деля на d_1d_2, мы получаем, что $\sigma\neq\tau$, а это и значит, что $\det\begin{pmatrix}\sigma & 1\\ \tau & 1\end{pmatrix}\neq 0$. Из равенств (9) и (10) следует, что если мы положим $P_1=\sigma P+Q$, $Q_1=\tau P+Q$, то $P_1=h(v+j(u))$, $Q_1=j(v)$, где $h=(\sigma-\tau)f$, $j=(\tau-\sigma)g$. Последнее соотношение имеет вид $Q_1=j(\tau x+y)$. Оно уже встречалось при рассмотрении случая $k(g)=1$.Мы видели, что тогда j определяется однозначно, а $(Q_1')_x(Q_1')_y^{-1}=\tau$. Т.е. для τ получается выражение вида AB^{-1}. Но теперь A и B – линейные функции от σ. То, что $\tau=$ const, дает еще два соотношения: $A'_xB-B_x'A=0$ и $A'_yB-B'_y=0$. Оба они являются квадратными уравнениями относительно σ. Мы можем записать их в виде: $A_1\sigma^2+B_1\sigma+C_1=0$ и $A_2\sigma^2+B_2\sigma+C_2=0$. Исключая член с σ^2, получим $(A_1B_2-B_1A_2)\sigma+(A_1C_2-C_1A)=0$. Отсюда определяется σ (м.б. равное ∞). Полученное выражение для σ можно еще подставить в одно из соотношений (9) или (10) – мы получим уравнение, удовлетворяющее как гипотезе, так и критерию Пономарева.

Второе из полученных уравнений имеет вид $P_1=h(v+j(u))$ с уже известным $j(u)$. Условия на P_1, чтобы его можно было записать в таком виде при некотором многочлене h, легко получаются из уже использованных соображений. Для этого заметим, что u и v являются образующими кольца $K[x,\ y]$, так как они получаются из x и y при помощи линейного преобразования, которое, как мы видели, невырождено. Положим v+j(u)=w. Тогда v=w-j(u), откуда следует, что u и w также являются образующими этого кольца. (Очевидно, что мы производим автоморфизм де-Жонкьера.) Теперь наше условие записывается в виде $P_1=h(w)$, что равносильно соотношению $(P_1)'_u=0$, откуда $(P_1)'_u=(P_1)'_v j'(u)$. Заменяя P_1 его выражением через P и Q, а частные производные по u и v производными по x и y (что возможно ввиду связывающего их невырожденного линейного преобразования), мы получим соотношение, соответствующее сформулированной выше общей гипотезе и, в частности, доказывающее критерий Пономарева при k(g)=2.

Литература

1. И.Р.Шафаревич. Известия АН СССР. 1981, т. 45, N1.

2. Д.А.Пономарев. Письменный текст (имеется в отделе алгебры МИ РАН).

3. H.Bass, E.Connell and D.Wright. Bull. Amer. Math. Soc. 1982, N7.

4. A.van den Essen. Birkhauser 2000.

5. М.Х.Гизатуллин и В.И.Данилов. Известия АН СССР. т.39, N3.

6. А Г Курош. Теория групп. М. 1940.

7. J.P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2. Paris, 1977 (есть русский перевод в сб. Математика, 1974, 18:1, 18:2).