*ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2008, т. 263, с. 216–226*

*УДК 512.554.32*

# Алгебры операторов Лакса и интегрируемые иерархии[1]

**©2008 г. О. К. Шейнман[2]**

Поступило в июле 2008 г.

*С.П. Новикову к его 70-летию*

В связи с работами И.М. Кричевера и С.П. Новикова по конечнозонному интегрированию, связанному с голоморфными расслоениями, и с их работами по алгебрам Ли на римановых поверхностях недавно возник новый класс бесконечномерных алгебр Ли, названных *алгебрами операторов Лакса* и являющихся почти градуированными алгебрами токов. Они введены И.М. Кричевером и автором в развитие теории операторов Лакса на римановых поверхностях, предложенной ранее И.М. Кричевером, и в дальнейшем исследовались в совместной работе М. Шлихенмайера и автора. В настоящей работе мы строим интегрируемые иерархии лаксовых уравнений описанного типа.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В [6, 7] И.М. Кричевер и С.П. Новиков предложили метод нахождения конечнозонных решений ранга больше 1 уравнений Кадомцева–Петвиашвили и Шрёдингера. Основываясь на этих работах и на своих результатах об эффективной классификации пар коммутирующих дифференциальных операторов ранга больше 1 [8], И.М. Кричевер предложил теорию лаксовых операторов со спектральным параметром на римановой поверхности [4]. В [10] И.М. Кричевер и автор нашли, что эти лаксовы операторы образуют ассоциативную алгебру, и построили их ортогональный и симплектический аналоги, которые образуют алгебры Ли. Все они были названы *алгебрами операторов Лакса.* Алгебры операторов Лакса образуют новый класс одномерных алгебр токов.

В этой работе мы даем некоторые приложения алгебр операторов Лакса к интегрируемым иерархиям лаксовых уравнений.

Приложения алгебр токов к теории лаксовых уравнений имеют давнюю историю. Они начаты в работах И.М. Гельфанда, Л. Дикого, И. Дорфман, А. Реймана, М. Семенова-Тянь-Шаньского, В. Дринфельда, В. Соколова, В. Каца, П. ван Мербеке. Эти приложения главным образом связаны с алгебрами Каца–Муди, которые естественно возникают в контексте операторов Лакса с *рациональным* спектральным параметром. В [4] теория лаксовых представлений и представлений нулевой кривизны с рациональным спектральным параметром была обобщена на случай алгебраических кривых $\Sigma$ произвольного рода $g$. Такие представления несколькими путями возникают в теории интегрируемых систем (ср. [6], где введено представление нулевой кривизны для уравнения Кричевера–Новикова, или [4], где представлен теоретико-полевой аналог системы Калоджеро–Мозера на эллиптической кривой). Алгебры операторов Лакса возникают как соответствующее обобщение алгебр Каца–Муди.

Понятие операторов Лакса на алгебраической кривой тесно связано с результатами А.Н. Тюрина о классификации голоморфных векторных расслоений на алгебраических кри-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00054-а) и программы РАН “Математические методы нелинейной динамики”.

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия; Независимый московский университет, Москва, Россия.
E-mail: sheinman@mi.ras.ru

вых [17]. Оно использует *данные Тюрина*, моделирующие *параметры Тюрина* таких расслоений. Данные Тюрина состоят из точек $\gamma_s$, $s = 1,\dots,ng$, и соответствующих элементов $\alpha_s \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, где $g$ — род римановой поверхности $\Sigma$, а $n$ соответствует рангу расслоения. В [4] линейное пространство операторов Лакса связано с положительным дивизором $D = \sum_k m_k P_k$, $P_k \in \Sigma$. Операторы Лакса определяются как мероморфные $(n\times n)$-матричные функции на $\Sigma$, имеющие полюсы кратности не более $m_k$ в точках $P_k$ и не более чем простые полюсы в точках $\gamma_s$. Коэффициенты лорановского разложения такой матричной функции в окрестности точки $\gamma_s$ должны удовлетворять некоторым условиям, параметризованным вектором $\alpha_s$ (соотношения (3.4) ниже). В [10] найдено, что операторы Лакса, имеющие полюсы произвольных порядков в точках $P_k$, образуют алгебру относительно обычного поточечного умножения, введены $\mathfrak{g}$-значные операторы Лакса и показано, что для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{sp}(2n)$ над $\mathbb{C}$ пространство таких операторов является алгеброй Ли относительно поточечной скобки (в работе [4] рассматривается случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$). Мы обозначаем эту алгебру через $\overline{\mathfrak{g}}$. Рассмотрение $\mathfrak{g}$-значных операторов Лакса требует некоторой модификации упомянутых выше условий. Оказалось, что для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ порядки полюсов в $\gamma_s$ должны быть положены равными 2. Не вызывает сомнения, что с помощью подходящей модификации можно построить алгебры операторов Лакса для других классических алгебр Ли.

В случае отсутствия точек $\gamma_s$ (что соответствует тривиальному векторному расслоению) мы возвращаемся к известному случаю алгебр Кричевера–Новикова (см. обзор в [15]). Если, кроме того, род поверхности $\Sigma$ равен 0 и носитель $D$ состоит из двух точек, мы получаем (с точностью до изоморфизма) алгебры петель.

Подобно алгебрам Кричевера–Новикова алгебры операторов Лакса допускают почти градуированную структуру (теорема 3.2 ниже), обобщающую градуированную структуру аффинных алгебр. Алгебра Ли $\mathcal{V}$ называется *почти градуированной*, если $\mathcal{V} = \bigoplus_i \mathcal{V}_i$, где $\dim \mathcal{V}_i < \infty$, и $[\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j] \subseteq \bigoplus_{k=i+j-k_0}^{k=i+j+k_1} \mathcal{V}_k$, где $k_0$ и $k_1$ не зависят от $i$, $j$.

Известные результаты о центральных расширениях алгебр петель остаются справедливыми для алгебр операторов Лакса, в то время как методы доказательства претерпевают значительные изменения. Для градуированных алгебр токов задача классификации их центральных расширений рассмотрена в ряде статей, начиная с работ В. Каца [2], Р. Муди [11], Г. Гарланда [1] (за дальнейшими комментариями мы отсылаем к [3, § 7.14]). Для алгебр Кричевера–Новикова задача была поставлена в [9] как задача классификации почти градуированных центральных расширений и было очерчено доказательство. Полная классификация почти градуированных центральных расширений дана в [12, 13] для алгебр Кричевера–Новикова и в [10, 14] для алгебр операторов Лакса (см. обзор в [16]).

Теория операторов Лакса на римановых поверхностях, предложенная в [4], включает в себя построение иерархий и гамильтонову теорию лаксовых уравнений и уравнений нулевой кривизны, теорию функций Бейкера–Ахиезера и подход к соответствующим алгебро-геометрическим решениям. В [16] мы поставили задачу обобщения этой теории на все алгебры операторов Лакса и сделали первый шаг в этом направлении (леммы 4.1 и 4.2 ниже). В настоящей работе мы строим интегрируемые иерархии для таких уравнений. Для симплектической алгебры результат, к сожалению, остается лишь гипотезой. Мы излагаем все результаты в новой единообразной форме, а не отдельно для каждого типа классических алгебр, как ранее.

## 2. $M$-ОПЕРАТОРЫ И ВРЕМЕНА

Пусть $\Sigma$ — компактная риманова поверхность рода $g$ с двумя отмеченными точками $P_+$ и $P_-$. Для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы добавочно фиксируем $K$ точек

$$W := \{\gamma_s \in \Sigma \setminus \{P_+, P_-\} \mid s = 1,\dots,K\} \tag{2.1}$$

(значение $K$ будет уточнено в разд. 5). Каждой точке $\gamma_s$ мы сопоставляем вектор $\alpha_s \in \mathbb{C}^n$, заданный с точностью до пропорциональности. Система

$$T := \big\{(\gamma_s, \alpha_s) \mid s = 1, \dots, K\big\} \tag{2.2}$$

ниже называется *данными Тюрина*. Эти данные связаны с модулями голоморфных векторных расслоений на $\Sigma$. В частности, для общих значений $(\gamma_s, \alpha_s)$ с $\alpha_s \neq 0$ и $K = ng$ данные Тюрина параметризуют полустабильные оснащенные голоморфные векторные расслоения ранга $n$ и степени $ng$ на $\Sigma$ [17].

Ниже $\mathfrak{g}$ обозначает одну из матричных алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ или $\mathfrak{s}(n)$, где последняя — алгебра скалярных матриц.

Пусть $M\colon \Sigma \to \mathfrak{g}$ — мероморфная функция. Мы требуем, чтобы в точке $\gamma = \gamma_s$ она имела разложение

$$M = \frac{M_{-2}}{(z - z_\gamma)^2} + \frac{M_{-1}}{z - z_\gamma} + M_0 + \dots, \tag{2.3}$$

где $z$ — фиксированная локальная координата в окрестности $\gamma$, $z_\gamma$ — координата самой точки $\gamma$, $M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, \ldots \in \mathfrak{g}$ и

$$M_{-2} = \lambda\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma, \qquad M_{-1} = (\alpha\mu^{\mathrm{t}} + \varepsilon\mu\alpha^{\mathrm{t}})\sigma, \tag{2.4}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}^n$, $\sigma$ — матрица $n \times n$, верхнее t обозначает транспонирование матриц,

$$\begin{aligned}
&\lambda \equiv 0, \qquad \varepsilon = 0, \qquad \sigma = \mathrm{id} \qquad \text{для} \ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n),\\
&\lambda \equiv 0, \qquad \varepsilon = -1, \quad\ \sigma = \mathrm{id} \qquad \text{для} \ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n),\\
&\phantom{\lambda \equiv 0, \qquad} \varepsilon = 1 \phantom{\quad \sigma = \mathrm{id}} \qquad\qquad\ \ \text{для} \ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

и $\sigma$ — матрица симплектической формы, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$. Здесь и ниже мы опускаем нижние индексы $s$, $\gamma$, указывающие на точку $\gamma$, за исключением обозначения $z_\gamma$.

Каждый $M$-оператор определяет динамическую систему в пространстве данных Тюрина:

$$\dot z_\gamma = -\mu^{\mathrm{t}}\sigma\alpha, \qquad \dot\alpha = -M_0\alpha + \kappa\alpha, \tag{2.6}$$

где точка обозначает производную по времени. Лемма 4.1 и последующие замечания (см. ниже) поясняют эти уравнения.

**Лемма 2.1.** *Для любых двух $M$-операторов $M_a$, $M_b$ и соответствующих времен выражение*

$$M_{ab} = \partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b]$$

*также является $M$-оператором.*

**Доказательство.** Проверим, что $M_{ab}$ удовлетворяет соотношениям (2.4).

Для произвольной алгебры $\mathfrak{g}$ из нашего списка имеем

$$M_a = \frac{\lambda_a\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma}{(z - z_\gamma)^2} + \frac{(\alpha\mu_a^{\mathrm{t}} + \varepsilon\mu_a\alpha^{\mathrm{t}})\sigma}{z - z_\gamma} + M_{0a} + \dots$$

и аналогичное выражение для $M_b$, где $\lambda_a$, $\lambda_b$, $\varepsilon$ и $\sigma = \mathrm{id}$ удовлетворяют соотношениям (2.5). Далее имеем

$$\begin{aligned}
\partial_a M_b = 2(\partial_a z_\gamma)\frac{\lambda_b\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma}{(z - z_\gamma)^3} + \frac{((\partial_a\lambda_b)\alpha\alpha^{\mathrm{t}} + \lambda_b\partial_a(\alpha\alpha^{\mathrm{t}}))\sigma + (\partial_a z_\gamma)M_{-1,b}}{(z - z_\gamma)^2} + {}\\
+ \frac{((\partial_a\alpha)\mu_b^{\mathrm{t}} + \varepsilon\mu_b(\partial_a\alpha^{\mathrm{t}}) + \alpha(\partial_a\mu_b^{\mathrm{t}}) + \varepsilon(\partial_a\mu_b)\alpha^{\mathrm{t}})\sigma}{z - z_\gamma} + \dots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

и аналогичное утверждение для $\partial_b M_a$.

Для коммутатора имеем

$$[M_a, M_b] = \frac{(1+\varepsilon^2)(\lambda_b \cdot \mu_a^{\mathrm{t}}\sigma\alpha - \lambda_a \cdot \mu_b^{\mathrm{t}}\sigma\alpha)\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma}{(z-z_\gamma)^3} +$$
$$+ \frac{(\lambda_a\partial_b - \lambda_b\partial_a)\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma + \lambda_{ab}\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma + (\mu_a^{\mathrm{t}}\sigma\alpha)M_{-1,b} - (\mu_b^{\mathrm{t}}\sigma\alpha)M_{-1,a}}{(z-z_\gamma)^2} +$$
$$+ \frac{((\partial_b\alpha)\mu_a^{\mathrm{t}} + \varepsilon\mu_a(\partial_b\alpha^{\mathrm{t}}))\sigma - ((\partial_a\alpha)\mu_b^{\mathrm{t}} + \varepsilon\mu_b(\partial_a\alpha^{\mathrm{t}}))\sigma}{z-z_\gamma} + \frac{(\alpha\mu_{ab}^{\mathrm{t}} + \varepsilon\mu_{ab}\alpha^{\mathrm{t}})\sigma}{z-z_\gamma} + \ldots, \quad (2.8)$$

где $\lambda_{ab} = 2\lambda_b\kappa_a - 2\lambda_a\kappa_b + \varepsilon(\mu_a^{\mathrm{t}}\sigma\mu_b - \mu_b^{\mathrm{t}}\sigma\mu_a)$, $\mu_{ab} = \kappa_a\mu_b - \kappa_b\mu_a - \lambda_a M_{1b}\alpha + \lambda_b M_{1a}\alpha - M_{0b}\mu_a + M_{0a}\mu_b$. Чтобы получить эти соотношения, мы использовали уравнения (2.6) и некоторые другие соотношения, в частности $\varepsilon\alpha^{\mathrm{t}}\sigma\mu = -\varepsilon^2\mu^{\mathrm{t}}\sigma\alpha$ и $\lambda\alpha^{\mathrm{t}}\sigma\alpha = 0$, которые выполняются во всех случаях. При вычислении $[M_a, M_b]_{-2}$ мы также использовали соотношение

$$[M_{-1,a}, M_{-1,b}] = (\mu_a^{\mathrm{t}}\sigma\alpha)M_{-1,b} - (\mu_b^{\mathrm{t}}\sigma\alpha)M_{-1,a} + \varepsilon(\mu_a^{\mathrm{t}}\sigma\mu_b - \mu_b^{\mathrm{t}}\sigma\mu_a)\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma,$$

которое может быть проверено с использованием (2.4). Чтобы получить $[M_a, M_b]_{-1}$ в форме (2.8), существенно использовалось, что $M_{i,a}^{\mathrm{t}} = -\sigma M_{i,a}\sigma^{-1}$ для $\varepsilon \neq 0$ (что следует из (2.5)) и то же самое для $M_{i,b}$.

Сравнивая (2.8) и (2.7) (и соответствующее соотношение для $\partial_b M_a$) и используя (2.6), мы получаем

$$M_{ab} = \frac{\widetilde{\lambda}_{ab}\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma}{(z-z_\gamma)^2} + \frac{(\alpha\widetilde{\mu}_{ab}^{\mathrm{t}} + \varepsilon\widetilde{\mu}_{ab}\alpha^{\mathrm{t}})\sigma}{z-z_\gamma} + \ldots,$$

где $\widetilde{\lambda}_{ab} = \partial_a\lambda_b - \partial_b\lambda_a + \lambda_{ab}$, $\widetilde{\mu}_{ab} = \partial_a\mu_b - \partial_b\mu_a + \mu_{ab}$. Мы замечаем, что $M_{ab}$ имеет вид (2.3), (2.4). В частности, член порядка $-3$ обращается в 0, так как либо $\lambda_a = \lambda_b = 0$, либо $\varepsilon^2 = 1$ (что вытекает из (2.5)). $\square$

**Замечание.** По этой причине разложения вида (2.3) с полюсом второго порядка запрещены в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Действительно, это потребовало бы, чтобы $\varepsilon \neq 0$, следовательно, $M_i^{\mathrm{t}} = -\sigma M_i\sigma^{-1}$, что выполняется лишь в случае $\mathfrak{so}(n)$ или $\mathfrak{sp}(2n)$.

## 3. $L$-ОПЕРАТОРЫ И АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ ЛАКСА

Определим операторы Лакса ($L$-операторы) как $M$-операторы, порождающие тривиальную динамику (2.6). Таким образом, по определению каждый $L$-оператор — это мероморфная $\mathfrak{g}$-значная функция $L$ на $\Sigma$, голоморфная вне $W \cup \{P_+, P_-\}$, такая, что в точке $\gamma = \gamma_s$

$$L = \frac{L_{-2}}{(z-z_\gamma)^2} + \frac{L_{-1}}{z-z_\gamma} + L_0 + \ldots, \quad (3.1)$$

где $z$ — фиксированная локальная координата в окрестности $\gamma$, $z_\gamma$ — координата самой точки $\gamma$, $L_{-2}, L_{-1}, L_0, L_1, \ldots \in \mathfrak{g}$ и

$$L_{-2} = \nu\alpha\alpha^{\mathrm{t}}\sigma, \qquad L_{-1} = (\alpha\beta^{\mathrm{t}} + \varepsilon\beta\alpha^{\mathrm{t}})\sigma, \quad (3.2)$$

где $\nu \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}^n$, $\sigma$ — матрица $n \times n$,

$$\begin{array}{llll} \nu \equiv 0, & \varepsilon = 0, & \sigma = \mathrm{id} & \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n), \\ \nu \equiv 0, & \varepsilon = -1, & \sigma = \mathrm{id} & \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n), \\ & \varepsilon = 1 & & \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n) \end{array} \quad (3.3)$$

и $\sigma$ — матрица симплектической формы, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$.

Далее требование тривиальности динамики (2.6) записывается следующим образом:

$$\beta^{\mathrm{t}}\sigma\alpha = 0, \qquad L_0\alpha = \kappa\alpha. \tag{3.4}$$

Дополнительно мы предполагаем, что

$$\alpha^{\mathrm{t}}\alpha = 0 \qquad \text{для} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) \tag{3.5}$$

и

$$\alpha^{\mathrm{t}}\sigma L_1\alpha = 0 \qquad \text{для} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \tag{3.6}$$

**Теорема 3.1** [10]. *Пространство $\overline{\mathfrak{g}}$ операторов Лакса является алгеброй Ли относительно поточечного матричного коммутатора. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ она, кроме того, является ассоциативной алгеброй относительно поточечного матричного умножения.*

Алгебра Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ называется *алгеброй операторов Лакса.*

В [10] теорема 3.1 доказана прямым вычислением, причем для каждой классической комплексной алгебры Ли отдельно. В контексте настоящей работы значительная часть этого вычисления может быть опущена благодаря лемме 2.1. Из этой леммы мы заключаем, что для каждой пары $L_a$, $L_b$ операторов Лакса их скобка $[L_a, L_b]$ является $M$-оператором и, как таковая, записывается в виде (2.3) и удовлетворяет (2.4), (2.5), где $\lambda = \lambda_{ab}$ и $\mu = \mu_{ab}$ определены соотношениями (2.8). Интерпретируя это в терминах $L$, мы получаем для $[L_a, L_b]$ соотношения (3.1)–(3.3) и выражения для параметров $\nu$, $\beta$ коммутатора. Мы используем эти выражения и соотношения (3.4)–(3.6) для $L_a$, $L_b$, чтобы доказать соотношения (3.4)–(3.6) для коммутатора этих операторов и завершить доказательство.

Алгебра $\overline{\mathfrak{g}}$ зависит как от выбора параметров Тюрина, так и от выбора точек $P_+$ и $P_-$, но мы опускаем какое бы то ни было указание на эту зависимость в обозначениях.

Рассмотрим $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ более подробно. В этом случае $L_{-2} = 0$, $L_{-1} = \alpha\beta^{\mathrm{t}}$, где $\beta^{\mathrm{t}}\alpha = 0$ и $L_0\alpha = \kappa\alpha$. Из этих условий следует, что элементы алгебры операторов Лакса $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ могут рассматриваться как сечения расслоения эндоморфизмов $\mathrm{End}(B)$, где $B$ — голоморфное расслоение, соответствующее параметрам Тюрина $T$.

Расщепление $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{s}(n) \oplus \mathfrak{sl}(n)$, данное соответствием

$$X \mapsto \left(\frac{\mathrm{tr}(X)}{n} I_n,\, X - \frac{\mathrm{tr}(X)}{n} I_n\right), \tag{3.7}$$

где $I_n$ — единичная матрица $n \times n$, индуцирует соответствующее расщепление для $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$:

$$\overline{\mathfrak{gl}}(n) = \overline{\mathfrak{s}}(n) \oplus \overline{\mathfrak{sl}}(n). \tag{3.8}$$

Для $\overline{\mathfrak{s}}(n)$ все коэффициенты — скалярные матрицы. По этой причине коэффициенты $L_{-1}$ обращаются в нуль во всех $\gamma \in W$, следовательно, элементы $\overline{\mathfrak{s}}(n)$ голоморфны на $W$. Кроме того, для $L_{s,0}$ как для скалярной матрицы любой $\alpha_s$ является собственным вектором. Это означает, что по определению

$$\overline{\mathfrak{s}}(n) \cong \mathfrak{s}(n) \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \tag{3.9}$$

— изоморфизм ассоциативных алгебр.

Любая алгебра операторов Лакса $\overline{\mathfrak{g}}$ допускает *почти градуированную структуру* (см. определение во введении).

Предположим, все наши отмеченные точки (включая точки из $W$) находятся в общем положении и $W \neq \varnothing$. Выберем локальные координаты $z_\pm$ в $P_\pm$ и $z_s$ в $\gamma_s$, $s = 1, \ldots, K$. Предположим, что $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли из нашего списка. Для произвольного $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим подпространство

$$\overline{\mathfrak{g}}_m := \bigl\{L \in \overline{\mathfrak{g}} \mid \exists X_+, X_- \in \mathfrak{g} \text{ такие, что } L(z_+) = X_+ z_+^m + O(z_+^{m+1}),\ L(z_-) = X_- z_-^{-m-g} + O(z_-^{-m-g+1})\bigr\}. \tag{3.10}$$

Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ выше доказано, что $\overline{\mathfrak{gl}}(n) = \overline{\mathfrak{sl}}(n) \oplus \mathcal{A} \cdot \mathrm{id}$, где $\mathcal{A}$ — алгебра функций Кричевера–Новикова. В этом случае полагаем

$$\overline{\mathfrak{gl}}(n)_m = \overline{\mathfrak{sl}}(n)_m \oplus \mathcal{A}_m \cdot \mathrm{id}, \tag{3.11}$$

где $\mathcal{A}_m$ — соответствующее однородное подпространство для $\mathcal{A}$ [9]. Если $W = \varnothing$, мы находимся в ситуации алгебр Кричевера–Новикова и используем соответствующее определение [9, 15].

Мы называем $\overline{\mathfrak{g}}_m$ (*однородным*) *подпространством степени* $m$ в $\overline{\mathfrak{g}}$.

**Теорема 3.2** [10]. *Подпространства $\overline{\mathfrak{g}}_m$ задают на $\overline{\mathfrak{g}}$ структуру почти градуированной алгебры Ли. Точнее,*

1) $\dim \overline{\mathfrak{g}}_m = \dim \mathfrak{g}$;
2) $\overline{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \overline{\mathfrak{g}}_m$;
3) $[\overline{\mathfrak{g}}_m, \overline{\mathfrak{g}}_k] \subseteq \bigoplus_{h=m+k}^{m+k+M} \overline{\mathfrak{g}}_h$, *где* $M = g$ *для* $\overline{\mathfrak{sl}}(n)$, $\overline{\mathfrak{so}}(n)$, $\overline{\mathfrak{sp}}(2n)$, $M = g+1$ *для* $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$.

**Следствие 3.3.** *Пусть $X$ — элемент $\mathfrak{g}$. Для любого $m$ существует единственный элемент $X_m$ в $\overline{\mathfrak{g}}_m$ такой, что*

$$X_m = X z_+^m + O(z_+^{m+1}). \tag{3.12}$$

**Доказательство.** Из утверждения 1) теоремы 3.2, т.е. из того, что $\dim \overline{\mathfrak{g}}_m = \dim \mathfrak{g}$, следует, что существует единственная линейная комбинация базисных элементов такая, что (3.12) выполняется. □

## 4. $\mathfrak{g}$-ЗНАЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАКСА

В этом разделе мы рассмотрим совместность лаксовых уравнений вида

$$L_t = [L, M], \qquad L \in \overline{\mathfrak{g}}, \tag{4.1}$$

где $L$, $M$ — это $L$-оператор и $M$-оператор соответственно.

Следуя [4], пусть $\mathcal{L}^D = \{L \in \overline{\mathfrak{g}} \mid (L) + D \geq 0\}$ будет фазовым пространством лаксовой системы, где $D = \sum_i m_i P_i$ — положительный дивизор на $\Sigma$. Пусть точка сверху обозначает производную по времени.

**Лемма 4.1.** *В точках слабых особенностей уравнения на главные части $L$ и $M$, вытекающие из лаксовых уравнений* (4.1), *выполнены при следующих достаточных условиях*:

$$\dot z_\gamma = -\mu^{\mathrm{t}}\sigma\alpha, \qquad \dot\alpha = -M_0\alpha + \kappa\alpha, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &\dot\beta = M_0^{\mathrm{t}}\beta - L_0^{\mathrm{t}}\mu + \kappa_L\mu - \kappa\beta && \textit{для}\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n),\\ &\dot\beta = -M_0\beta + L_0\mu + \kappa_L\mu - \kappa\beta && \textit{для}\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n),\\ &\dot\beta = -M_0\beta + L_0\mu + \kappa_L\mu - \kappa\beta - \nu M_1\alpha + \lambda L_1\alpha && \textit{для}\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n), \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\dot\nu = 2(\beta^{\mathrm{t}}\sigma\mu + \lambda\kappa_L - \nu\kappa) \qquad \textit{для}\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n), \tag{4.4}$$

*где $\kappa_L$ определено соотношением $L_0\alpha = \kappa_L\alpha$. Более того, условия $\dot z_\gamma = -\mu^{\mathrm t}\sigma\alpha$ и (4.3) являются необходимыми.*

**Доказательство.** Прямым вычислением мы получаем

$$\dot L = 2\dot z_\gamma \frac{\nu\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma}{(z-z_\gamma)^3} + \frac{\dot\nu\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma + \nu\dot\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma + \nu\alpha\dot\alpha^{\mathrm t}\sigma + \dot z_\gamma(\alpha\beta^{\mathrm t} + \varepsilon\beta\alpha^{\mathrm t})\sigma}{(z-z_\gamma)^2} + \\ + \frac{\dot\alpha\beta^{\mathrm t}\sigma + \alpha\dot\beta^{\mathrm t}\sigma + \varepsilon\dot\beta\alpha^{\mathrm t}\sigma + \varepsilon\beta\dot\alpha^{\mathrm t}\sigma}{z-z_\gamma} + (\dot L_0 - \dot z_\gamma L_1) + \ldots \tag{4.5}$$

Используя (2.8) для $M_a = L$, $M_b = M$, мы получим

$$[L, M] = \frac{(1+\varepsilon)^2(-\nu\cdot\mu^{\mathrm t}\sigma\alpha)\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma}{(z-z_\gamma)^3} + \frac{\nu(\dot\alpha\alpha^{\mathrm t} + \alpha\dot\alpha^{\mathrm t})\sigma + \lambda_{ab}\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma - (\mu^{\mathrm t}\sigma\alpha)L_{-1}}{(z-z_\gamma)^2} + \\ + \frac{(\dot\alpha\beta^{\mathrm t} + \varepsilon\beta\dot\alpha^{\mathrm t})\sigma + (\alpha\mu_{ab}^{\mathrm t} + \varepsilon\mu_{ab}\alpha^{\mathrm t})\sigma}{z-z_\gamma} + \ldots \tag{4.6}$$

Заметим, что для вывода последнего соотношения используется второе из соотношений (4.2).

Если $\nu \ne 0$ (т.е. $\mathfrak g = \mathfrak{sp}(2n)$), то члены порядка $-3$ равны тогда и только тогда, когда

$$\dot z_\gamma = -\mu^{\mathrm t}\sigma\alpha.$$

Если $\nu \equiv 0$, то члены порядка $-3$ в (4.5) и (4.6) оба равны 0. Члены порядка $-2$ равны тогда и только тогда, когда

$$\dot\nu\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma + \dot z_\gamma(\alpha\beta^{\mathrm t} + \varepsilon\beta\alpha^{\mathrm t})\sigma = \lambda_{ab}\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma - (\mu^{\mathrm t}\sigma\alpha)L_{-1}, \tag{4.7}$$

где $\lambda_{ab}$ определено после соотношения (2.8). Ввиду (4.7) мы имеем

$$\dot\nu\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma = \lambda_{ab}\alpha\alpha^{\mathrm t}\sigma,$$

что выполнено, если $\dot\nu = \lambda_{ab}$. Заметим, что это соотношение тривиально всегда, за исключением $\mathfrak g = \mathfrak{sp}(2n)$. В этом случае имеем $\lambda_{ab} = 2(\lambda\kappa_L - \nu\kappa + 2\beta^{\mathrm t}\sigma\mu)$ и наше соотношение совпадает с (4.4).

Аналогично, сравнивая члены порядка $-1$ в соотношениях (4.5) и (4.6), мы находим, что они равны, если $\dot\beta = \mu_{ab}$, где $\mu_{ab}$ определены соотношениями (2.8). Это приводит к соотношениям (4.3). Так как соотношения (2.8) сами получены при предположениях (4.2), мы получаем утверждение леммы. $\square$

**Замечание.** Уравнение (4.3) для $\mathfrak g = \mathfrak{so}(n)$ следует из соответствующего уравнения для $\mathfrak{gl}(n)$ ввиду соотношений $M_0^{\mathrm t} = -M_0$, $L_0^{\mathrm t} = -L_0$. Оно также следует из уравнения для $\mathfrak g = \mathfrak{sp}(2n)$ с соответствующей заменой матрицы $\sigma$, если $\lambda = \nu = 0$, что действительно имеет место для $\mathfrak g = \mathfrak{so}(n)$.

**Замечание.** Второе условие в (4.2) и условия (4.3) не являются необходимыми. Утверждение остается верным, если мы возьмем $\dot\alpha = -M_0\alpha$ в (4.2) и исключим член $\kappa\beta$ в (4.3).

Следующая лемма показывает, что уравнения (4.3), (4.4) могут быть отброшены. Наиболее важными являются уравнения (4.2). Это уравнения движения параметров Тюрина. Они существенно используются в [4]. Первоначально концепция движущихся параметров Тюрина введена в [6], где она послужила для эффективного решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили в некоторых случаях.

Пусть $T_L\mathcal L^D$ обозначает касательное пространство к $\mathcal L^D$ в точке $L$.

**Лемма 4.2.** $[L,M]\in T_L\mathcal{L}^D \Leftrightarrow ([L,M])+D\ge 0$ *вне точек* $\gamma$, *и уравнения* (4.2) *выполнены в каждой точке* $\gamma$. *В случае* $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$ *это верно при условии* $\alpha^{\rm t}\sigma M_1\alpha=0$.

**Доказательство.** В нашем доказательстве мы следуем работе [4], где лемма сформулирована и доказана для $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n)$.

Пусть $z$ — локальная координата в (фиксированном) открытом множестве, содержащем слабую особенность $\gamma$, и $z_\gamma$ — соответствующая координата точки $\gamma$.

Отождествим $T\mathcal{L}^D$ с пространством $\mathcal{T}^D$ всех мероморфных $\mathfrak{g}$-значных функций $T$ таких, что в каждой слабой особенности $\gamma$

$$T=2\dot z_\gamma\frac{\nu\alpha\alpha^{\rm t}\sigma}{(z-z_\gamma)^3}+\frac{\dot\nu\alpha\alpha^{\rm t}\sigma+\nu(\dot\alpha\alpha^{\rm t}+\alpha\dot\alpha^{\rm t})\sigma+\dot z_\gamma(\alpha\beta^{\rm t}+\varepsilon\beta\alpha^{\rm t})\sigma}{(z-z_\gamma)^2}+$$

$$+\frac{(\dot\alpha\beta^{\rm t}+\varepsilon\beta\dot\alpha^{\rm t}+\alpha\dot\beta^{\rm t}+\varepsilon\dot\beta\alpha^{\rm t})\sigma}{z-z_\gamma}+T_0+\ldots, \tag{4.8}$$

$$\dot\alpha^{\rm t}\sigma\beta+\alpha^{\rm t}\sigma\dot\beta=0, \tag{4.9}$$

$$T_0\alpha=\kappa\dot\alpha+\dot\kappa\alpha-L_0\dot\alpha-\dot z_\gamma L_1\alpha, \tag{4.10}$$

где $\dot z_\gamma$, $\dot\kappa$ — константы, $\dot\alpha$, $\dot\beta$ — постоянные векторы, удовлетворяющие соотношениям (4.2), и дивизор функции $T$ вне точек $\gamma$ больше или равен $-D$.

Соотношение (4.8) моделирует соотношение (4.5), полученное путем дифференцирования по времени соотношения (3.1). В частности,

$$T_0=\dot L_0-\dot z_\gamma L_1.$$

Вместе с дифференцированием по времени соотношения (3.4) это дает (4.10). Таким образом $T\mathcal{L}^D$ вкладывается в $\mathcal{T}^D$. Проверим совпадение размерностей этих пространств. Это делается аналогично для всех классических алгебр Ли, поэтому мы покажем это в наиболее трудном случае алгебры $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$. Мы имеем $(T)+\widetilde D\ge 0$, где $\widetilde D=D+3\sum\gamma$ и $\deg\widetilde D=\deg D+3K$. По теореме Римана–Роха $\dim\{T\mid (T)+\widetilde D\ge 0\}=(\dim\mathfrak{g})(\deg D+3K-g+1)$. Элементы подпространства $\mathcal{T}^D$ выделяются в пространстве $\{T\mid (T)+\widetilde D\ge 0\}$ следующими соотношениями. Во-первых, в каждой точке $\gamma$

$$\begin{aligned} &T_{-3}=2\dot z_\gamma\nu\alpha\alpha^{\rm t}\sigma,\\ &T_{-2}=\dot\nu\alpha\alpha^{\rm t}\sigma+\nu(\dot\alpha\alpha^{\rm t}+\alpha\dot\alpha^{\rm t})\sigma+\dot z_\gamma(\alpha\beta^{\rm t}+\beta\alpha^{\rm t})\sigma,\\ &T_{-1}=(\dot\alpha\beta^{\rm t}+\alpha\dot\beta^{\rm t}+\dot\beta\alpha^{\rm t}+\beta\dot\alpha^{\rm t})\sigma.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Так как левые части принадлежат $\mathfrak{g}$, (4.11) дает $3\dim\mathfrak{g}$ соотношений. Еще $2n+1$ соотношений дают (4.9) и (4.10), и еще $2n+1$ дает (4.2). Таким образом, мы имеем $3\dim\mathfrak{g}+4n+2$ соотношений. Эти соотношения содержат $4n+2$ свободных параметров $\dot z_\gamma$, $\dot\nu$, $\dot\alpha$, $\dot\beta$. Таким образом, в действительности мы получили $3\dim\mathfrak{g}$ соотношений в каждой точке $\gamma$ и число этих точек равно $K$, следовательно, мы имеем $3(\dim\mathfrak{g})K$ соотношений. Мы видим, что $\dim\mathcal{T}^D=(\dim\mathfrak{g})(\deg D-g+1)$.

Но $\mathcal{L}^D$ имеет ту же размерность. Мы можем вычислить это аналогично или воспользоваться теоремой 3.2. Предположим, мы находимся в двухточечной ситуации, т.е. $D=-m_+P_++(m_-+g)P_-$, где для простоты $m_->m_+$. Тогда $\mathcal{L}^D=\mathfrak{g}_{m_+}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_{m_-}$. По теореме 3.2 $\dim\mathcal{L}^D=(\dim\mathfrak{g})(m_--m_++1)$, что в точности равно $(\dim\mathfrak{g})(\deg D-g+1)$. Мы делаем вывод, что $\dim\mathcal{T}^D=\dim T_L\mathcal{L}^D$, следовательно, эти линейные пространства совпадают.

Далее мы доказываем, что если $L$, $M$ таковы, как определено выше, то $[L,M]$ обладает свойствами (4.8)–(4.10), т.е. принадлежит пространству $\mathcal{T}^D$. Доказательство снова прямолинейно по идее. Покажем, например, (4.10). Обозначим член нулевой степени $[L,M]_0$ коммутатора через $T_0$. Тогда в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n)$ находим с помощью вычисления

$$T_0\alpha=\alpha(\beta^{\mathrm t}M_1-\mu^{\mathrm t}L_1\alpha)+(L_0-\kappa)M_0\alpha+L_1(\mu^{\mathrm t}\alpha). \tag{4.12}$$

Если мы заменим $\mu^{\mathrm t}\alpha$ на $-\dot z_\gamma$, $M_0\alpha$ на $-\dot\alpha$ и обозначим $\beta^{\mathrm t}M_1-\mu^{\mathrm t}L_1\alpha$ через $\dot\kappa$, мы получим (4.10). Для алгебр Ли $\mathfrak{g}$ других типов выражение для $T_0\alpha$ более сложно, и мы используем соотношения (3.4)–(3.6), чтобы отождествить их с (4.10). В случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$ мы также пользуемся соотношением $\alpha^{\mathrm t}\sigma M_1\alpha=0$. $\square$

Из леммы 4.2 непосредственно следует, что, если $([L,M])+D\ge 0$ вне точек $\gamma$ и выполнены уравнения движущихся полюсов, уравнения Лакса (4.1) совместны.

## 5. КОММУТИРУЮЩИЕ ИЕРАРХИИ

По дивизору $D=\sum m_iP_i$ определим дивизор $\widetilde D=D+\delta\sum_{s=1}^K\gamma_s$, где

$$K=\begin{cases} ng, & \mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n),\mathfrak{so}(2n),\mathfrak{so}(2n+1),\mathfrak{sp}(2n),\\ (n+1)g, & \mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n),\end{cases}$$

и

$$\delta=\begin{cases} 1, & \mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n),\mathfrak{sl}(n),\mathfrak{so}(2n),\mathfrak{so}(2n+1),\\ 2, & \mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n).\end{cases}$$

Определим $N^D$ как пространство $M$-операторов таких, что $(M)+\widetilde D\ge 0$ (и $\mu^{\mathrm t}\alpha=0$ для $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n)$).

**Лемма 5.1.** $\dim N^D=(\dim\mathfrak{g})(\deg D+1)$.

**Доказательство.** Вычислим $\dim N^D$ по теореме Римана–Роха, принимая во внимание дополнительные соотношения в точках $\gamma$. Это соотношения, определяющие $M_{-2}$ и $M_{-1}$. Число этих соотношений в каждой точке $\gamma$ равно $\delta\dim\mathfrak{g}$. Мы также имеем свободные параметры $\lambda$, $\mu$. Пусть $r$ — число этих параметров для фиксированного $\gamma$, а $r_\mu$ равно 1, если соотношения $\mu^{\mathrm t}\alpha=0$ включены в определение $N^D$, и равно 0 в противном случае (для всех $\gamma$ одновременно). Мы можем считать, что в каждой точке $\gamma$ имеется $\delta\dim\mathfrak{g}-r+r_\mu$ соотношений.

Запишем $K$ в виде $K=lg$, где $l$ равно $n$ или $n+1$ в зависимости от типа классической алгебры Ли. Имеем

$$\begin{aligned}\dim N^D&=(\dim\mathfrak{g})(\deg D+\delta lg-g+1)-(\delta\dim\mathfrak{g}-r+r_\mu)lg=\\ &=(\dim\mathfrak{g})(\deg D+1)-(\dim\mathfrak{g}-(r-r_\mu)l)g.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Далее проверим, что

$$\dim\mathfrak{g}-(r-r_\mu)l=0. \tag{5.2}$$

Действительно, для $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n)$ здесь $r=n$, $r_\mu=0$, $l=n$, следовательно, $(r-r_\mu)l=n^2$. Если $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n)$, то $r=n$, $r_\mu=1$, $l=n+1$ и $(r-r_\mu)l=n^2-1$. Если $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n+1)$ или $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$, то $r=2n+1$, $r_\mu=0$, $l=n$ и, следовательно, $(r-r_\mu)l=(2n+1)n$. Напомним, что в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$ значение $r=2n+1$ — это число параметров, происходящих из $\lambda$ и $\mu$, а в остальных случаях — только из $\mu$. Наконец, если $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n)$, то $r=2n$, $r_\mu=1$, $l=n$ и $(r-r_\mu)l=(2n-1)n$. Во всех случаях (5.2) выполняется. $\square$

Следуя [4], зафиксируем точку $P_0 \in \Sigma$ и локальные координаты $w_0$, $w_i$ в окрестностях точек $P_0$, $P_i$. Наша следующая цель — определить калибровочно инвариантные функции $M_a$, удовлетворяющие предположениям леммы 4.2. Определим $a$ как тройку

$$a = (P_i, k, m), \qquad k > 0, \quad m > -m_i, \tag{5.3}$$

где $k$, $m$ — целые, $k \equiv 1 \pmod 2$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$.

По лемме 5.1 для общих $L$ существует единственная $\mathfrak{g}$-значная функция $M_a$ такая, что

(i) $M_a$ является $M$-оператором;

(ii) $M_a$ вне точек $\gamma$ имеет полюс только в точке $P_i$ и

$$M_a(q) = w_i^{-m} L^n(q) + O(1),$$

т.е. сингулярные части $M_a$ и $w_i^{-m} L^n$ совпадают;

(iii) $M_a$ нормализована условием $M_a(P_0) = 0$.

**Теорема 5.2.** *Для* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{so}(2n), \mathfrak{so}(2n+1)$ *уравнения*

$$\partial_a L = [L, M_a], \qquad \partial_a = \frac{\partial}{\partial t_a},$$

*определяют иерархию коммутирующих потоков на открытом подмножестве в* $\mathcal{L}^D$.

Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ теорема сформулирована и доказана в [4].

**Доказательство.** Из (ii) следует, что $([L, M_a]) + D \geq 0$, следовательно, по лемме 4.2 $[L, M_a] \in T_L \mathcal{L}^D$ и уравнение $\partial_a L = [L, M_a]$ определяет поток на $\mathcal{L}^D$.

Чтобы доказать коммутативность таких потоков, достаточно проверить, что $M_{ab} = \partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b] = 0$ тождественно. По лемме 2.1 $M_{ab}$ является $M$-оператором. Мы докажем, что этот $M$-оператор регулярен в точках дивизора $D$. По лемме 5.1 размерность таких операторов имеет ту же размерность, что и $\mathfrak{g}$. Ввиду (iii) мы получаем $M_{ab} = 0$.

Докажем, что $M_{ab}$ регулярно в точках дивизора $D$. Мы повторяем здесь соответствующую часть доказательства теоремы 2.1 работы [4]. Сначала предположим, что индексы $a$, $b$ соответствуют одной и той же точке $P_i$, т.е. $a = (P_i, n, m)$, $b = (P_i, n', m')$. Обозначим $M_a - w^{-m} L^n$ через $M_a^-$, а $M_b - w^{-m'} L^{n'}$ через $M_b^-$; тогда ввиду (ii) $M_a^-$ и $M_b^-$ регулярны в окрестности $P_i$. Мы имеем

$$\partial_a M_b = w^{-m'} \partial_a L^{n'} + \partial_a M_b^- = w^{-m'} [L^{n'}, M_a] + \partial_a M_b^- = w^{-m'} [L^{n'}, M_a^-] + \partial_a M_b^-$$

и

$$[M_a, M_b] = [M_a^- + w^{-m} L^n, M_b^- + w^{-m'} L^{n'}] = w^{-m} [L^n, M_b^-] - w^{-m'} [L^{n'}, M_a^-] + [M_a^-, M_b^-].$$

Следовательно, $M_{ab} = \partial_a M_b^- - \partial_b M_a^- + [M_a^-, M_b^-]$ в точке $P_i$, что представляет собой регулярное в этой точке выражение. По определению $M_{ab}$ регулярно также в остальных точках дивизора $D$.

В случае, когда $a$ и $b$ соответствуют различным точкам дивизора $D$, доказательство аналогично. □

Доказательство теоремы 5.2 в основном проходит и в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, за исключением ссылки на лемму 4.2, которая верна в этом случае лишь при $\alpha^{\mathrm{t}} \sigma M_1 \alpha = 0$. Проблема в том, чтобы доказать это свойство для операторов $M_a$.

**Гипотеза.** При подходящих предположениях теорема 5.2 верна также в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Garland H.* The arithmetic theory of loop groups // Publ. Math. IHES. 1980. V. 52. P. 5–136.
2. *Кац В.Г.* Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, №6. С. 1323–1367.
3. *Kac V.G.* Infinite dimensional Lie algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
4. *Krichever I.M.* Vector bundles and Lax equations on algebraic curves // Commun. Math. Phys. 2002. V. 229, N 2. P. 229–269.
5. *Krichever I.M.* Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations // Moscow Math. J. 2002. V. 2. P. 717–752; arXiv: hep-th/0112096.
6. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН. 1980. Т. 35, №6. С. 47–68.
7. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП). I // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, №4. С. 41–52.
8. *Кричевер И.М.* Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, №3. С. 20–31.
9. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21, №2. С. 46–63.
10. *Кричевер И.М., Шейнман О.К.* Алгебры операторов Лакса // Функц. анализ и его прил. 2007. Т. 41, №4. С. 46–59.
11. *Moody R.V.* Euclidean Lie algebras // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 1432–1454.
12. *Schlichenmaier M.* Local cocycles and central extensions for multipoint algebras of Krichever–Novikov type // J. reine und angew. Math. 2003. Bd. 559. S. 53–94.
13. *Schlichenmaier M.* Higher genus affine algebras of Krichever–Novikov type // Moscow Math. J. 2003. V. 3. P. 1395–1427.
14. *Schlichenmaier M., Sheinman O.K.* Central extensions of Lax operator algebras: E-print, 2007. arXiv: 0711.4688.
15. *Sheinman O.K.* Affine Krichever–Novikov algebras, their representations and applications // Geometry, topology, and mathematical physics: S.P. Novikov's seminar 2002–2003 / Ed. by V.M. Buchstaber, I.M. Krichever. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2004. P. 297–316. (AMS Transl. Ser. 2; V. 212); arXiv: math.RT/0304020.
16. *Sheinman O.K.* On certain current algebras related to finite-zone integration // Geometry, topology, and mathematical physics: S.P. Novikov's seminar 2006–2007 / Ed. by V.M. Buchstaber, I.M. Krichever. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2008. (AMS Transl. Ser. 2; V. 224).
17. *Тюрин А.Н.* Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, №3. С. 657–688.