ПРОЕКТИВНО ПЛОСКИЕ СВЯЗНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВЕ МОДУЛЕЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА-ЗАМОЛОДЧИКОВА

О.К.ШЕЙНМАН

Аннотация. В статье развивается глобальный операторный подход к теории WZWN для компактных римановых поверхностей произвольного рода с отмеченными точками. Глобальность означает здесь, что мы используем алгебры Кричевера-Новикова калибровочных и конформных симметрий (то есть глобальных симметрий) вместо алгебр петель и Вирасоро, которые в этом контексте являются локальными. Подробное изложение глобального подхода со всеми необходимыми деталями теории алгебр Кричевера-Новикова и их представлений дано нами в статьях (УМН, 1(**54**) 1999, 4(**59**) 2004). В настоящей статье мы сосредоточиваемся на геометрических идеях, лежащих в основе нашей конструкции конформных блоков, доказательства их инвариантности относительно (обобщенной) связности Книжника-Замолодчикова, и проективной плоскостности этой связности.

Содержание

1. Введение

Задача о плоских связностях на пространствах модулей и уравнениях Книжника-Замолодчикова возникла в известной работе В.Книжника и А.Замолодчикова [10] 1984 года, в связи с вычислением корреляционных функций модели Весса-Зумино-Виттена-Новикова конформной квантовой теории поля. В последующие годы выяснилась тесная связь этой задачи с рядом вопросов топологии, алгебраической геометрии, математической физики, теории интегрируемых систем. Данной проблеме посвящено огромное количество работ. Имеется ряд подробных обзоров [7, 38] и монографий. Несмотря на это задачу никак нельзя считать завершенной. Одной из основных проблем является почти полное отсутствие математически строгого сопоставления различных подходов (о

Date: 31.11.2003.
Работа выполнена в рамках программы "Математические методы нелинейной динамики"Президиума РАН. Автор, также, получил поддержку РФФИ в рамках проектов 02-01-00803, 02-01-22004.

сложности задачи говорит тот факт, что *эвристическое* сопоставление явилось предметом отдельной монографии [37]). Это приводит к тому, что вопросы, решенные в рамках одного из подходов (скажем, вопрос об унитарности связности), нельзя считать решенными в других. Поэтому мы считаем актуальным поиск новых идей, упрощающих изложение 2-мерной квантовой теории поля.

В недавней работе [28] и предшествовавшей ей [27], сделанных совместно с М.Шлихенмайером, мы описали новый подход к 2-мерной конформной теории поля, названный нами глобальным операторным подходом. Глобальность означает здесь, что мы используем алгебры Кричевера-Новикова калибровочных и конформных симметрий (то есть глобальных симметрий) вместо алгебр петель и Вирасоро, которые в этом контексте являются локальными. Мы предложили новый способ доказательства инвариантности конформных блоков относительно обобщенной связности Книжника-Замолодчикова, и проективной плоскостности этой связности, основанный на вычислении инфинитезимальных деформаций функций и векторных полей Кричевера-Новикова, и представления Сугавары последних. Это позволило обойтись без сложной когомологической техники при изложении этих вопросов. Цель настоящей работы — дать изложение геометрических идей статьи [28], не затемняя их вспомогательными сведениями об алгебрах Кричевера-Новикова и их представлениях, которые уже достаточно подробно изложены в ряде статей [19]-[35]. Мы, также, отсылаем к [28, 27] за более подробным введением в предмет.

В основополагающей работе [10] выведены следующие замечательные уравнения:

$$\left(k\frac{\partial}{\partial z_p} - \sum_{r\neq p}\frac{t_p^a t_r^a}{z_p - z_r}\right)\Psi = 0\ , \qquad p = 1,\dots,N\ . \tag{1.1}$$

Здесь $z_1,\dots,z_N$ — произвольные отмеченные точки (общего положения) на римановой сфере. Для $i=1,\dots,N$ заданы представления t_i некоторой редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (t_i^a – матрица представления a-го генератора алгебры $\mathfrak{g}$), а k — константа. В (1.1) предполагается суммирование по a.

В настоящее время уравнения (1.1) известны как уравнения Книжника-Замолодчикова. Их можно интерпретировать как условия горизонтальности сечений *связности Книжника-Замолодчикова.* С физической точки зрения соотношения (1.1) являются уравнениями N-точечных корреляционных функций в модели Весса-Зумино-Виттена-Новикова.

Дальнейшее развитие идей Книжника-Замолодчикова кратко описано в [27, 28]. Основные направления заданы работами Д.Бернара (первые обобщения на положительный род), А.Цучия, К.Уено и Й.Ямады (глобализация методов Книжника и Замолодчикова средствами калибровочной теории поля), Н.Хитчина (метод геометрического квантования), А.Бовиля (некоммутативная теория тэта-функций).

В настоящей работе мы формулируем обобщение уравнений Книжника-Замолодчикова на поверхности положительного рода с несколькими отмеченными точками. Этот вопрос является по-прежнему актуальным и поднимается в ряде статей ([3, 4] и др.). Наша работа непосредственно развивает метод работы Цучия-Уено-Ямады. Новым в нашем подходе является использование алгебр Кричевера-Новикова и вычисление инфинитезимальных деформаций их элементов и операторов их представлений на пространстве модулей.

В работах [11, 12, 13] И.М.Кричевер и С.П.Новиков определили основные объекты двумерной конформной теории поля (например, тензор энергии-импульса) как глобальные мероморфные объекты на римановой поверхности. Они указали новый выбор базисных калибровочных и конформных симметрий, которые имеют глобальную природу и образуют *алгебры Кричевера-Новикова*, явно зависящие от модулей римановых поверхностей. Алгебры Кричевера-Новикова представляют собой двумерный алгебро-геометрический аналог аффинных алгебр Каца-Муди и алгебры Вирасоро, и включают в себя последние как частный случай. Их определение основано на алгебро-геометрических данных того типа, который широко используется в теории солитонов: римановой поверхности с отмеченными точками и фиксированными струями локальных координат в них. На этих алгебрах и их *локальных* центральных расширениях можно ввести *почти градуированную структуру*, что позволяет развить для них теорию представлений, порожденных вакуумом, или, физически говоря, формализм вторичного квантования.

Возможность обобщения конструкции Цучия-Уено-Ямады на алгебры Кричевера-Новикова далеко не очевидна. В [27, 28] мы решаем эту задачу. То что мы делаем — это не абстрактное доказательство существование связности, а ее явная конструкция, с решением сопутствующих геометрических и деформационных проблем. В частности, наш подход позволяет явно описать касательное пространство Кураниши к пространству модулей в терминах базисных элементов Кричевера-Новикова и, таким образом, явно записать уравнения обобщенной системы Книжника-Замолодчикова.

За пределами наших работ остаются две важные проблемы: проблема унитарности построенной связности и проблема ее продолжения на компактификацию пространства модулей. Отметим и существование проблемы идентификации нашего подхода к конформной теории поля с уже известными, а также последних между собой. Более подробное обсуждение этих проблем см. в [28]

Настоящая работа организована следующим образом. В разделе 2 дается краткий обзор основных понятий, связанных с пространствами модулей римановых поверхностей и инфинитезимальными деформациями последних. Следующие три раздела содержат результаты по деформациям функций и векторных полей Кричевера-Новикова, алгебрам Кричевера-Новикова и инфинитезимальным деформациям операторов их представлений. В разделе 6 доказывается инвариантность конформных блоков, вводится (следуя [28]) обобщенная связность Книжника-Замолодчикова и доказывается ее проективная плоскостность. В 7 вводятся обобщенные уравнения Книжника-Замолодчикова. Все конструкции рассматриваются на открытом плотном подмножестве пространства модулей.

Результаты настоящей работы получены совместно с М.Шлихенмайером. Автор благодарен ему за многолетнее плодотворное сотрудничество. Автор, также, благодарен университетам Маннхейма и Люксембурга за гостеприимство, оказанное на разных стадиях выполнения данной работы.

2. Пространства модулей римановых поверхностей с отмеченными точками и касательные пространства к ним в точках гладкости

Следуя [28] (где рассмотрены более общие пространства модулей), обозначим через $\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$ пространство модулей гладких проективных кривых рода g (над $\mathbb{C}$) с $N+1$ различными упорядоченными отмеченными точками и фиксированными 1-струями локальных координат в них. Фиксация 1-струй нужна для определения базисов Кричевера-Новикова. Элементы пространства $\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$ задаются в виде

$$\tilde{b} = [\Sigma, P_1, \ldots, P_N, P_\infty, z_1^{(1)} \ldots, z_N^{(1)}, z_\infty^{(1)}] \ , \tag{2.1}$$

где Σ — гладкая проективная кривая рода g, P_i $(i = 1, \ldots, N, \infty)$ — различные точки на Σ, z_i — локальная координата в окрестности точки P_i (в частности $z_i(P_i) = 0$), и $z_i^{(1)}$ — 1-струя локальной координаты z_i. Здесь [..] обозначает класс эквивалентности таких наборов в следующем смысле. Два набора $\tilde{b}$ и $\tilde{b}'$ эквивалентны, если существует алгебраический изоморфизм $\phi : \Sigma \to \Sigma'$, где $\phi(P_i) = P_i'$ для $i = 1, \ldots, N, \infty$, такой что после отождествления с помощью ϕ мы имеем

$$z_i' = z_i + O(z_i^2), \quad i = 1, \ldots, N \quad \text{и} \quad z_\infty' = z_\infty + O(z_i^2). \tag{2.2}$$

Обозначим пространство модулей, которое получится, если "забыть"о струях, через $\mathcal{M}_{g,N+1}$, при этом мы получаем естественную проекцию

$$\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1} \to \mathcal{M}_{g,N+1}. \tag{2.3}$$

В этой статье (как и в предыдущих [27, 28]) мы имеем дело только с локальной ситуацией, в окрестности точки пространства модулей, отвечающей кривой и отмеченным точкам общего положения. Пусть $\widetilde{W} \subseteq \mathcal{M}_{g,N+1}$ — открытое множество, содержащее такую точку общего положения $\tilde{b} = [\Sigma, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty]$. Общая кривая рода $g \ge 2$ не имеет нетривиальных инфинитезимальных автоморфизмов, поэтому мы можем предполагать, что существует универсальное семейство кривых с отмеченными точками над $\widetilde{W}$. Из этого, в частности, следует, что имеется собственное плоское семейство гладких кривых над $\widetilde{W}$

$$\pi : \mathcal{U} \to \widetilde{W}\ , \tag{2.4}$$

такое что для точек $\tilde{b} = [\Sigma, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty] \in \widetilde{W}$ имеем $\pi^{-1}(\tilde{b}) = \Sigma$ и что сечения, определенные соотношением

$$\sigma_i : \widetilde{W} \to \mathcal{U}, \quad \sigma_i(\tilde{b}) = P_i, \quad i = 1, \dots, N, \infty \tag{2.5}$$

голоморфны. За дальнейшими объяснениями мы отсылаем к [38, разделы 1.2, 1.3], в частности см. теорему 1.2.9 работы [38].

Если мы “забудем” точку P_∞, мы получим отображения

$$\mathcal{M}_{g,N+1} \to \mathcal{M}_{g,N}, \quad \mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1} \to \mathcal{M}^{(1)}_{g,N}. \tag{2.6}$$

Зафиксируем голоморфное сечение $\widehat{\sigma}_\infty$ универсального семейства кривых (без отмеченных точек). В частности, для каждой кривой можно выбрать точку, аналитически зависящую от модулей (напомним, что мы находимся в локальной ситуации общего положения). Аналитическое подмножество

$$W' := \{\tilde{b} = [\Sigma, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty] \mid P_\infty = \widehat{\sigma}_\infty([\Sigma])\} \quad \subseteq \quad \widetilde{W} \tag{2.7}$$

можно отождествить с открытым подмножеством W пространства $\mathcal{M}_{g,N}$, полагая

$$\tilde{b} = [(\Sigma, P_1, P_2, \dots, P_N, \widehat{\sigma}_\infty([\Sigma]))] \ \to \ b = [(\Sigma, P_1, P_2, \dots, P_N)]\ . \tag{2.8}$$

Ввиду общности положения отображение взаимно однозначно.

В точках общего положения пространство модулей $\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$ является гладким. Касательное пространство к нему в точке $\tilde{b}$ обозначим $\mathrm{T}_{\tilde{b}}\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[r] \arrow[dr, "Gr"'] & \mathrm{H}^1(\Sigma, T_\Sigma(-2S-2P_\infty) \\
& \mathrm{T}_{\tilde{b}}\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1} \arrow[u, "KS"']
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Здесь $\mathcal{L}$ — алгебра Ли векторных полей, мероморфных и голоморфных вне точек $P_1, \dots, P_N, P_\infty$, на римановой поверхности Σ, отвечающей точке $\tilde{b}$ пространства модулей. $\mathcal{L}$ называется *алгеброй векторных полей Кричевера-Новикова*. Далее, $S = \sum_{i=1}^{N} P_i$ — дивизор на Σ, KS — отображение (изоморфизм) Кодаиры-Спенсера, две остальные стрелки — сюръективные отображения с бесконечномерными ядрами. Отображение Gr описано в [5] и восходит к работам Шиффера и Спенсера, а по поводу горизонтальной стрелки см. [27, предложение 4.4 и теорема 4.5]). Выбирая в $\mathcal{L}$ некоторый базис, можно указать такое подпространство $\mathcal{L}_0^{(1)}$, что будучи ограничены на него, эти два отображения также дадут изоморфизмы, так что

$$\mathcal{L}_0^{(1)} \cong \mathrm{H}^1(M, T_M(-2S-2P_\infty) \cong \mathrm{T}_{\tilde b}\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)}. \tag{2.10}$$

Ниже, следуя [27, 28], $\mathcal{L}_0^{(1)}$ будет описано в терминах базиса Кричевера-Новикова.

Отметим формулу размерности

$$\dim \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)} = \begin{cases} 3g+2N-1, & g \ge 1 \\ \max(0, N-2)+N+1, & g=0\ . \end{cases} \tag{2.11}$$

При $N \ge 2$ первое выражение справедливо для любого рода.

3. Алгебры Кричевера-Новикова

Пусть $\tilde b \in \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)}$ — точка пространства модулей, $\mathcal{A} := \mathcal{A}(\tilde b)$ — ассоциативная алгебра мероморфных функций на Σ, регулярных везде за исключением, быть может, точек $P_1, \dots, P_N, P_\infty$. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная конечномерная редуктивная алгебра Ли и

$$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

$\mathcal{A}$ называется *алгеброй функций*, а $\overline{\mathfrak{g}}$ — *алгеброй токов Кричевера-Новикова* [11, 29, 30, 31]. Скобка Ли на $\overline{\mathfrak{g}}$ задается с помощью соотношений

$$[x \otimes A, y \otimes B] = [x, y] \otimes AB. \tag{3.2}$$

Мы обычно опускаем в обозначениях символ $\otimes$.

Пример. Для римановой сферы ($g = 0$) с квазиглобальной координатой z и двумя отмеченными точками $P_1 = 0$ и $P_\infty = \infty$ алгебра $\mathcal{A}$ — это алгебра полиномов Лорана, $\overline{\mathfrak{g}}$ — это алгебра петель, а введенная выше алгебра Ли $\mathcal{L}$ — это алгебра Витта.

В общем случае назовем $\mathcal{L}$ алгеброй векторных полей Кричевера-Новикова (см. [11, 12, 13]). Алгебра $\mathcal{L}$ действует на элементы алгебр $\mathcal{A}$, $\overline{\mathfrak{g}}$ с помощью дифференцирований (производных Ли).

Алгебры Ли $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, $\overline{\mathfrak{g}}$ обладают важным свойством *почти градуированности*. Это означает, что в каждой их них можно ввести базис (*базис Кричевера-Новикова*), для каждого элемента которого определено понятие степени (целое число), причем степень коммутатора отличается от суммы степеней коммутируемых элементов не более чем на (фиксированное) конечное число. Определение базисов Кричевера-Новикова и дальнейшие ссылки см. в [27, 27, 32].

Отметим, что для построения самих алгебр Ли $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, $\overline{\mathfrak{g}}$ фиксация струй локальных координат является излишней, она нужна лишь для определения базисов Кричевера-Новикова (или, эквивалентно, для задания почти градуированной структуры на них). С учетом зависимости этих алгебр от точки пространства модулей, получим соответствующие пучки алгебр Ли на $\widetilde{W}^{(1)}$.

При рассмотрении конформных блоков важную роль играют *регулярные подалгебры*. Для алгебры $\mathcal{A}$ это подалгебра $\mathcal{A}^r$ функций, обращающихся в ноль в точке P_∞, для алгебры $\mathcal{L}$ — подалгебра $\mathcal{L}^r$ векторных полей с тем же условием, а для алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$ — подалгебра $\overline{\mathfrak{g}}^r = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}^r$.

4. Деформация функций и векторных полей Кричевера-Новикова

В этом разделе мы вводим дифференцирование функций и векторных полей Кричевера-Новикова по модулярным параметрам. Вопрос о дифференцировании различных объектов на римановых поверхностях по модулярным параметрам рассматривался многими, начиная с Тейхмюллера, Кодаиры, Спенсера, Шиффера, Альфорса, Берса; к нему имеется несколько (неэквивалентных) подходов. Мы берем вложение объектов Кричевера-Новикова в соответствующие локальные объекты в окрестности точки P_∞, и дифференцируем последние. Результатом является локальный объект. Другой подход, принципиально отличный от нашего (и не приводящий к уравнениям типа Книжника-Замолодчикова), состоял бы в том чтобы выбрать в функциях Кричевера-Новикова базис (в смысле кольца или линейного пространства), и считать элементы этого базиса ковариантными константами на пространстве модулей.

Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ — локальные координаты (модули, модулярные параметры) в окрестности некоторой фиксированной точки в $\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$. Обозначим через $\Sigma(\tau)$ риманову поверхность с соответствующей конформной структурой.

Выберем точку общего положения $\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$ с модулярными параметрами τ_0. Пусть эта точка представлена набором геометрических данных $[\Sigma(\tau_0), P_1, \ldots, P_N, P_\infty, z_1^{(1)} \ldots, z_N^{(1)}, z_\infty^{(1)}]$, (см. (2.1)). В частности, $\Sigma(\tau_0)$ имеет фиксированную конформную структуру, представляющую алгебраическую кривую с модулярными параметрами τ_0. Для τ из достаточно малой окрестности точки τ_0 конформная структура на $\Sigma(\tau)$ может быть следующим образом получена с помощью деформации конформной структуры на $\Sigma(\tau_0)$.

На римановой поверхности $\Sigma(\tau_0)$ выберем локальную координату w в окрестности точки P_∞. Будем предполагать, что w пробегает диск радиуса 2 с центром в точке $w = 0$. Пусть $U_\infty \subset \mathbb{C}$ — единичный диск с естественной координатой z. Отождествляя z и w мы можем представлять себе U_∞ как подмножество координатной карты в точке P_∞. Пусть $v \in \mathcal{L}$ — векторное поле Кричевера-Новикова. Его ограничение на U_∞ дает мероморфное векторное поле на этом диске. В свою очередь, это векторное поле определяет семейство локальных диффеоморфизмов d_t^v — соответствующий локальный поток. Для достаточно малых t эти диффеоморфизмы отображают кольцо $U_v \subset U_\infty$, ограниченное снаружи единичной окружностью, в деформированное кольцо, лежащее внутри диска радиуса 2. Из диска радиуса 2 (соответственно, координатной карты в точке P_∞) вырежем подмножество $d_t^v(U_\infty \backslash U_v)$ (которое совпадает с "внутренним дополнением"к $d_t^v(U_v)$), и склеим U_∞ с оставшейся частью диска радиуса 2, отождествив U_v и $d_t^v(U_v)$ с помощью отображения $w = d_t^v(z)$. Таким образом, для каждого t мы получим новую конформную структуру. Эквивалентна эта конформная структура исходной или нет зависит от векторного поля (и соответствующих диффеоморфизмов). В любом случае с помощью этого процесса мы получаем все близкие к данной конформные структуры (подробности см. в [6]). Более того, таким образом может быть реализована деформация в направлении любого касательного вектора к подпространству $\widetilde{W}^{(1)}$ пространства модулей.

Сопоставим набору τ диффеоморфизм d_τ описанного выше типа, определенный на кольце $U_\tau \subset U_\infty$, так чтобы функция склейки $w = d_\tau(z)$ задавала соответствующую конформную структуру, помня при этом, что τ не определяет однозначно ни d_τ, ни U_τ.

Пусть в этом разделе $\mathcal{A}$ обозначает пучок алгебр функций Кричевера-Новикова на $\widetilde{W}^{(1)}$. Обозначим слой этого пучка над точкой $\tau \in \widetilde{W}^{(1)}$ через $\mathcal{A}_\tau$. Если A — сечение пучка, мы записываем его как $A(\tau) = A_\tau$, где $A_\tau \in \mathcal{A}_\tau$. Аналогично, пусть $\mathcal{A}^r$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^r$, $\overline{\mathfrak{g}}^r$ обозначают пучки соответствующих алгебр.

Пусть $\mathcal{A}_\tau^{ann}$ — алгебра регулярных функций на кольце U_τ. Вложим $\mathcal{A}_\tau$ в $\mathcal{A}_\tau^{ann}$ ограничивая каждую из функций A_τ на образ кольца U_τ в $\Sigma(\tau)$ и рассматривая ограничение как функцию переменной w. Обозначим результат через $A_\tau(w)$. С другой стороны, ограничим A_τ на координатную окрестность в точке $P_\infty \in \Sigma(\tau)$ и обозначим результат через $\tilde{A}_\tau(z)$. Таким образом, мы сопоставляем каждой паре $(A_\tau, \Sigma(\tau))$, не единственным образом, пару $(\tilde{A}_\tau, d_\tau)$, где $\tilde{A}_\tau(z) = A_\tau(d_\tau(z))$ на U_τ. Для $0 < s < 1$ пусть $\tilde{\mathcal{A}}_s$ — алгебра регулярных функций в кольце $U_s \subset U_\infty$, ограниченном окружностями радиусов 1 и s соответственно. Мы полагаем $\tilde{A} = \operatorname{inj}\lim_{s\to 1} \tilde{\mathcal{A}}_s$ по отношению к естественному вложению. Очевидно, $\tilde{A}_\tau \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ в окрестности точки τ_0 (более того, $\tilde{A}_\tau$ дает элемент пучка ростков мероморфных функций от z в точке $z = 0$). Таким образом, соответствие

$A_\tau \to \tilde{A}_\tau$ задает вложение $\mathcal{A}$ в $\tilde{\mathcal{A}}$. Обозначим подпучок сечений пучка $\tilde{\mathcal{A}}$, соответствующих росткам аналитических функций, обращающихся в ноль на P_∞, через $\tilde{\mathcal{A}}^r$. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}^r$ обозначает то же самое, но для алгебры $\mathcal{L}$.

Для данного векторного поля X на $\widetilde{W}^{(1)}$ под $\partial_X A_\tau$ мы понимаем полную производную по τ от $\tilde{A}_\tau(d_\tau^{-1}(w))$ вдоль векторного поля X. Мы интерпретируем это как дифференцирование (по τ) функции Кричевера-Новикова переменной z с учетом непосредственной зависимости от параметра τ и зависимости от τ локальной координаты z. После подстановки $w = d_\tau(z)$ мы рассматриваем $\partial_X A_\tau$ как элемент пучка $\tilde{\mathcal{A}}$.

Рассмотрим семейство локальных диффеоморфизмов d_τ, где τ пробегает диск в пространстве модулярных параметров. Напомним, что для каждого τ соответствующее d_τ — не что иное как функция склейки $w = d_\tau(z)$ на римановой поверхности $\Sigma(\tau)$. С этой точки зрения семейство d_τ – это не что иное как семейство (локальных) функций, зависящих от параметров. Чтобы подчеркнуть эту интерпретацию, определим функцию $d(z,\tau) = d_\tau(z)$. Определим $\partial_X d_\tau$ следующим образом:

$$(\partial_X d_\tau)(z) = \sum_i X_i(\tau)\frac{\partial d(z,\tau)}{\partial \tau_i}. \tag{4.1}$$

Каждому векторному полю X на $\widetilde{W}^{(1)}$ мы можем сопоставить локальное векторное поле $\rho(X) := d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau$ на $\Sigma(\tau)$, представляющее *класс когомологий Кодаиры-Спенсера* соответствующего 1-параметрического семейства деформаций. Добавлением подходящих кограничных членов (что сводится к композиции диффеоморфизмов d_τ с диффеоморфизмами диска) можно добиться того, что

$$\rho(X) = d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau \in \mathcal{L}. \tag{4.2}$$

Для данного векторного поля X можно рассмотреть его прообраз e_X при отображении Gr (2.10), являющийся векторным полем Кричевера-Новикова. Заметим, что мы рассматриваем X как векторное поле на $\widetilde{W}^{(1)}$. Следовательно e_X определено только с точностью до прибавления тех элементов алгебры $\mathcal{L}$, которые имеют порядок не ниже двух в точке P_∞, а потому принадлежат подалгебре $\mathcal{L}^r$. Мы называем каждый такой прообраз e_X *подъемом* векторного поля X. Независимо от подъема e_X и выбора $\rho(X)$ (определяемого выбором d_τ и удовлетворяющего (4.2)) мы имеем $e_X - \rho(X) \in \mathcal{L}^r$, следовательно

$$e_X = \rho(X) + e^r, \tag{4.3}$$

где $e^r \in \mathcal{L}^r$ (e^r зависит и от e_X, и от $\rho(X)$).

Предложение 4.1. *Для любого сечения A пучка $\mathcal{A}$, и любого локального векторного поля X определим A^X соотношением*

$$\partial_X A = -(e_X).A + A^X. \tag{4.4}$$

Тогда $A^X \in \tilde{\mathcal{A}}$, и, более того, если $A \in \mathcal{A}^r$, то $A^X \in \tilde{\mathcal{A}}^r$.

Доказательство. Согласно данному выше определению $\partial_X A_\tau$— это полная производная вдоль X от $A_\tau = \tilde{A}_\tau \cdot d_\tau^{-1}$, где $\cdot$ обозначает композицию отображений. По формуле дифференцирования композиции отображений (сложной функции)

$$\partial_X A_\tau = \tilde{\partial}_X \tilde{A}_\tau + \partial_z \tilde{A}_\tau \cdot \partial_X d_\tau^{-1} = \tilde{\partial}_X \tilde{A}_\tau + \left(-\widetilde{\rho(X)}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_\tau\right) \cdot d_\tau^{-1}, \tag{4.5}$$

где $\tilde{\partial}_X \tilde{A}_\tau$ — производная вдоль X в предположении независимости локальной координаты z от τ, $\partial_z \tilde{A}_\tau$ — дифференциал $\tilde{A}_\tau$ (по переменной z), а $\widetilde{\rho(X)}\frac{\partial}{\partial z}$ — дифференциальный оператор перого порядка, соответствующий векторному полю $\rho(X) = d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau$. Более подробно, $\partial_X d_\tau^{-1} = -d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau \cdot d_\tau^{-1}$, следовательно $\partial_z \tilde{A}_\tau \cdot \partial_X d_\tau^{-1} = \partial_z \tilde{A}_\tau \cdot (-d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau) \cdot d_\tau^{-1}$. Ввиду (4.2) для каждого τ векторное поле $\rho(X) = d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau$ принадлежит

$\mathcal{L}_\tau$, где $\mathcal{L}_\tau$ — слой пучка $\mathcal{L}$ над точкой τ. Обозначим соответствующий дифференциальный оператор первого порядка (по переменной z) через $\widetilde{\rho(X)}\frac{\partial}{\partial z}$. Заметим, что $\partial_z \tilde{A}_\tau \cdot (d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau) = \widetilde{\rho(X)}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}$.

Пользуясь соотношением (4.3), заменяем $\widetilde{\rho(X)}\frac{\partial}{\partial z}$ в (4.5) дифференциальным оператором, соответствующим векторному полю $e_X - e^r$ и получаем (4.4), где $A_\tau^X = \tilde{\partial}_X \tilde{A}_\tau + e^r A_\tau \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Предположим, что $A_\tau \in \mathcal{A}^r$ для любого τ, то есть $A_\tau(P_\infty) = 0$ для $P_\infty \in \Sigma(\tau)$. Имеем $e^r \in \mathcal{L}^r$ по определению, следовательно и $e^r(P_\infty) = 0$. Так как $z(P_\infty) = 0$, то из $A_\tau(P_\infty) = 0$ вытекает, что $\tilde{A}_\tau(0) = 0$, причем для всех τ, и, далее, $\tilde{\partial}_X \tilde{A}_\tau(0) = 0$. Следовательно, $A_\tau^X(P_\infty) = 0$, и $A_\tau^X \in (\tilde{\mathcal{A}}^r)_\tau$ для всех τ, что завершает доказательство. □

Пусть $\mathcal{L}$ — пучок алгебр векторных полей Кричевера-Новикова, и e — его мероморфное сечение. По аналогии с функциями мы могли бы определить $\partial_X e$ используя локальные векторные поля на U_τ. Другой возможностью, которую мы выбираем здесь, является определение с помощью правила Лейбница, то есть для каждого $A \in \mathcal{A}$ по определению

$$(\partial_X e).A = \partial_X(e.A) - e.\partial_X A.$$

Предложение 4.2. *Для каждого сечения e пучка $\mathcal{L}$, и каждого локального векторного поля X определим e^X соотношением*

$$\partial_X e = -[e_X, e] + e^X. \tag{4.6}$$

Тогда $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}$, и, более того, $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}^r$, если $e \in \mathcal{L}^r$.

Доказательство. Ввиду предложения 4.1 имеем $\partial_X(e.A) = -e_X.(e.A) + (e.A)^X$, где $(eA)^X = \tilde{\partial}_X(\widetilde{e.A}) + e^r.(e.A)$. Последнее следует из доказательства предложения 4.1. Аналогично $e.(\partial_X A) = e.(-e_X.A + \tilde{\partial}_X \tilde{A} + e^r.A)$. Все вместе дает

$$(\partial_X e).A = -[e_X, e].A + \tilde{\partial}_X(\widetilde{e.A}) - e.\tilde{\partial}_X \tilde{A} + [e^r, e].A. \tag{4.7}$$

Так как объекты e и A глобальны, имеем $\widetilde{e.A} = \tilde{e}.\tilde{A}$. Снова применяя правило Лейбница, мы получаем $\tilde{\partial}_X(\widetilde{e.A}) - e.\tilde{\partial}_X \tilde{A} = (\tilde{\partial}_X \tilde{e})\tilde{A}$. Так как (4.7) — соотношение в пучке $\tilde{\mathcal{A}}$, мы не делаем различия между A и $\tilde{A}$. Следовательно, из (4.7) вытекает (4.6), где $e^X = \tilde{\partial}_X \tilde{e} + [e^r, e] \in \tilde{\mathcal{L}}$.

Если $e \in \mathcal{L}^r$, то $[e^r, e] \in \mathcal{L}^r$ так как $e^r \in \mathcal{L}^r$ и $\mathcal{L}^r$ — подалгебра. Далее, $\tilde{\partial}_X \tilde{e}(0) = 0$ по той же причине что $\tilde{\partial}_X \tilde{A}(0) = 0$ в доказательстве предложения 4.1. Следовательно $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}^r$, что завершает доказательство. □

5. Представления алгебр Кричевера-Новикова и их инфинитезимальные деформации

Пусть V — *неприводимый проективный почти градуированный модуль* над алгеброй Ли $\overline{\mathfrak{g}}$, порожденный вакуумом, то есть элементом, который аннулируется всеми элементами алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$, регулярными (как мероморфные функции) в точках $P_1, \ldots, P_N$, кроме констант, и константами, принадлежащими верхней нильпотентной подалгебре в $\mathfrak{g}$. Почти градуированность по определению означает, что в V также имеется базис, для элементов которого определена степень, причем степень результата действия отличается от суммы степеней операндов не более чем на фиксированное число. Подчеркнем, что V, вообще говоря, зависит от модулярных параметров, как и сама алгебра. Мы будем предполагать, что модули V образуют локально свободный пучок над открытым подмножеством пространства модулей $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)}$. Этот пучок мы обозначим $\mathcal{V}$.

Обозначим через $u(A)$ оператор представления элемента $uA \in \overline{\mathfrak{g}}$ в пространстве V. Мы сделаем следующее предположение относительно пучка $\mathcal{V}$:

$$\partial_X u(A) = u(\partial_X A), \tag{5.1}$$

где A — сечение пучка функций Кричевера-Новикова на $\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$.

Пример. В [28] показано, что всем упомянутым предположениям удовлетворяют фермионные модули над алгеброй $\overline{\mathfrak{g}}$.

По каждому почти градуированному представлению алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$, порожденному вакуумом, в том же пространстве, каноническим образом может быть построено проективное локально конечное представление T алгебры Ли $\mathcal{L}$, называемое представлением Сугавары [2, 26, 28, 27]. Эти два представления связаны следующим основным соотношением:

$$[T(e), u(A)] = u(e.A), \tag{5.2}$$

где $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{L}$ — произвольные элементы.

Предложение 5.1. *Для любого локального векторного поля X на $\widetilde{W}^{(1)}$, и любого сечения e пучка векторных полей Кричевера-Новикова мы имеем*

$$\partial_X T(e) = T(\partial_X e) + \lambda \cdot id,$$

где $\lambda = \lambda(X, e)$ — $\mathbb{C}$-значная локальная функция на $\widetilde{W}^{(1)}$.

Доказательство. Применим ∂_X к обеим частям соотношения (5.2). Ввиду соотношения (5.1) имеем

$$[\partial_X T(e), u(A)] + [T(e), \partial_X u(A)] = u((\partial_X e).A) + u(e.(\partial_X A)). \tag{5.3}$$

Вновь по формуле (5.2) и соотношению (5.1) вторые члены в обеих частях соотношения (5.3) равны. Следовательно,

$$[\partial_X T(e), u(A)] = u((\partial_X e).A).$$

Применяя (5.2) еще раз, заменим правую часть последнего соотношения выражением $[T(\partial_X e), u(A)]$. Следовательно,

$$[\partial_X T(e) - T(\partial_X e), u(A)] = 0 \tag{5.4}$$

для всех $X \in \mathrm{T}\widetilde{W}^{(1)}$, $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$, то есть оператор $\partial_X T(e) - T(\partial_X e)$ является эндоморфизмом представления $u(A)$. Ввиду неприводимости последнего этот оператор скалярен, что доказывает лемму. □

6. Конформные блоки и проективно плоская связность

Для определения конформных блоков введем регулярные подалгебры алгебр $\overline{\mathfrak{g}}$ и $\mathcal{L}$. Регулярные подалгебры $\mathcal{A}^r \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{L}^r \subset \mathcal{L}$ введены в разделе 3. Они состоят из всех элементов соответствующих алгебр, обращающихся в ноль в точке P_∞. По определению $\overline{\mathfrak{g}}^r = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}^r$ называется регулярной подалгеброй в $\overline{\mathfrak{g}}$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{g}}^r_{\widetilde{W}^{(1)}}$, $\mathcal{L}^r_{\widetilde{W}^{(1)}}$, и так далее, соответствующие пучки.

Определение 6.1. Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\widetilde{W}^{(1)}}$, как и выше, пучок (послойных) представлений пучка алгебр $\widehat{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}^{(1)}}$. Пучок *конформных блоков* (ассоциированный с пучком представлений $\mathcal{V}_{\widetilde{W}^{(1)}}$) определяется как пучок коинвариантов

$$C_{\widetilde{W}^{(1)}} = \mathcal{V}/\overline{\mathfrak{g}}^r_{\widetilde{W}^{(1)}}\mathcal{V}. \tag{6.1}$$

Напомним: выбор $\widetilde{W}^{(1)}$ в качестве базы означает, что мы фиксируем набор 1-струй локальных координат. Как показано в [27, лемма 4.3], этим однозначно определены элементы базисов Кричевера-Новикова. В частности, мы можем в каждом из вышеприведенных векторных пространств выбрать базис, состоящий из этих элементов. Из явного вида последних, данного в [19], очевидно, что они аналитически зависят от модулей. Таким образом, мы видим, что над $\widetilde{W}^{(1)}$ пучки

$$\mathcal{A}_{\widetilde{W}^{(1)}},\ \mathcal{L}_{\widetilde{W}^{(1)}},\ \widehat{\mathcal{L}}_{\widetilde{W}^{(1)}},\ \overline{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}^{(1)}},\ \widehat{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}^{(1)}},\ \mathcal{F}^{\lambda}_{\widetilde{W}^{(1)}}. \tag{6.2}$$

являются свободными пучками (сечений) тривиальных бесконечномерных векторных расслоений с фиксированными тривиализациями, заданными базисами Кричевера-Новикова.

Если $\mathcal{V}$ — пучок фермионных модулей, удовлетворяющих определенному условию (каждый их них получен из голоморфного расслоения на римановой поверхности, слой которого является стандартным $\mathfrak{gl}(n)$-модулем), то, как показано в [28], $C_{\widetilde{W}^{(1)}}$ — также свободный пучок конечного ранга. В общем случае мы будем *предполагать* выполнение этих свойств (что накладывает ограничения на пучок $\mathcal{V}$).

Рассмотрим пучок операторов на локальных сечениях пучка $\mathcal{V}$. Пусть B — его локальное сечение. Положим по определению $\partial_X B = [\partial_X, B]$, где в правой части ∂_X — дифференцирование сечений пучка $\mathcal{V}$. Ниже встречаются следующие случаи: $B = u(A)$, где $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$, и $B = T(e)$ — оператор Сугавары, введенный в разделе 5.

Для каждого прообраза e_X векторного поля X при отображении Gr (2.9) мы вводим следующий дифференциальный оператор первого порядка на сечениях свободного пучка $\mathcal{V}$:

$$\nabla_X = \partial_X + T(e_X), \tag{6.3}$$

где $\partial_X = \sum_i X_i(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau_i}$.

Предложение 6.2. *Оператор ∇_X корректно определен на конформных блоках и не зависит от выбора прообраза векторного поля X.*

Перед тем как доказать это предложение необходимо расширить операторы $u(A)$ и $T(e)$ на случай когда объекты A и e локальны. Это можно сделать, пользуясь свойством почти градуированности модуля V. Локальные векторные поля (функции, токи, и так далее) образуют пополнения соответствующих алгебр так как они имеют бесконечные разложения по соответствующим базисам Кричевера-Новикова [11]. Ввиду (2.10) и предложения 4.2 мы можем ограничиться разложениями, имеющими полюс конечного порядка в точке P_∞, то есть конечное число компонент положительной степени. Определим $\widetilde{V}$ как пространство бесконечных в направлении отрицательных степеней формальных линейных комбинаций базисных элементов модуля V. Благодаря почти градуированности, действие вышеупомянутых операторов может быть продолжено на $\widetilde{V}$ причем это продолжение существует также для локальных объектов A и e. Действительно, только конечное число членов разложения (как оператора, так и соответствующего элемента $\widetilde{V}$) дает вклад в компоненту заданной степени результата.

Доказательство предложения 6.2. Используя соотношения (5.1) и (5.2), находим

$$\begin{aligned}[\nabla_X, u(A)] &= [\partial_X + T(e_X), u(A)] = [\partial_X, u(A)] + [T(e_X), u(A)]\\ &= u(\partial_X A) + u(e_X.A).\end{aligned}$$

Предположим, что $A \in \mathcal{A}^r$. Тогда, согласно предложению 4.1, мы имеем

$$u(\partial_X A) = -u(e_X.A) + u(A^X),$$

где $A^X \in \tilde{\mathcal{A}}^r$. Следовательно, $[\nabla_X, u(A)] = u(A^X)$, откуда $[\nabla_X, u(\mathcal{A}^r)] \subseteq u(\tilde{\mathcal{A}}^r)$ и, далее,

$$[\nabla_X, u(\tilde{\mathcal{A}}^r)] \subseteq u(\tilde{\mathcal{A}}^r).$$

Следовательно $\widetilde{\mathfrak{g}}^r\widetilde{V}$ является ∇_X-инвариантным подпространством и ∇_X корректно определено на $\widetilde{V}/\widetilde{\mathfrak{g}}^r\widetilde{V}$. □

Цель оставшейся части статьи — доказать проективную плоскостность связности (6.3) и ввести соответствующий аналог уравнений Книжника-Замолодчикова.

Лемма 6.3. *Для любых прообразов e_X, e_Y локальных векторных полей X, Y в $\mathcal{L}$ существует такой прообраз $e_{[X,Y]}$ их коммутатора $[X,Y]$, что*

$$e_{[X,Y]} = [e_X, e_Y] + \partial_X e_Y - \partial_Y e_X.$$

Доказательство. Согласно [36, лемма 1.3.8]

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] + \partial_X \rho(Y) - \partial_Y \rho(X). \tag{6.4}$$

Заметим, что для любых подъёмов e_X, e_Y мы имеем $e_X = \rho(X) + e_1^r$, $e_Y = \rho(Y) + e_2^r$, где $e_1^r, e_2^r \in \mathcal{L}^r$ (см. (4.3)). В терминах e_X, e_Y (6.4) выглядит так:

$$\rho([X,Y]) = [e_X, e_Y] + \partial_X e_Y - \partial_Y e_X + e_3^r \tag{6.5}$$

где $e_3^r = [e_1^r, e_2^r] - (\partial_X e_2^r + [e_X, e_2^r]) + (\partial_Y e_1^r + [e_Y, e_1^r])$.

Так как $\mathcal{L}^r$ является подалгеброй Ли, имеем $[e_1^r, e_2^r] \in \mathcal{L}^r$. Согласно предложению 4.2, элементы $\partial_X e_2^r + [e_X, e_2^r]$ и $\partial_Y e_1^r + [e_Y, e_1^r]$ также регулярны, следовательно $e_3^r \in \mathcal{L}^r$. Таким образом, $e_{[X,Y]} = \rho([X,Y]) - e_3^r$ является подъемом коммутатора $[X,Y]$, и лемма доказана. □

Теорема 6.4. *∇_X является проективно плоской связностью на расслоении конформных блоков.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} [\nabla_X, \nabla_Y] &= [\partial_X + T(e_X), \partial_Y + T(e_Y)] \\ &= [\partial_X, \partial_Y] + [\partial_X, T(e_Y)] - [\partial_Y, T(e_X)] + [T(e_X), T(e_Y)]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Так как T — проективное представление алгебры $\mathcal{L}$, и по определению $[\partial_X, T(e_Y)] = \partial_X T(e_Y)$, $[\partial_Y, T(e_X)] = \partial_Y T(e_X)$, мы можем переписать (6.6) в следующей форме:

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \partial_{[X,Y]} + T(\partial_X e_Y - \partial_Y e_X + [e_X, e_Y]) + \lambda \cdot id. \tag{6.7}$$

Здесь мы пользовались также предложением 5.1. По лемме 6.3 из этого следует

$$\begin{aligned} [\nabla_X, \nabla_Y] &= \partial_{[X,Y]} + T(e_{[X,Y]}) + \lambda \cdot id \\ &= \nabla_{[X,Y]} + \lambda \cdot id. \end{aligned} \tag{6.8}$$

□

Замечание. $\partial_X e$ является локальным векторным полем на деформированном кольце (точнее, сечением пучка $\tilde{\mathcal{L}}$). Следовательно, для доказательства предложения 5.1 нам нужно соотношение (5.2) для локальных векторных полей. Согласно замечанию, сделанному после формулировки предложения 6.2, представления $T(e)$ и $u(A)$ корректно определены также на локальных векторных полях и функциях соответственно, с сохранением соотношения (5.2). Действительно, для $A \in \mathcal{A}$, однородного элемента $v \in V$ и произвольного n существует частичная сумма $\tilde{e}$ разложения векторного поля $\partial_X e$, такая что $(u((\partial_X e).A)v)_n = (u(\tilde{e}.A)v)_n$ and $([T(\partial_X e), u(A)]v)_n = ([T(\tilde{e}), u(A)]v)_n$ где $(\cdot)_n$ обозначает проекцию на компоненту степени n в $\widetilde{V}$. Ввиду (5.2) правые части двух последних соотношений равны, следовательно их левые части также равны. Отсюда следует соотношение (5.2) с $\partial_X e$ вместо e.

7. Уравнения Книжника-Замолодчикова

Следующие уравнения горизонтальных сечений связности ∇_X мы рассматриваем как обобщение уравнений Книжника-Замолодчикова:

$$\nabla_X \Psi = 0, \quad X \in H^0(\mathcal{U}, \mathrm{T}\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}) \tag{7.1}$$

где Ψ — сечение пучка конформных блоков. Эти уравнения предложены в [27], где, в частности, оператор ∇_X был явно вычислен для $g = 0$, $g = 1$ и конкретного выбора представлений аффинной алгебры. Для $g = 0$ уравнения, полученные в [27], совпадают с уравнениями (1.1).

В терминах базиса Кричевера-Новикова алгебры $\mathcal{L}$ можно точно указать $3g+2N-1$ (число, равное размерности пространства модулей $\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$) уравнений, эквивалентных системе (7.1). Рассмотрим $2N$ базисных элементов степени 0 и 1, $3g-3$ базисных элементов, имеющих полюса как в точках $P_1,\dots,P_N$, так и в P_∞, и два базисных элемента, имеющих в P_∞ порядки 0 и 1. Линейная оболочка этих элементов дает подпространство $\mathcal{L}^{(1)}_0$, изоморфное касательному пространству к $\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}$ (2.10). Следовательно, образы этих элементов при отображении Gr (2.10) составляют полный набор тех X в (7.1), которые задают полную систему уравнений Книжника-Замолодчикова для рода g.

Список литературы

[1] Bernard, D.,*On the Wess-Zumino-Witten models on Riemann surfaces.* Nucl. Phys. B **309** (1988), 145–174.

[2] Bonora L., Rinaldi, M., Russo, J., Wu, K., *The Sugawara construction on genus g Riemann surfaces.* Phys. Lett. B**208** (1988), 440–446.

[3] Enriquez, B., Felder, G., *Solutions of the KZB equations in genus* ≥ 1. math.QA/9912198.

[4] Felder, G., Wieczerkowski, Ch., *Conformal blocks on elliptic curves and the Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equation.* Commun. Math. Phys. **176** (1996), 133–161.

[5] Grinevich, P.G., Orlov, A.Yu. *Flag spaces in KP theory, Virasoro action on det D and Segal-Wilson τ-function.* Preprint CLNS 945/89, Cornell University, 1989

[6] Harris, J., Morrison, I., *Moduli of Curves.* Springer 1998, New York, Berlin, Heidelberg.

[7] Hitchin, N., *Flat connections and geometric quantization.* Commun. Math. Phys. **131** (1990), 347–380.

[8] Кац В. *Бесконечномерные алгебры Ли, Москва, МИР*, 1993.

[9] Kac, V.G., Raina, A.K., *Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras.* Adv. Ser. in Math. Physics Vol.2, World Scientific , 1987.

[10] Knizhnik, V.G., Zamolodchikov, A.B., *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions.* Nucl. Phys. B **247** (1984), 83–103.

[11] Кричевер И.М., Новиков С.П. *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов*, Функциональный анализ и его приложения, 2(**21**) 1987, 46–63

[12] Кричевер И.М., Новиков С.П. *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского*, Функциональный анализ и его приложения, 4(**21**) 1987, 47–61

[13] Кричевер И.М., Новиков С.П. *Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях*, Функциональный анализ и его приложения, 1(**23**) 1989, 24–40

[14] Кричевер И.М., Новиков С.П. *Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции*, Успехи математических наук, 3(**55**) 2000, 181–182

[15] Ruffing, A., Deck, Th., Schlichenmaier, M., *String branchings on complex tori and algebraic representations of generalized Krichever-Novikov algebras.* Lett. Math. Phys. **26** (1992), 23–32.

[16] Sadov, V.A., *Bases on multipunctured Riemann surfaces and interacting strings amplitudes.* Commun. Math. Phys. **136** (1991), 585–597.

[17] Schlichenmaier, M., *An introduction to Riemann surfaces, algebraic curves and moduli spaces.* Lecture Notes in Physics **322**, Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

[18] Schlichenmaier, M., *Krichever-Novikov algebras for more than two points.* Letters in Mathematical Physics **19**(1990), 151-165.

[19] Schlichenmaier, M., *Krichever-Novikov algebras for more than two points: explicit generators.* Letters in Mathematical Physics **19**(1990), 327-336.

[20] Schlichenmaier, M., *Central extensions and semi-infinite wedge representations of Krichever-Novikov algebras for more than two points.* Letters in Mathematical Physics **20**(1990), 33-46.

[21] Schlichenmaier, M., *Verallgemeinerte Krichever - Novikov Algebren und deren Darstellungen.* Ph.D. thesis, Universität Mannheim, 1990.

[22] Schlichenmaier, M., *Degenerations of generalized Krichever-Novikov algebras on tori.* Journal of Mathematical Physics **34**(1993), 3809-3824.

[23] Schlichenmaier, M., *Differential operator algebras on compact Riemann surfaces.* Generalized Symmetries in Physics (Clausthal 1993, Germany) (H.-D. Doebner, V.K. Dobrev, and A.G. Ushveridze, eds.), World Scientific, 1994, pp. 425–434.

[24] Schlichenmaier, M., *Local cocycles and central extensions for multi-point algebras of Krichever-Novikov type.* J. Reine und Angewandte Mathematik **559**(2003), 53–94.

[25] Schlichenmaier, M., *Higher genus affine algebras of Krichever-Novikov type.* Moscow Math. J. (to appear), math/0210360.

[26] Schlichenmaier, M., Sheinman, O.K., *Sugawara construction and Casimir operators for Krichever-Novikov algebras.* Jour. of Math. Science **92** (1998), 3807–3834, q-alg/9512016.

[27] Schlichenmaier, M., Sheinman, O.K., *Wess-Zumino-Witten-Novikov theory, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Krichever-Novikov algebras, I.*. Russian Math. Surv. (Uspekhi Math. Nauk.) **54** (1999), 213–250, math.QA/9812083.

[28] Schlichenmaier, M., Sheinman, O.K., *Knizhnik-Zamolodchikov equations for positive genera and Krichever-Novikov algebras.* Russian Math. Surv. (Uspekhi Math. Nauk.) **59** (2004), math.AG/0312040.

[29] Шейнман О.К. *Эллиптические аффинные алгебры Ли*, Функциональный анализ и его приложения, 3**(24)** 1990, 51-61.

[30] Шейнман О.К. *Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях.* Функциональный анализ и его приложения**27**, No.4 (1993), 54–62.

[31] Sheinman, O.K., *Representations of Krichever-Novikov algebras.* Topics in topology and mathematical physics, (ed.) Novikov, S.P., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., U.S.A., 1995.

[32] Шейнман О.К. *Фермионная модель представлений аффинных алгебр Кричевера-Новикова*, Функциональный анализ и его приложения, 3**(35)** (2001), 60-72.

[33] Sheinman, O.K., *Second order casimirs for the affine Krichever-Novikov algebras* $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ *and* $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$. Moscow Math.J. , 4**(1)** 2001, 605-628, mathRT/0109001.

[34] Шейнман О.К., *Казимиры второго порядка для аффинных алгебр Кричевера-Новикова* $\widehat{\mathfrak{gl}_{g,2}}$ *и* $\widehat{\mathfrak{sl}_{g,2}}$. Успехи математических наук., **56**, No.5 (2001), 189-190.

[35] Sheinman, O.K., *Krichever-Novikov algebras, their representations and applications.* Novikovs seminar. AMS and MathRT/0304020.

[36] Tsuchiya, A., Ueno, K., Yamada, Y., *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries.* Adv. Stud. Pure Math. **19** (1989), 459–566.

[37] Тюрин, А.Н. *Монография.*

[38] Ueno, K., *Introduction to conformal field theory with gauge symmetries.* Geometry and Physics, Proceed. Aarhus conference 1995 (Andersen J.E. et. al., ed.), Marcel Dekker, 1997, pp. 603–745.

(О.К.Шейнман) Математический институт РАН им.В.А.Стеклова, 117966, Москва, ул. Губкина, 8, ГСП-1, и Независимый Московский университет, Москва, Большой Власьевский пер. 11

E-mail address: oleg@sheinman.mccme.ru