Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 10

Издание выходит с 2003 года

О. К. Шейнман

Алгебры Кричевера–Новикова, их представления и приложения в геометрии и математической физике

МИАН

Москва
2007

УДК 512.554.232+515.17+514.83
ББК (В)22.14
С56

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2007. Вып. 10: Алгебры Кричевера–Новикова, их представления и приложения в геометрии и математической физике / Шейнман О.К. – 142 с.

ISBN 5-98419-023-X

Серия “Современные проблемы математики” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

ISBN 5-98419-023-X

Содержание

Введение

1. Алгебры Кричевера–Новикова и их место в теории алгебр Ли, геометрии и топологии пространств модулей, теории интегрируемых систем и конформной квантовой теории поля. В 60-х – 80-х годах 20 столетия теория бесконечномерных алгебр Ли пережила период бурного роста, связанный с появлением аффинных алгебр Каца–Муди и алгебры Вирасоро, сочетавших явную преемственность по отношению к классической теории полупростых алгебр Ли с успешностью в приложениях.

В этот же период произошло становление двух важных дисциплин математической физики – теории интегрируемых систем и конформной теории поля, характеризовавшееся глубоким проникновением методов теории римановых поверхностей в теоретическую физику.

Открытие роли алгебр Каца–Муди и Вирасоро как алгебр формальных калибровочных и конформных инфинитезимальных симметрий этих теорий и важного инструмента интегрирования нелинейных уравнений связало воедино оба предмета. Переход от формальных к более геометрическим типам симметрий требовал рассмотрения алгебр токов и векторных полей на римановых поверхностях. К концу 80-х возникло несколько таких работ, главным образом связанных с эллиптическими кривыми, но не только.

В 1987 году, в связи с исследованиями в теории солитонов и конформной теории поля, И. М. Кричевер и С. П. Новиков ввели центральные расширения алгебр токов и алгебр векторных полей на римановых поверхностях (с комплексной структурой и отмеченными точками), которые впоследствии получили название *алгебр Кричевера–Новикова* [26], [27], [28]. Эти алгебры естественно обобщают аффинные (не скрученные) алгебры Каца–Муди и алгебру Вирасоро соответственно. Среди других алгебр токов и векторных полей на римановых поверхностях алгебры Кричевера–Новикова выделяются важным свойством – *почти градуированной структурой*, которое слабее градуировки, но сильнее фильтрации, и ведет к многим важным последствиям, в частности, позволяет рассматривать аналоги представлений старшего веса. Применительно к центральным расширениям почти градуированность эквивалентна свойству *локальности* соответствующих коциклов, которое в важнейших случаях определяет последние однозначно. Аффинные (не скрученные) алгебры Каца–Муди и алгебра Вирасоро также являются алгебрами Кричевера–Новикова, и с этой точки зрения соответствуют римановой сфере с двумя отмеченными точками.

Алгебры Кричевера–Новикова имеют многочисленные связи с фундаментальными проблемами геометрии, анализа и математической физики.

Будучи введены как алгебры рядов Фурье–Лорана на римановой поверхности, они являются частью гармонического анализа.

Теория представлений алгебр Кричевера–Новикова тесно связана с теорией голоморфных расслоений на римановых поверхностях. В частности, голоморфные расслоения играют основную роль в параметризации представлений основного известного в настоящее время (введенного автором в [56]) класса *фермионных представлений*.

Конструкция фермионных представлений демонстрирует и другую важную связь – с интегрируемыми системами: в конструкции существенно используются объекты теории коммутативных колец разностных операторов, построенной в [31], [32], [33].

Имеется фундаментальная связь, основанная на теории Кодаиры–Спенсера, между алгебрами векторных полей Кричевера–Новикова и пространствами модулей римановых поверхностей с отмеченными точками. Эту связь можно сформулировать следующим образом [50]: касательное пространство к пространству модулей римановых поверхностей с произвольным числом отмеченных точек и произвольными порядками фиксированных струй локальных координат в них изоморфно прямой сумме некоторых однородных подпространств алгебры векторных полей Кричевера–Новикова. Этот факт находится в одном ряду с классическим описанием касательного пространства к пространству модулей замкнутых римановых поверхностей в терминах тензоров на римановой поверхности (дифференциалов Бельтрами, квадратичных дифференциалов), восходящим к Тейхмюллеру, Альфорсу, Берсу. Ситуация с одной отмеченной точкой впервые рассмотрена Концевичем [22] с привлечением алгебры Вирасоро. Двухточечная ситуация рассматривалась в [26], [14] уже средствами алгебр Кричевера–Новикова. Продвижение, связанное с этими алгебрами, основано на том, что оказывается возможным указать базис касательного пространства к пространству модулей в терминах базисов Кричевера–Новикова.

Связь между алгебрами Кричевера–Новикова и пространствами модулей римановых поверхностей лежит в основе приложений этих алгебр в двумерной конформной квантовой теории поля (2D CFT) [49], [50]. Понимание двумерной конформной теории поля как проективно плоской связности на пространстве модулей римановых поверхностей, заданной тензором энергии-импульса, восходит к работе А. Полякова [35] и отчетливо сформулировано в работе Фридана и Шенкера [10].

Среди двумерных конформных теорий поля *теории Весса–Зумино–Новикова–Виттена* (WZNW) выделяются наличием дополнительных первичных полей – токов, образующих представление аффинной алгебры Ли, и условием, что тензор энергии-импульса связан с ними конструкцией Сугавары. В теориях этого класса существенную роль играют a-периоды тока, которые физики называют нулевыми модами. Как подчеркивает в [2] один из основателей теории Д. Бернар, “нулевые моды несут в себе почти всю нетривиальную информацию, касающуюся модели WZW”. Точнее, это означает, что через нулевые моды операторов тока выражаются основные корреляционные функции, например, среднее тензора энергии-импульса. В связи со сказанным возникает важная проблема явного определения действия нулевых мод. Трудность здесь в том, что в теориях, основанных на использовании алгебр Каца–Муди, нулевые моды не являются элементами алгебры калибровочных симметрий. Для решения этой проблемы Д. Бернар [2], [3] ввел дополнительные параметры – наборы групповых элементов (“твисты” в физической терминологии), и определил операторы нулевых мод как инфинитезимальные сдвиги по ним, что является дополнительным соглашением, не предусмотренным основами теории. Впоследствии было понято, что это соглашение эквивалентно дополнительным требованиям инвариантности теории – инвариантности относительно выбора голоморфного векторного расслоения на римановой поверхности. Первый математически строгий подход к построению двумерных конформных теорий поля [66] вообще игнорировал проблему нулевых мод.

Использование аффинных алгебр Кричевера–Новикова в качестве алгебры токов решает проблему нулевых мод, поскольку последние являются коэффициентами разложения тока по базису Кричевера–Новикова, то есть фурье-модами в точном смысле слова. Если ток принимает значения в операторах представления аффинной алгебры Кричевера–Новикова, то эти моды естественно действуют в пространстве представления без всяких дополнительных соглашений.

2. Основные задачи теории и приложений алгебр Кричевера–Новикова. Основными задачами теории алгебр Ли является описание структуры алгебры, ее инвариантов и представлений.

Из определения аффинных алгебр Кричевера–Новикова непосредственно вытекают свойства *почти градуированности* и, как следствие, наличие *треугольного разложения* (аналог *разложения Ивасавы* полупростых алгебр Ли). Это делает структуру аффинных алгебр Кричевера–Новикова похожей на структуру аффинных алгебр Каца–Муди. В отличие от них, в алгебрах Кричевера–Новикова кроме верхней и нижней треугольных подалгебр и картановской подалгебры имеется не являющееся подалгеброй дополнительное подпространство. Перечисленные факты – это все, что было известно о структуре алгебр Кричевера–Новикова к началу настоящего исследования. Они найдены для случая двух отмеченных точек Кричевером и Новиковым в [26], а для многих отмеченных точек Шлихенмайером в [43] и последующих работах. Об аналогах более глубоких фактов структурной теории алгебр Каца–Муди, таких как наличие системы корней, корневого разложения и группы Вейля ничего не известно и в настоящее время.

Основным методом в теории представлений алгебр Каца–Муди является теория старшего веса. Ее главный вывод – неприводимые представления алгебры Каца–Муди находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами неотрицательного конуса двойственного пространства к картановской подалгебре – *старшими весами*. Однако, картановская подалгебра у аффинной алгебры Кричевера–Новикова – точно такая же как у алгебры Каца–Муди (с той же конечномерной алгеброй Ли). Поэтому и пространство представлений старшего веса, построенное по классической схеме, точно такое же. Однако, ясно, что в отличие от алгебр Каца–Муди, представления аффинных алгебр Кричевера–Новикова должны зависеть от комплексной структуры на римановой поверхности. Нет никаких оснований считать, что зависимость от этих дополнительных параметров должна принять форму старшего веса.

В связи с этим была поставлена *задача о разработке новой конструкции представлений*, в которой сохранялся бы имеющий глубокие физические основы принцип порождения пространства представления старшим вектором, но вес был бы заменен другим объектом (зависящим от аналитической структуры поверхности).

Решение этой задачи привело к конструкции фермионных представлений. Представления этого класса параметризуются ("в существенном") голоморфными векторными расслоениями на римановой поверхности. Это приводит к выводу о том, что теория представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова далеко выходит за рамки классической теории старшего веса, и в ней весьма существенна роль алгебро-геометрических явлений.

Помимо нового ингредиента, которым является использование голоморфных расслоений, в конструкции фермионного представления важную роль играет хорошо известное понятие полубесконечных кососимметричеких форм, введенное Б. Л. Фейгиным и Д. Б. Фуксом в [7]. К началу настоящего исследования уже существовали примеры представлений алгебр Кричевера–Новикова, построенные с использованием этих объектов [26], [27], [28], [43].

Один из центральных вопросов теории представлений алгебр Ли – описание операторов Казимира (казимиров, лапласианов). Казимиры могут быть охарактеризованы как эндоморфизмы представлений алгебры Ли, которые определенным образом строятся по самим операторам представления. Казимиры – объект исключительной важности в теории и приложениях. Теория специальных функций, конструкции гамильтонианов и исследование свойств квантовых систем, обладающих симметриями, теория вполне интегрируемых систем – далеко не полный список их приложений. Наиболее важны казимиры второго порядка.

Для конечномерных полупростых алгебр Ли описание казимиров основано, главным образом, на теореме И. М. Гельфанда о центре универсальной обертывающей алгебры [12]. Этот подход не работает в бесконечномерном случае. Для алгебр Каца–Муди определение казимира второго порядка использует либо корневую структуру (как в [17]), либо наличие оператора градуировки (выделенного векторного поля $z\frac{\partial}{\partial z}$ на римановой сфере) – как в [18]. Для аффинных алгебр Кричевера–Новикова не известно ни корневой структуры (как отмечалось выше), ни какого бы то ни было выделенного векторного поля, ни градуировки. Поэтому определение казимира второго порядка требует какого-то нового подхода. В настоящем исследовании мы ставим и решаем *задачу полного описания казимиров второго порядка аффинных алгебр Кричевера–Новикова.*

Перечисленные выше основные задачи теории представлений применительно к аффинным алгебрам Кричевера–Новикова впервые поставлены, и в той или иной степени решены, в ходе настоящего исследования.

Параллельно с разработкой теории представлений алгебр Кричевера–Новикова выяснялись ее возможные приложения.

В теории представлений алгебр Каца–Муди имеется специфическое и очень интересное явление, названное В. Кацем в [17]"одним из самых мощных инструментов конформной теории поля" – конструкция Сугавары. Эта конструкция позволяет при очень общих предположениях построить по представлению аффинной алгебры представление центрального расширения соответствующей алгебры векторных полей. Это последнее называется *представлением Сугавары.* Конструкция восходит к работе Сугавары [64]. Общепринятое изложение для аффинных алгебр Каца–Муди дано в [18]. Основы обобщения конструкции на римановы поверхности положительного рода заложены в [27]. В этой работе, впрочем, рассматривался случай алгебры токов со значениями в коммутативной (конечномерной) алгебре Ли (по-другому это называется алгеброй типа Гейзенберга). Возникает естественная *задача нахождения некоммутативного аналога конструкции* [27].

В настоящей работе представлен совместный результат автора и М. Шлихенмайера – *обобщение конструкции Сугавары на случай токов на римановой поверхности с произвольным числом отмеченных точек и со значениями в произвольной конечномерной редуктивной алгебре Ли.* Случай некоммутативных токов на римановых поверхностях с двумя отмеченными точками впервые рассмотрен в физической литературе [4]. В этой работе, в основном решающей задачу, имеются значительные математические пробелы (анализ которых дан в разделе 4.2). Совместная работа автора и М. Шлихенмайера [48] для случая токов со значениями в полупростой алгебре Ли появилась независимо, но позднее. В ней использованы другие методы доказательства, позволившие устранить пробелы работы [4], а также рассмотрен случай римановых поверхностей с многими отмеченными точками. Несложное обобщение конструкции на редуктивный случай проделано автором [61]. В целом наши доказательства моделируют доказательство для алгебр Каца–Муди [18], но они гораздо сложнее технически. Ввиду важности конструкции Сугавары хотелось бы иметь более простое и прозрачное доказательство.

Отметим особо, что хорошо известно [18] использование конструкции Сугавары в описании казимиров второго порядка аффинных алгебр Каца–Муди. Мы также используем полученные нами результаты по конструкции Сугавары на римановых поверхностях в упомянутом выше описании операторов Казимира.

Полученное нами обобщение конструкции Сугавары позволило перейти к дальнейшим *приложениям теории представлений алгебр Кричевера–Новикова в конформной теории поля.*

В основе приложений аффинных алгебр Ли в конформной теории поля лежит тот факт, что действие Весса–Зумино–Новикова инвариантно относительно группы токов на римановой поверхности, и, следовательно, его квантование связано с представлениями алгебры токов, то есть алгебры Кричевера–Новикова. Ограничивая токи на римановой поверхности на малые контуры вокруг отмеченных точек, можно получить вложение алгебры Кричевера–Новикова в прямую сумму алгебр Каца–Муди, причем каждое представление второй задаст представление первой. Исторически был выбран именно этот путь [21], [66], причем настоящая алгебра симметрий была забыта. Возникает естественная задача: *построить двумерную конформную теорию поля с аффинной алгеброй Кричевера–Новикова в качестве алгебры токов.* При этом увеличивается число параметров, от которых зависит теория, и получает решение проблема нулевых мод, обсуждавшаяся выше (раздел 1).

Результаты, полученные в направлении реализации этой программы, представлены в главе 5 диссертации (см. также следующий раздел). Это построение расслоения конформных блоков и проективно плоской связности на нем, нахождение аналога уравнений Книжника–Замолодчикова для положительного рода. В целом эти результаты получены в соавторстве с М. Шлихенмайером.

3. Структура и содержание работы. Работа состоит из введения и шести глав. Нумерация всех утверждений и определений сквозная в пределах главы; каждый номер состоит из двух частей – номер главы и номер утверждения (соотношения).

В главе 1 вводятся основные определения, относящиеся к алгебрам Кричевера–Новикова, и дается обзор их основных свойств. Введены алгебры токов, векторных полей и дифференциальных операторов Кричевера–Новикова, пространства тензоров Кричевера–Новикова на римановых поверхностях. Определена двойственность Кричевера–Новикова между тензорами дополнительных весов (валентностей). Введены базисы Кричевера–Новикова и соответствующая почти градуированная структура, играющие основную роль в дальнейшем изложении. Дано описание центральных расширений и 2-когомологий введенных алгебр. Даны определения объектов, составляющих предмет настоящей работы – аффинной алгебры Кричевера–Новикова и алгебры типа Вирасоро.

В главе 2 дается описание пространства коприсоединенных орбит аффинной алгебры Кричевера–Новикова.

Глава 3 главным образом посвящена конструкции фермионных представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова. Сначала, следуя [29], [32], [30], [33], мы даем описание голоморфных расслоений на римановых поверхностях в терминах параметров Тюрина и вводим базисы Кричевера–Новикова в сечениях голоморфных расслоений с полюсами в двух отмеченных точках. Затем мы даем аналогичное описание базисов для случая многих отмеченных точек. Центральный результат главы – построение класса представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова, получивших название фермионных представлений. Мы даем описание классов эквивалентности этих представлений. В заключение мы даем более традиционную (но обладающую меньшей степенью общности для данного класса алгебр Ли) конструкцию модулей Верма в случае многих точек. Основные результаты главы опубликованы в [56], [57], [58], [61].

Глава 4 посвящена представлениям алгебр типа Вирасоро. Развивая результаты предыдущей главы, мы рассматриваем фермионные представления этих алгебр. Вслед за этим мы переходим к конструкции Сугавары, позволяющей по каждому допустимому представлению аффинной алгебры построить в том же пространстве представление алгебры типа Вирасоро. Значительную часть главы занимают подробные доказательства теорем о конструкции Сугавары, которые весьма объемны и могут быть пропущены при первом чтении. Основные результаты главы опубликованы в [48], [49], [50], [58], [61].

В главе 5 рассматриваются приложения алгебр Кричевера–Новикова к геометрии пространств модулей и уравнениям Книжника–Замолодчикова. Мы формулируем в терминах алгебр типа Вирасоро и базисов Кричевера–Новикова в них описание касательного пространства Кураниши к пространству модулей римановых поверхностей с отмеченными точками и фиксированными до определенного порядка струями локальных координат в этих точках. Пользуясь этим описанием, мы находим формулы для деформаций функций и векторных полей Кричевера–Новикова при деформации модулей. Далее мы определяем конформные блоки как коинварианты *регулярных подалгебр* аффинных алгебр Кричевера–Новикова, вводим расслоение конформных блоков, обобщенную связность Книжника–Замолодчикова на нем и доказываем проективную плоскостность этой связности (используя при этом полученные выше результаты по деформациям). Мы определяем уравнения Книжника–Замолодчикова на римановых поверхностях положительного рода с отмеченными точками как уравнения горизонтальных сечений этой связности; найденные уравнения явно записываем в терминах базисов Кричевера–Новикова. В заключение главы мы показываем, что для рода 0 наш подход дает обычные уравнения Книжника–Замолодчикова, и получаем явный вид этих уравнений для рода 1. Основные результаты главы опубликованы в [49], [50].

В главе 6 мы вводим и описываем операторы Казимира второго порядка аффинных алгебр Кричевера–Новикова. Мы вводим, также, более общие операторы, названные нами полуказимирами, и устанавливаем их связь с касательными пространствами к пространствам модулей римановых поверхностей, рассмотренными выше, а именно находим отображения касательных пространств к пространствам модулей в пространство операторов, индуцированных полуказимирами на конформных блоках; исследованы условия корректной определенности этих отображений. Основные результаты главы опубликованы в [58], [60], [61], [48].

Настоящая работа основана на материалах докторской диссертации автора, имеющей то же название.

1. АЛГЕБРЫ КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ

Пусть Σ – компактная риманова поверхность рода g, или, в терминах алгебраической геометрии, гладкая проективная кривая над $\mathbb{C}$. Пусть

$$I = (P_1, \ldots, P_N), \quad N \geqslant 1,$$

– упорядоченный набор попарно различных отмеченных точек на Σ, и P_∞ – выделенная отмеченная точка, отличная от P_i для любого i. Точки из I называются *входящими*, а точка P_∞ – *выходящей*. Пусть $A = I \cup \{P_\infty\}$. Для $\Sigma \setminus A$ мы будем часто использовать обозначение Σ^*. В [42], [43] рассмотрен случай произвольного конечного числа выходящих точек. Результаты этого раздела остаются справедливыми в этом более общем случае.

1.1. Алгебры токов, векторных полей и другие алгебры Кричевера–Новикова. Пусть $\mathcal{A} := \mathcal{A}(\Sigma, I, P_\infty)$ – ассоциативная алгебра мероморфных функций на Σ, регулярных везде за исключением, быть может, точек $P \in A$. Пусть $\mathfrak{g}$ – комплексная конечномерная редуктивная алгебра Ли. Тогда

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \tag{1.1}$$

называется *алгеброй токов Кричевера–Новикова* [26], [51], [53], [55]. Скобка Ли на $\bar{\mathfrak{g}}$ задается с помощью соотношений

$$[x \otimes A, y \otimes B] = [x, y] \otimes AB. \tag{1.2}$$

Мы будем часто опускать в обозначениях символ $\otimes$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ алгебру Ли мероморфных векторных полей на Σ, которым разрешается иметь полюса только в точках $P \in A$ [26], [27], [28].

Для римановой сферы ($g = 0$) с квазиглобальной координатой z и множествами $I = \{0\}$ и $P_\infty = \infty$, алгебра $\mathcal{A}$ – это алгебра полиномов Лорана, алгебра токов $\bar{\mathfrak{g}}$ – это алгебра петель, а алгебра векторных полей $\mathcal{L}$ – это алгебра Витта. Иногда, для краткости, мы называем этот случай классическим.

Алгебра $\mathcal{L}$ действует на элементы алгебры $\mathcal{A}$ с помощью дифференцирований. Это позволяет определить алгебру Ли $\mathcal{D}^1$ дифференциальных операторов первого порядка как полупрямую сумму алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$. Как векторное пространство $\mathcal{D}^1 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{L}$. Скобка Ли определяется с помощью соотношений

$$[(A,e),(B,f)] := (eB - fA, [e,f]), \quad A,B \in \mathcal{A}, \quad e,f \in \mathcal{L}. \tag{1.3}$$

Здесь eA обозначает производную функции h вдоль векторного поля e. В локальных координатах имеем $e = \tilde{e}\,\frac{d}{dz}$ и $eA = \tilde{e} \cdot \frac{dA}{dz}$.

Рассмотрим, наконец, алгебру Ли $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ дифференциальных операторов, связанную с $\bar{\mathfrak{g}}$ (алгебру *дифференциальных операторов Кричевера–Новикова*). Как линейное пространство $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$. Скобка Ли задается соответствующими скобками на $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathcal{L}$, и дополнительными требованиями

$$[e, x \otimes A] := -[x \otimes A, e] := x \otimes (eA). \tag{1.4}$$

В качестве частного случая при $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1)$ получаем $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}} = \mathcal{D}^1$.

1.2. Мероморфные формы веса λ и двойственность Кричевера–Новикова. Пусть $\mathcal{K}$ – каноническое линейное расслоение. Ассоциированный пучок локальных сечений – это пучок голоморфных дифференциалов. Следуя общепринятой практике, мы обычно не будем делать различий между линейным расслоением и ассоциированным обратимым пучком локальных сечений. Для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}$ рассмотрим расслоение $\mathcal{K}^\lambda := \mathcal{K}^{\otimes\lambda}$. Здесь мы следуем обычному соглашению: $\mathcal{K}^0 = \mathcal{O}$ – тривиальное расслоение, а $\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^*$ – голоморфное касательное (линейное) расслоение. Разумеется, зафиксировав тэта-характеристики, то есть расслоение S, для которого $S^{\otimes 2} = \mathcal{K}$, мы могли бы рассматривать $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{F}^\lambda$ (бесконечномерное) векторное пространство глобальных мероморфных сечений расслоения $\mathcal{K}^\lambda$, голоморфных на $\Sigma \setminus A$. Элементы пространства $\mathcal{F}^\lambda$ называются (мероморфными) формами, или тензорами, веса λ.

Особый интерес представляют следующие случаи: функции ($\lambda = 0$), векторные поля ($\lambda = -1$), 1-формы ($\lambda = 1$) и квадратичные дифференциалы ($\lambda = 2$). Пространство функций выше обозначено $\mathcal{A}$, а пространство векторных полей – $\mathcal{L}$.

Умножая сечения на функции, вновь получаем сечения. Таким образом пространства $\mathcal{F}^\lambda$ наделяются структурой $\mathcal{A}$-модулей. Действие векторных полей на формы с помощью производной Ли превращает пространства $\mathcal{F}^\lambda$ в $\mathcal{L}$-модули. В локальных кординатах производная Ли задается формулой

$$(e\,.\,g)_| := \left(\tilde{e}(z)\,\frac{d}{dz}\right).\,(\tilde{g}(z)\,dz^\lambda) := \left(\tilde{e}(z)\frac{d\tilde{g}}{dz}(z) + \lambda\,\tilde{g}(z)\frac{d\tilde{e}}{dz}(z)\right)dz^\lambda. \tag{1.5}$$

С помощью канонического определения $(g+e).v = g\cdot v + e.v$ на векторных пространствах $\mathcal{F}^\lambda$ задается структура $\mathcal{D}^1$-модулей. Здесь $g \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{L}$ и $v \in \mathcal{F}^\lambda$. Универсальные конструкции позволяют рассматривать и алгебры дифференциальных операторов произвольного порядка [43], [45].

Пусть ρ – мероморфный дифференциал, голоморфный на $\Sigma \setminus A$, имеющий полюса в точности первого порядка в точках множества A, заданные положительные вычеты в I, заданные отрицательные вычеты в точке P_∞ (разумеется, удовлетворяющие условию $\sum_{P\in I}\operatorname{res}_P(\rho) + \operatorname{res}_{P_\infty}(\rho) = 0$) и чисто мнимые периоды. Существует ровно один такой дифференциал [39, p.116]. Для фиксированной точки $R \in \Sigma \setminus A$ определена, и является гармонической, функция $u(P) = \Re\int_R^P \rho$. Семейство линий уровня $C_\tau := \{p \in M \mid u(P) = \tau\}$, $\tau \in \mathbb{R}$ определяет на $\Sigma \setminus A$ слоение. Каждая линия C_τ отделяет точки множества I от точки P_∞. Для всех $\tau \ll 0$ ($\tau \gg 0$) линия уровня C_τ представляет собой несвязное объединение деформированных окружностей C_i вокруг точек P_i, $i = 1, \ldots, N$ (деформированную окружность C_∞ вокруг точки P_∞). Мы назовем любую такую линию уровня, или любой цикл, гомологичный такой линии уровня, *разделяющим циклом* и обозначим его C_S.

Определение 1.1. *Двойственность Кричевера–Новикова* задается спариванием пространств $\mathcal{F}^\lambda$ и $\mathcal{F}^{1-\lambda}$ с помощью формы

$$\begin{gathered}\mathcal{F}^\lambda \times \mathcal{F}^{1-\lambda} \to \mathbb{C},\\ \langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi i}\int_{C_S} fg = \sum_{P\in I}\operatorname{res}_P(fg) = -\operatorname{res}_{P_\infty}(fg),\end{gathered} \tag{1.6}$$

где C_S – произвольный разделяющий цикл.

Последнее равенство следует из теоремы о вычетах. Заметим, что в (1.6) интеграл не зависит от выбора разделяющего цикла. Из существования дуальных базисов, построенных в следующем разделе, следует, что форма (1.6) является невырожденной.

1.3. Базисы Кричевера–Новикова. Кричевер и Новиков ввели специальные базисы (*базисы Кричевера–Новикова*) в пространствах мероморфных тензоров на римановых поверхностях с двумя отмеченными точками. При $g = 0$ базисы Кричевера–Новикова совпадают с базисами Лорана. Многоточечное обобщение этих базисов дано в [42], [43] (см. также [38] о некоторых результатах в том же направлении). Следуя [26], [42], [43], мы определяем здесь базисы Кричевера–Новикова для тензоров произвольного веса λ на римановой поверхности с N отмеченными точками.

Зафиксируем λ и для любых $n \in \mathbb{Z}$, $p = 1, \ldots, N$, предъявим базисный элемент $f^\lambda_{n,p} \in \mathcal{F}^\lambda$. Базисные элементы выбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли соотношениям двойственности

$$\langle f^\lambda_{n,p}, f^{1-\lambda}_{m,r} \rangle = \delta^m_{-n} \cdot \delta^r_p \tag{1.7}$$

по отношению к спариванию (1.6). В частности, отсюда вытекает, что спаривание (1.6) невырожденно. Кроме того, базисные элементы должны удовлетворять условию

$$\mathrm{ord}_{P_i}(f^\lambda_{n,p}) = (n + 1 - \lambda) - \delta^p_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.8}$$

Порядок в точке P_∞ выбирается так чтобы с точностью до скалярного множителя существовал единственный элемент, удовлетворяющий (1.7). Для этого при $g \geqslant 2$, $\lambda \neq 0, 1$ и A, состоящем из точек общего положения (а также при $g = 0$ – без дополнительных ограничений), потребуем

$$\mathrm{ord}_{P_\infty}(f^\lambda_{n,p}) = -N \cdot (n + 1 - \lambda) + (2\lambda - 1)(g - 1). \tag{1.9}$$

После выбора локальных координат z_p в точках P_p скалярный множитель фиксируется условием

$$f^\lambda_{n,p}(z_p) = z_p^{n-\lambda}(1 + O(z_p))(dz_p)^\lambda, \quad p = 1, \ldots, N. \tag{1.10}$$

С использованием теоремы Римана–Роха в [40] показано, что существует только один элемент, удовлетворяющий (1.8)-(1.10). По поводу модификаций этих требований при остальных g и λ см. [50], [42], [43].

Имеются точные описания базисных элементов $f^\lambda_{n,p}$ в терминах рациональных функций при $g = 0$, σ-функции Вейерштрасса при $g = 1$, прим-форм и тэта-функций при $g \geqslant 1$ [41]. Для $g = 0$

и $g = 1$ такие описания можно найти и в [50, §§ 2, 7]. По поводу описаний в терминах $\wp$-функции Вейерштрасса см. [37], [44]. В частности, из явных представлений видно что базисные элементы аналитически меняются при деформации комплексной структуры римановой поверхности.

Для следующих случаев мы вводим специальные обозначения:

$$A_{n,p} := f^0_{n,p}, \quad e_{n,p} := f^{-1}_{n,p}, \quad \omega^{n,p} := f^1_{-n,p}, \quad \Omega^{n,p} := f^2_{-n,p}. \tag{1.11}$$

Для $g \geqslant 1$ и $N = 1$ эти элементы с точностью до сдвига номера совпадают с введенными Кричевером и Новиковым в [26], [27], [28].

1.4. Почти градуированная структура, треугольные разложения. При $g = 0$ и $N = 1$ алгебры Ли, введенные в разделе 1.1 являются градуированными. Градуировка – необходимый инструмент их структурной теории и теории представлений старшего веса. Для случая высших родов (и в многоточечной ситуации при $g = 0$) градуировки нет. Фундаментальным наблюдением Кричевера и Новикова [26], [27], [28] является то, что более слабое свойство, почти градуированность, уже достаточно для развития структурной теории и теории представлений в этом более общем случае.

Алгебра (ассоциативная или алгебра Ли) называется *почти градуированной* если она допускает разложение в прямую сумму векторных пространств $\mathcal{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}_n$, где $\dim \mathcal{V}_n < \infty$ и существуют константы R и S такие, что

$$\mathcal{V}_n \cdot \mathcal{V}_m \subseteq \bigoplus_{h=n+m-R}^{n+m+S} \mathcal{V}_h \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.12}$$

Элементы пространства $\mathcal{V}_n$ называются *однородными элементами степени n*. Пусть $\mathcal{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}_n$ – почти градуированная алгебра и M – некоторый $\mathcal{V}$-модуль. Модуль M называется *почти градуированным* если он допускает разложение в прямую сумму векторных пространств $M = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} M_m$, где (1) $\dim M_m < \infty$ и (2) имеются константы T и U такие, что

$$V_n M_m \subseteq \bigoplus_{h=n+m-T}^{n+m+U} M_h \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.13}$$

Элементы пространства M_n называются *однородными элементами степени* n.

В случае пространства $\mathcal{F}^\lambda$ однородная компонента F_n^λ определяется как подпространство, порожденное элементами $f_{n,p}^\lambda$, $p = 1, \dots, N$. Тогда $\mathcal{F}^\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_n^\lambda$.

Предложение 1.2 [42], [43]. *По отношению к введенной степени алгебра векторных полей* $\mathcal{L}$, *алгебра функций* $\mathcal{A}$ *и алгебра дифференциальных операторов* $\mathcal{D}^1$ *являются почти градуированными, а* $\mathcal{F}^\lambda$ *является почти градуированным модулем над ними. В частности, существуют постоянные* $K, L \in \mathbb{N}$, *такие что для всех* $n, m \in \mathbb{Z}$

$$A_{n,p} \cdot A_{m,r} = \delta_p^r \, A_{n+m,p} + \sum_{h=n+m+1}^{n+m+K} \sum_{s=1}^{N} \alpha_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)} A_{h,s},$$

$$[e_{n,p}, e_{m,r}] = \delta_p^r \, (m-n) \, e_{n+m,p} + \sum_{h=n+m+1}^{n+m+L} \sum_{s=1}^{N} \gamma_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)} e_{h,s},$$

с подходящими коэффициентами $\alpha_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)}, \gamma_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)} \in \mathbb{C}$.

Алгебру $\mathcal{A}$ как векторное пространство можно разложить следующим образом:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_{(0)} \oplus \mathcal{A}_-, \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &:= \langle A_{n,p} \mid n \geqslant 1, (P_1, P_2, \dots, P_N) \rangle, \\ \mathcal{A}_- &:= \langle A_{n,p} \mid n \leqslant -K-1, (P_1, P_2, \dots, P_N) \rangle, \\ \mathcal{A}_{(0)} &:= \langle A_{n,p} \mid -K \leqslant n \leqslant 0, (P_1, P_2, \dots, P_N) \rangle, \end{aligned} \tag{1.15}$$

а алгебру Ли $\mathcal{L}$ следующим образом:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_{(0)} \oplus \mathcal{L}_-, \tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &:= \langle e_{n,p} \mid n \geqslant 1, (P_1, P_2, \dots, P_N) \rangle, \\ \mathcal{L}_- &:= \langle e_{n,p} \mid n \leqslant -L-1, (P_1, P_2, \dots, P_N) \rangle, \\ \mathcal{L}_{(0)} &:= \langle e_{n,p} \mid -L \leqslant n \leqslant 0, (P_1, P_2, \dots, P_N) \rangle. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Мы называем (1.14), (1.17) *треугольными разложениями*. Аналогично получаем треугольное разложение алгебры $\mathcal{D}^1$.

Вследствие почти градуированности подпространства $\mathcal{A}_\pm$ и $\mathcal{L}_\pm$ являются подалгебрами, но подпространства $\mathcal{A}_{(0)}$ и $\mathcal{L}_{(0)}$ таковыми, вообще говоря, не являются. Для них мы используем название *критическая полоса.*

Заметим, что $\mathcal{A}_+$ и $\mathcal{L}_+$ могут быть охарактеризованы как алгебра функций (соответственно, векторных полей), имеющих в точках P_i, $1,\dots,N$ нули, как минимум, порядка один (соответственно, два). Эти алгебры могут быть расширены с помощью добавления всех элементов, регулярных в точках P_i. Этого можно достичь добавляя к ним множества $\{A_{0,p},(P_1,P_2,\dots,P_N)\}$ (соответственно $\{e_{0,p},e_{-1,p},1,\dots,N\}$) базисных элементов критической полосы. Мы обозначаем расширенные алгебры $\mathcal{A}_+^*$ и $\mathcal{L}_+^*$ соответственно.

Со своей стороны, $\mathcal{A}_-$ и $\mathcal{L}_-$ также могут быть расширены так, чтобы они содержали все элементы, регулярные в P_∞. Это подробно объяснено в [50]. Получим $\mathcal{A}_-^*$ и $\mathcal{L}_-^*$ соответственно. Точно так же для любого $p\in\mathbb{N}_0$ пусть $\mathcal{L}_-^{(p)}$ – подалгебра векторных полей, имеющих в точке P_∞ нуль порядка $\geqslant p+1$, а $\mathcal{A}_-^{(p)}$ – подалгебра функций имеющих в P_∞ нуль порядка $\geqslant p$. Получаем разложения

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_+\oplus\mathcal{L}_{(0)}^{(p)}\oplus\mathcal{L}_-^{(p)} \text{ для } p\geqslant 0, \tag{1.18}$$

для $p\geqslant 1$ и

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_+\oplus\mathcal{A}_{(0)}^{(p)}\oplus\mathcal{A}_-^{(p)} \tag{1.19}$$

для $p\geqslant 1$ с “критическими полосами” $\mathcal{L}_{(0)}^{(p)}$ и $\mathcal{A}_{(0)}^{(p)}$, которые обладают лишь структурой подпространств. Особенный интерес для нас представляет пространство $\mathcal{L}_{(0)}^{(1)}$, которое мы называем *редуцированной критической полосой.* При $g\geqslant 2$ его размерность равна

$$\dim\mathcal{L}_{(0)}^{(1)}=N+N+(3g-3)+1+1=2N+3g-1. \tag{1.20}$$

Здесь первые два слагаемых соответствуют размерностям $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_{-1}$. Средний член идет от базисных векторных полей, имеющих полюса и в P_i, $1,\dots,N$, и в P_∞. Сумма $1+1$ соответствует базисным векторным полям, имеющим в P_∞ порядки ровно ноль и ровно один соответственно.

Несложно продолжить квазиградуировку на алгебру токов $\bar{\mathfrak{g}}$, полагая $\deg(x\otimes A_{n,p}):=n$. Как и выше, имеется треугольное разложение

$$\bar{\mathfrak{g}}=\bar{\mathfrak{g}}_+\oplus\bar{\mathfrak{g}}_{(0)}\oplus\bar{\mathfrak{g}}_-,\quad \text{где}\quad \bar{\mathfrak{g}}_\beta=\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}_\beta,\quad \beta\in\{-,(0),+\}, \tag{1.21}$$

В частности, $\bar{\mathfrak{g}}_\pm$ являются подалгебрами. Соответствующим образом возникают и расширенные подалгебры.

Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ естественно вкладывается в $\bar{\mathfrak{g}}$ в качестве подалгебры. Она лежит в подпространстве $\bar{\mathfrak{g}}_0$, что вытекает из следующей простой леммы.

Лемма 1.3 [49].

$$1 = \sum_{p=1}^{N} A_{0,p}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Используя (1.7), можно написать

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p=1}^{N} \langle 1, \omega^{n,p}\rangle A_{n,p}.$$

Вычисляя порядки подинтегральных выражений, получим

$$\langle 1, \omega^{n,p}\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \omega^{n,p} = 0, \quad \text{для } n \neq 0, \quad \langle 1, \omega^{0,p}\rangle = 1.$$

Последнее соотношение вводится для нормировки.

1.5. Центральные расширения и 2-когомологии. Алгебры типа Вирасоро. Пусть $\mathcal{V}$ – алгебра Ли и γ – 2-коцикл на ней в смысле когомологий алгебр Ли, то есть антисимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая соотношению

$$\gamma([f,g],h) + \gamma([g,h],f) + \gamma([h,f],g) = 0 \quad \forall f,g,h \in \mathcal{V}. \tag{1.23}$$

Можно определить структуру алгебры Ли на $\widehat{\mathcal{V}} = \mathbb{C}\oplus\mathcal{V}$ вводя для элементов этого пространства обозначения $\hat{f} := (0,f)$ и $t := (1,0)$, и полагая

$$[\hat{f},\hat{g}] := \widehat{[f,g]} + \gamma(f,g)\cdot t, \quad [t,\widehat{\mathcal{V}}] = 0. \tag{1.24}$$

Элемент t является центральным. С точностью до эквивалентности центральные расширения классифицируются элементами пространства $\mathrm{H}^2(\mathcal{V},\mathbb{C})$ 2-когомологий алгебры Ли $\mathcal{V}$ со значениями в тривиальном модуле $\mathbb{C}$. В частности, два коцикла γ_1, γ_2 определяют эквивалентные центральные расширения в том, и только в том случае когда существует линейная форма ϕ на $\mathcal{V}$, такая что

$$\gamma_1(f,g) = \gamma_2(f,g) + \phi([f,g]). \tag{1.25}$$

Определение 1.4. Пусть $\mathcal{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}_n$ – почти градуированная алгебра Ли. Коцикл γ на $\mathcal{V}$ называется локальным (по отношению к почти градуировке) если существуют такие $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$, что

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}\colon \gamma(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m) \neq 0 \implies M_2 \leqslant n + m \leqslant M_1. \tag{1.26}$$

Константы M_1 и M_2 называются соответственно верхней и нижней границами локального коцикла γ.

При условии $\deg(t) := 0$ центральное расширение $\widehat{\mathcal{V}}$ почти градуировано тогда, и только тогда, когда оно задано локальным коциклом γ. В этом случае мы называем $\widehat{\mathcal{V}}$ *почти градуированным центральным расширением*, или *локальным центральным расширением.*

В дальнейшем мы рассматриваем коциклы геометрического происхождения. Сначала мы делаем это для $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{D}^1$. Полное изложения для этих случаев дано в [46]. К этой работе мы отсылаем за доказательствами нижеследующих утверждений и дальнейшими разъяснениями.

Для коммутативной алгебры Ли $\mathcal{A}$ любая антисимметрическая билинейная форма является коциклом. Пусть C – произвольный (не обязательно связный) гладкий контур в Σ^* (римановой поверхности с выколотыми отмеченными точками), тогда билинейная форма, определенная соотношениями

$$\gamma_C^{(f)}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad \gamma_C^{(f)}(g, h) := \frac{1}{2\pi i}\int_C g\,dh \tag{1.27}$$

антисимметрична, и следовательно является коциклом. Отметим, что замена контура C любым гомологичным (гладким) контуром приводит к тому же коциклу. Этот коцикл *$\mathcal{L}$-инвариантен*, то есть

$$\gamma_C^{(f)}(eg, h) = \gamma_C^{(f)}(eh, g) \quad \forall e \in \mathcal{L},\ \forall g, h \in \mathcal{A}. \tag{1.28}$$

Для алгебры $\mathcal{L}$ векторных полей обобщим, следуя [26], на случай положительного рода коцикл Вирасоро–Гельфанда–Фукса. Для этого сначала выберем проективную связность. *Проективной связностью* называется функция R точки и локальных координат на римановой поверхности, которая при замене координат $u = u(z)$ преобразуется следующим образом:

$$R(u)u_z^2 = R(z) + \frac{u_{zzz}}{u_z} - \frac{3}{2}\left(\frac{u_{zz}}{u_z}\right)^2.$$

Пусть R – голоморфная проективная связность, C – произвольный цикл. Паре (C, R) сопоставим коцикл с помощью соотношения

$$\gamma^{(v)}_{C,R}(e,f) := \frac{1}{24\pi i}\int_C \left(\frac{1}{2}(\tilde{e}'''\tilde{f} - \tilde{e}\tilde{f}''') - R\cdot(\tilde{e}'\tilde{f} - \tilde{e}\tilde{f}')\right) dz. \quad (1.29)$$

Здесь $e = \tilde{e}\frac{d}{dz}$ и $f = \tilde{f}\frac{d}{dz}$, $\tilde{e}$ и $\tilde{f}$ – локальные мероморфные функции. Благодаря закону преобразования R, подынтегральное выражение оказывается 1-формой на римановой поверхности, то есть интеграл корректно определен. Другой выбор проективной связности (даже если выбирать среди мероморфных проективных связностей с полюсами только в точках множества A) приведет к когомологичному коциклу, и следовательно, к эквивалентному центральному расширению.

Коциклы рассмотренных двух типов могут быть продолжены на алгебру $\mathcal{D}^1$ если положить их равными нулю на подпространстве, дополнительном к области их определения. Для коциклов на алгебре векторных полей это не требует дополнительных условий, для алгебры функций необходимым и достаточным является условие $\mathcal{L}$-инвариантности (1.28). Однако, имеется еще один тип коциклов, которые "смешивают" функции и векторные поля. Для определения такого коцикла выберем мероморфную аффинную связность T, которая голоморфна вне отмеченных точек. *Аффинной связностью* [43], [58], [46] называется функция T точки и локальных координат на римановой поверхности, которая при замене координат $u = u(z)$ преобразуется следующим образом:

$$T(u)u_z = T(z) + \frac{u_{zz}}{u_z}.$$

Тогда

$$\gamma^{(m)}_{C,T}(e,g) := -\gamma^{(m)}_{C,T}(g,e) := \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\tilde{e}\cdot g'' + T\cdot(\tilde{e}\cdot g')\right) dz \quad (1.30)$$

является корректно определенным 2-коциклом. Как и раньше, класс когомологий не зависит от выбора аффинной связности.

Далее рассмотрим коциклы, полученные интегрированием по разделяющему циклу C_S. Такие коциклы мы называем *геометрическими*, или *стандартными*. Вместо γ_{C_S} будем писать γ_S. Очевидно, эти коциклы можно выразить через вычеты в точках множества I, или, эквивалентно, в точке P_∞.

Предложение 1.5 [26], [43]. *При интегрировании по разделяющим циклам C_S рассмотренные выше коциклы локальны. Для каждого из них верхняя граница равна нулю.*

Если заменить R или T другими мероморфными связностями, имеющими полюса лишь в отмеченных точках, коциклы останутся локальными.

Ввиду локальности геометрические коциклы дают почти градуированные центральные расширения $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ и $\widehat{\mathcal{D}^1}$. В частности, $\widehat{\mathcal{L}}$ является обобщением алгебры Вирасоро на случай римановых поверхностей положительного рода с отмеченными точками (обычная алгебра Вирасоро получится, если взять риманову сферу с отмеченными точками 0 и ∞).

Определение 1.6. Центральное расширение $\widehat{\mathcal{L}}$ алгебры Ли $\mathcal{L}$, отвечающее коциклу вида (1.29), где интеграл берется по разделяющему циклу, называется *алгеброй типа Вирасоро.*

Ввиду обращения в ноль геометрических коциклов (по крайней мере при голоморфной R) на подалгебрах $\mathcal{A}_\pm$ и $\mathcal{L}_\pm$, последние естественно отождествляются с подалгебрами $\widehat{\mathcal{A}}_\pm$ и $\widehat{\mathcal{L}}_\pm$ в $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ соответственно.

Одним из главных результатов работы [46] является

Теорема 1.7. (a) *Каждый локальный коцикл на $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{L}$-инвариантности, кратен (над $\mathbb{C}$) коциклу $\gamma_S^{(f)}$. Коцикл $\gamma_S^{(f)}$ когомологически нетривиален.*

(b) *Каждый локальный коцикл на $\mathcal{L}$ когомологичен коциклу, кратному $\gamma_{S,R}^{(v)}$. Класс когомологий коцикла $\gamma_{S,R}^{(v)}$ нетривиален. Для каждого когомологически нетривиального локального коцикла найдется мероморфная проективная связность R', голоморфная вне A, такая что этот коцикл кратен $\gamma_{S,R'}^{(v)}$.*

(c) *Каждый локальный коцикл на $\mathcal{D}^1$ с точностью до кограницы является линейной комбинацией коциклов $\gamma_S^{(f)}$, $\gamma_{S,R}^{(v)}$ и $\gamma_{S,T}^{(m)}$, то есть*

$$\gamma = r_1\gamma_S^{(f)} + r_2\gamma_{S,T}^{(m)} + r_3\gamma_{S,R}^{(v)} + \text{\textit{кограница}}, \quad r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}. \quad (1.31)$$

Три указанных коцикла линейно независимы в пространстве когомологий. Если коэффициенты r_2 и r_3 линейной комбинации – ненулевые, то мероморфные проективная связность R' и аффинная связность T', голоморфные вне A, могут быть выбраны так, что $\gamma = r_1\gamma_S^{(f)} + r_2\gamma_{S,T'}^{(m)} + r_3\gamma_{S,R'}^{(v)}$.

1.6. Аффинные алгебры Кричевера–Новикова, в том числе алгебры Каца–Муди. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная редуктивная алгебра Ли. Выше мы ввели почти градуированную алгебру токов $\bar{\mathfrak{g}}$. В этом разделе мы изучим центральные расширения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Важнейшими из них являются алгебры Кричевера–Новикова аффинного типа.

Пусть α – инвариантная симметрическая билинейная форма, где условие инвариантности означает, что $\alpha([x,y],z) = \alpha(x,[y,z])$.

Определение 1.8. *Алгебра Кричевера–Новикова аффинного типа* – это векторное пространство вида $\widehat{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}t$ (t – формальная центральная образующая), на котором задана скобка Ли

$$[x \otimes f, y \otimes g] = [x,y] \otimes (fg) + \gamma(x \otimes f, y \otimes g) \cdot t, \quad [t, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0, \tag{1.32}$$

где

$$\gamma(x \otimes f, y \otimes g) = \frac{\alpha(x,y)}{2\pi i} \int_{C_S} f\,dg \tag{1.33}$$

– коцикл на алгебре функций, полученный интегрированием по разделяющему контуру C_S.

Согласно данному определению $\widehat{\mathfrak{g}}$ – центральное расширение алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. В частном случае римановой сферы с выколотыми точками 0 и ∞ и полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ определение 1.8 дает аффинную алгебру Каца–Муди. Расширение $\widehat{\mathfrak{g}}$ зависит от выбора формы α. Если мы хотим отразить этот факт в обозначениях, мы используем обозначение $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha,S}$.

Определяющий центральное расширение коцикл γ_S локален. Следовательно, мы можем продолжить нашу почти градуировку на все центральное расширение, полагая $\deg t := 0$ и $\deg(x \otimes A_{n,p}) := n$. Как и прежде, мы получаем треугольное разложение

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha,S} = \widehat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_-, \quad \text{где} \quad \widehat{\mathfrak{g}}_\pm \cong \bar{\mathfrak{g}}_\pm \quad \text{и} \quad \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)} = \bar{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \mathbb{C} \cdot t. \tag{1.34}$$

Соответствующие разложения имеют место для расширенных подалгебр. Среди последних особый интерес представляет

$$\widehat{\mathfrak{g}}^r := \widehat{\mathfrak{g}}_-^{(1)} = \bar{\mathfrak{g}}_-^{(1)} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_-^{(1)}, \qquad \widehat{\mathfrak{g}}_+^{*,ext} = \bar{\mathfrak{g}}_+^* \oplus \mathbb{C}\,t = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_+^*) \oplus \mathbb{C}\,t.$$

Вместо интегрирования в (1.33) по разделяющему контуру, мы могли бы интегрировать по любому другому циклу C, и получить другое, вообще говоря неэквивалентное, и даже не изоморфное, центральное расширение $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha,C}$. К тому же, *a priori* нет никаких причин для того, чтобы произвольно взятый коцикл, задающий центральное расширение алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, принадлежал этому типу, то есть получался бы в результате выбора некоторой инвариантной симметрической билинейной формы α и интегрирования 1-формы $f\,dg$ по циклу.

Прежде чем сформулировать относящиеся сюда результаты, расширим определение (1.28) $\mathcal{L}$-инвариантности так, чтобы оно годилось для коциклов на $\bar{\mathfrak{g}}$.

Определение 1.9. Коцикл γ на $\bar{\mathfrak{g}}$ называется *$\mathcal{L}$-инвариантным*, если

$$\gamma(x(eg), yh)) + \gamma(xg, y(eh)) = 0 \tag{1.35}$$

для всех $x, y \in \mathfrak{g}$, $e \in \mathcal{L}$, $g, h \in \mathcal{A}$.

Введенные выше коциклы, очевидно, $\mathcal{L}$-инвариантны.

Теорема 1.10 [47, теорема 3.13, следствие 3.14]. (a) *Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная простая алгебра Ли, тогда каждый локальный коцикл на алгебре токов $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ когомологичен коциклу, задаваемому соотношением*

$$\gamma(x \otimes f, y \otimes g) = r \cdot \frac{\beta(x,y)}{2\pi i} \int_{C_S} f\,dg, \tag{1.36}$$

где $r \in \mathbb{C}$, а β – форма Картана–Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, γ локален и $\mathcal{L}$-инвариантен.

(b) *Каждый локальный $\mathcal{L}$-инвариантный коцикл совпадает с коциклом вида* (1.36) *при подходящем выборе $r \in \mathbb{C}$.*

(c) *Если $\mathfrak{g}$ проста, то с точностью до эквивалентности и умножения центрального элемента на скаляр существует только одно нетривиальное почти градуированное центральное расширение $\widehat{\mathfrak{g}}$ соответствующей многоточечной алгебры токов высшего рода $\bar{\mathfrak{g}}$. Оно задается коциклом* (1.36).

Далее, пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная комплексная редуктивная конечномерная алгебра Ли, и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_M \tag{1.37}$$

– ее разложение на абелев идеал $\mathfrak{g}_0$ и простые идеалы $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_M$. Для соответствующей алгебры токов имеем $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}_0 \oplus \bar{\mathfrak{g}}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\mathfrak{g}}_M$.

Теорема 1.11 [47, теорема 3.20]. (a) *Пусть* $\mathfrak{g}$ – *конечномерная редуктивная алгебра Ли. Если дан локальный коцикл* γ *на* $\bar{\mathfrak{g}}$, *ограничение которого на* $\bar{\mathfrak{g}}_0$ *является* $\mathcal{L}$-*инвариантным, то существует симметрическая инвариантная билинейная форма* α *на* $\mathfrak{g}$, *такая что* γ *когомологичен коциклу*

$$\gamma'_{\alpha,S}(x\otimes f, y\otimes g) = \frac{\alpha(x,y)}{2\pi i}\int_{C_S} f\,dg. \tag{1.38}$$

Обратно: *каждая такая форма* α *определяет локальный коцикл.*

(b) *Если коцикл* γ *локален и* $\mathcal{L}$-*инвариантен на всей алгебре* $\bar{\mathfrak{g}}$, *то он имеет вид* (1.38).

(c)

$$\dim \mathrm{H}^2_{loc,\mathcal{L}}(\bar{\mathfrak{g}},\mathbb{C}) = \frac{n(n+1)}{2} + M. \tag{1.39}$$

Здесь $\mathrm{H}^2_{loc,\mathcal{L}}(\bar{\mathfrak{g}},\mathbb{C})$ обозначает подпространство когомологических классов, представленных локальными $\mathcal{L}$-инвариантными коциклами.

1.7. Центральные расширения алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$. Напомним, что $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ с дополнительным соотношением $[e, xA] = x(e.A)$, см. (1.4). Имеется короткая точная последовательность алгебр Ли

$$0 \longrightarrow \bar{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\ i_1\ } \mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\ p_2\ } \mathcal{L} \longrightarrow 0. \tag{1.40}$$

Вначале еще раз отметим, что ввиду почти градуированности $\mathcal{L}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ и того, что $\mathcal{A}$ – почти градуированный $\mathcal{L}$-модуль, алгебра $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ является почти градуированной. Для этой алгебры, как и для рассмотренных выше, локальные коциклы и центральные расширения изучены в [47] (отсутствие смешивающих коциклов в полупростом случае замечено в работе автора [58]). Ограничивая локальный коцикл алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ на подалгебру $\bar{\mathfrak{g}}$ получим локальный коцикл на последней. В полупростом случае имеет место

Теорема 1.12. (a) *Пусть* $\mathfrak{g}$ – *полупростая алгебра Ли и* γ – *локальный коцикл на* $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$. *Тогда на* $\mathfrak{g}$ *существует симметрическая инвариантная билинейная форма* α *такая, что коцикл* γ *когомологичен линейной комбинации локального коцикла* $\gamma_{\alpha,S}$, *заданного соотношением* (1.38) *и локального коцикла* $\gamma^{(v)}_{S,R}$ (1.29) (*где* $C = C_S$) *алгебры векторных полей* $\mathcal{L}$.

(b) *Если* $\mathfrak{g}$ *– простая алгебра Ли, то коцикл* $\gamma_{\alpha,S}$ *кратен стандартному коциклу* (1.36) *на* $\bar{\mathfrak{g}}$.

(c) $\dim \mathrm{H}^2_{loc}(\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}, \mathbb{C}) = M+1$, *где* M *– число простых идеалов в* $\mathfrak{g}$.

В редуктивном случае оказывается, что ограничение коцикла алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ на абелев идеал $\bar{\mathfrak{g}}_0$ является $\mathcal{L}$-инвариантным. В обобщение смешивающего коцикла для $\mathcal{D}^1$ мы получаем для каждой линейной формы $\phi \in \mathfrak{g}^*$, обращающейся в ноль на $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_M$, локальный коцикл

$$\gamma_{\phi,S}(e, x(g)) := \frac{\phi(x)}{2\pi i} \int_{C_S} \big(\tilde{e} \cdot g'' + T \cdot (\tilde{e} \cdot g')\big)\, dz. \tag{1.41}$$

Здесь, как и выше, T – мероморфная аффинная связность, имеющая полюсы только в точках множества A.

Теорема 1.13 [47, теорема 4.11]. (a) *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– конечномерная редуктивная алгебра Ли. Для каждого локального коцикла* γ *на* $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ *существуют симметрическая инвариантная билинейная форма* α *на* $\mathfrak{g}$, *линейная форма* ϕ *на* $\mathfrak{g}$, *которая обращается в ноль на* $\mathfrak{g}'$, *и* $r \in \mathbb{C}$, *такие что* γ *когомологичен*

$$\gamma' = \gamma_{\alpha,S} + \gamma_{\phi,S} + r\gamma^{(v)}_{S,R}, \tag{1.42}$$

коцикл $\gamma_{\alpha,S}$ *на алгебре токов дается формулой* (1.38), *смешивающий коцикл* $\gamma_{\phi,S}$ *– формулой* (1.41) *и коцикл* $\gamma^{(v)}_{S,R}$ *на алгебре векторных полей – формулой* (1.29). *Обратно: любые такие* α, ϕ, $r \in \mathbb{C}$ *определяют локальный коцикл.*

(b) *Размерность пространства классов локальных коциклов* $\mathrm{H}^2_{loc}(\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ *равна* $\frac{n(n+1)}{2} + n + M + 1$.

1.8. Локальные коциклы для $\mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{gl}(n)$. Рассмотрим $\mathfrak{sl}(n)$ – алгебру Ли бесследовых комплексных матриц $n \times n$. Единственной инвариантной симметрической билинейной формой на ней, с точностью до умножения на скаляр, является форма Картана–Киллинга $\beta(x, y) = \mathrm{tr}(xy)$. Из теорем 1.10 и 1.12 следует

Предложение 1.14. (a) *Каждый локальный коцикл на алгебре токов* $\overline{\mathfrak{sl}}(n)$ *когомологичен коциклу*

$$\gamma(xg, yh) = r \cdot \frac{\mathrm{tr}(xy)}{2\pi i} \int_{C_S} g\, dh, \quad r \in \mathbb{C}. \tag{1.43}$$

(b) *Каждый $\mathcal{L}$-инвариантный локальный коцикл совпадает с* (1.43) *при подходящем выборе* r.

(c) *Каждый локальный коцикл на алгебре дифференциальных операторов* $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{sl}(n)}$ *когомологичен линейной комбинации* (1.43) *и стандартного локального коцикла* $\gamma^{(v)}_{S,R}$ *алгебры векторных полей. В частности, отсутствуют смешивающие коциклы.*

Займемся далее алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n)$ всех комплексных матриц $n\times n$. Она раскладывается (ср. (1.37)) в прямую сумму 1-мерного центра $\mathfrak{s}(n)$ и простого идеала $\mathfrak{sl}(n)$: $\mathfrak{gl}(n)=\mathfrak{s}(n)\oplus\mathfrak{sl}(n)\cong\mathbb{C}\oplus\mathfrak{sl}(n)$, где $\mathfrak{s}(n)$ состоит из скалярных матриц $n\times n$.

Пространство симметрических инвариантных билинейных форм на $\mathfrak{gl}(n)$ 2-мерно. Базис составляют формы

$$\alpha_1(x,y)=\operatorname{tr}(xy)\quad\text{и}\quad\alpha_2(x,y)=\operatorname{tr}(x)\operatorname{tr}(y).\tag{1.44}$$

Форма α_1 является продолжением на $\mathfrak{gl}(n)$ формы Картана–Киллинга алгебры $\mathfrak{sl}(n)$ и инвариантна относительно $\mathfrak{gl}(n)$. Из теорем 1.11 и 1.13 следует

Предложение 1.15. (a) *Коцикл* γ *на* $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ *локален и обладает* $\mathcal{L}$-*инвариантным ограничением на* $\mathfrak{s}(n)$ *тогда, и только тогда, когда он когомологичен линейной комбинации следующих двух коциклов*

$$\begin{aligned}\gamma_1(x(g),y(h))&=\frac{\operatorname{tr}(xy)}{2\pi i}\int_{C_S}g\,dh,\\ \gamma_2(x(g),y(h))&=\frac{\operatorname{tr}(x)\operatorname{tr}(y)}{2\pi i}\int_{C_S}g\,dh.\end{aligned}\tag{1.45}$$

(b) *Если локальный коцикл* γ *на* $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ $\mathcal{L}$-*инвариантен, то* γ *является линейной комбинацией коциклов* (1.45).

Предложение 1.16. (a) *Каждый локальный коцикл* γ *на* $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{gl}(n)}$ *когомологичен линейной комбинации коциклов* γ_1 *и* γ_2, *определенных соотношениями* (1.45), *смешивающего коцикла*

$$\gamma_{3,T}(e,x(g))=\frac{\operatorname{tr}(x)}{2\pi i}\int_{C_S}\left(\tilde{e}g''+T\tilde{e}g'\right)dz,\tag{1.46}$$

и стандартного локального коцикла $\gamma^{(v)}_{S,R}$ *алгебры векторных полей, то есть*

$$\gamma=r_1\gamma_1+r_2\gamma_2+r_3\gamma_{3,T}+r_4\gamma^{(v)}_{S,R}+\textit{кограница}\tag{1.47}$$

для подходящих $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{C}$.

(b) *Если коцикл* γ *локален и его ограничение на* $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ $\mathcal{L}$-*инвариантно, а* $r_3, r_4 \neq 0$, *то существуют аффинная связность* T *и проективная связность* R, *голоморфные вне* A, *при которых коцикл* γ *представим в виде* (1.47) *с нулевой кограницей.*

(c) $\dim \mathrm{H}^2_{loc}(\mathcal{D}^1_{\mathfrak{gl}(n)}, \mathbb{C}) = 4$.

Оказывается, ограничения коциклов алгебры дифференциальных операторов на $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ когомологичны $\mathcal{L}$-инвариантным коциклам. Более того, ограничения на $\mathfrak{s}(n)$ *являются* $\mathcal{L}$-инвариантными [47, предл. 4.10].

2. КОПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АФФИННОЙ АЛГЕБРЫ КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА

Коприсоединенное представление играет особую роль в теории инвариантов и представлений алгебр Ли. Согласно методу орбит А. А. Кириллова [20] орбиты коприсоединенного представления в подходящем смысле параметризуют пространство всех представлений и несут много важной информации об их свойствах. Для алгебр Кричевера–Новикова, когда теория старшего веса не дает ответа на вопрос, каковы представления алгебры (см. раздел 2), принцип А. А. Кириллова остается единственным общим методом, способным пролить на это свет. В связи с этим большое значение приобретает задача классификации коприсоединенных орбит данной алгебры Ли. Ниже мы излагаем полученные в этом направлении результаты для аффинных алгебр Кричевера–Новикова [51], [53].

Коприсоединенное представление алгебры Ли и соответствующей группы определяется как представление в двойственном к этой алгебре Ли пространстве. В ниже мы даем описание этого пространства для аффинных алгебр Кричевера–Новикова. Мы делаем это в два приема – построение двойственного пространства к алгебре токов и его расширение 1-мерным пространством, двойственным к центру.

2.1. Двойственное пространство и коприсоединенное действие.

Двойственное пространство к алгебре токов. Пусть $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ – алгебра токов, введенная в разделе 1.1. Двойственное к ней пространство можно представить в виде

$$\bar{\mathfrak{g}}^* = \mathfrak{g}^* \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^1(\Sigma), \tag{2.1}$$

где $\Omega^1(\Sigma)$ – пространство 1-форм Кричевера–Новикова. Предположим, что на $\mathfrak{g}$ задана невырожденная инвариантная билинейная форма (x, y) ($x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}^*$). Отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ в силу этой формы. Тогда спаривание $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\bar{\mathfrak{g}}^*$ задается формулой

$$(xA, y\omega) = (x, y)\langle A, \omega\rangle,$$

где $\langle A, \omega\rangle$ – спаривание функций и 1-форм по Кричеверу–Новикову (1.6), $A \in \mathcal{A}$ и $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ произвольны.

Пример 1. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$

$$(xA, y\omega) = \frac{\operatorname{tr}(xy)}{2\pi i} \oint_{C_S} A\omega.$$

Коприсоединенное действие, которое канонически определяется как $\operatorname{ad}^* X = -(\operatorname{ad} X)^*$ (где $*$ в правой части означает сопряженный оператор), при наших предположениях определится соотношением

$$(\operatorname{ad}^* xA)(y\omega) = [xA, y\omega], \tag{2.2}$$

где $[xA, y\omega] = [x, y]A\omega$.

Лемма 2.1. *Билинейная форма* $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *является* $\bar{\mathfrak{g}}$*-инвариантной.*

Доказательство. Требуется доказать, что $([xA, yB], z\omega) = (xA, [yB, z\omega])$ для любых $x, y, z \in \mathfrak{g}$, $A, B \in \mathcal{A}$, $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$.

Действительно, $([xA, yB], z\omega) = ([x, y], z)\langle AB, \omega\rangle$. В силу инвариантности формы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ на $\mathfrak{g}$ имеем $([x, y], z) = (x, [y, z])$, а из (1.6) имеем $\langle AB, \omega\rangle = \langle A, B\omega\rangle$, откуда и следует утверждение леммы.

Пространство $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ и коприсоединенное представление аффинной алгебры. *Двойственное пространство* $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ к аффинной алгебре Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ мы определим как

$$\widehat{\mathfrak{g}}^* = \bar{\mathfrak{g}}^* \oplus \mathbb{C}\tilde{d}, \tag{2.3}$$

где $\tilde{d}$ – формально добавляемый базисный вектор, удовлетворяющий следующим требованиям:

$$(\bar{\mathfrak{g}}, \tilde{d}) = 0, \qquad (c, \tilde{d}) = 1, \tag{2.4}$$

где $c \in \widehat{\mathfrak{g}}$ – образующая центра. Тем самым определено спаривание между $\widehat{\mathfrak{g}}$ и $\widehat{\mathfrak{g}}^*$, и элемент $\tilde{d}$ является двойственным к c.

Лемма 2.2. *Имеют место соотношения*

$$([X, Y], \tilde{d}) = (X, dY) = \gamma(X, Y),$$

где $X, Y \in \bar{\mathfrak{g}}$, dY *– дифференциал* Y, γ *– коцикл, отвечающий алгебре* $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Доказательство. Раскрывая коммутатор в алгебре $\widehat{\mathfrak{g}}$, имеем: $[X,Y] = \overline{[X,Y]} + \gamma(X,Y)c$, где $\overline{[X,Y]}$ – коммутатор элементов X и Y в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Ввиду (2.4) теперь имеем $([X,Y],\tilde{d}) = \gamma(X,Y)$. Остается заметить, что в силу определения (1.32), с точностью до обозначений, имеем $\gamma(X,Y) = (X, dY)$.

Лемма 2.3. *Форма* $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ $\widehat{\mathfrak{g}}$*-инвариантна тогда, и только тогда, когда*

$$(\operatorname{ad}^* X)\tilde{d} = dX, \qquad (\operatorname{ad}^* c)\tilde{d} = 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Эта лемма непосредственно следует из предыдущей и определения действия (2.2), (2.5). Проверим, например, необходимость первого из условий (2.5). Из требования инвариантности формы имеем для произвольных X, Y

$$((\operatorname{ad} X)Y, \tilde{d}) = -(Y, (\operatorname{ad}^* X)\tilde{d}).$$

Но согласно лемме 2.2 $((\operatorname{ad} X)Y,\tilde{d}) = (X, dY) = -(Y, dX)$. Таким образом, при данном X для любого Y имеем

$$(Y, (\operatorname{ad}^* X)\tilde{d}) = (Y, dX),$$

и в силу невырожденности формы $(\operatorname{ad}^* X)\tilde{d} = dX$.

Группа токов и ее коприсоединенное действие. Пусть G – группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. *Групповым током* со значениями в G называется голоморфное отображение (проколотой) римановой поверхности Σ^* в G. Групповые токи образуют *группу токов* (которую мы обозначим $\overline{G}$) по операции поточечного умножения.

Коприсоединенное действие группы токов определим как действие на элементы пространства $\widehat{\mathfrak{g}}^*$, ограничение которого на подпространство $\bar{\mathfrak{g}}^*$ задается формулой $\omega \mapsto g\omega g^{-1}$ ($\omega \in \bar{\mathfrak{g}}^*$, $g \in \overline{G}$), и которое оставляет форму $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ инвариантной.

Коприсоединенное действие не является групповым действием, так как $g\omega g^{-1}$ – вообще говоря не мероморфная форма. Тем не менее эта форма голоморфна вне отмеченных точек, следовательно ее спаривание (1.6) с любым элементом из $\widehat{\mathfrak{g}}$ корректно определяет линейный функционал на $\widehat{\mathfrak{g}}$ (тривиальный на c).

Покажем, что в полупростом случае ограничение действия на подпространство $\bar{\mathfrak{g}}^*$ и условие инвариантности однозначно определяют действие на элемент $\tilde{d}$. Результат действия группового тока g на элемент $\tilde{d}$ обозначим $g\,\tilde{d}g^{-1}$.

Лемма 2.4. *Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то форма $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ $\overline{G}$-инвариантна тогда, и только тогда, когда $g\,\tilde{d}g^{-1} = \tilde{d} + dg \cdot g^{-1}$. Если $\mathfrak{g}$ редуктивна, то последнее условие является достаточным для $\overline{G}$-инвариантности формы.*

Доказательство. Если форма $\overline{G}$-инвариантна, то для произвольных $X, Y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеем

$$([X,Y], g\,\tilde{d}g^{-1}) = (g^{-1}[X,Y]g, \tilde{d}) = ([g^{-1}Xg, g^{-1}Yg], \tilde{d}). \tag{2.6}$$

По лемме 2.2

$$([g^{-1}Xg, g^{-1}Yg], \tilde{d}) = (g^{-1}Xg, d(g^{-1}Yg)). \tag{2.7}$$

Производя дифференцирование в правой части, находим

$$\begin{aligned}
&(g^{-1}Xg, d(g^{-1}Yg)) = \\
&\qquad = (g^{-1}Xg, -g^{-1}dg \cdot g^{-1}Yg + g^{-1}dY \cdot g + g^{-1}Y dg) \\
&\qquad = (X, -dg \cdot g^{-1}Y + dY + Y dg \cdot g^{-1})
\end{aligned}$$

(в последнем переходе вновь использована инвариантность). Далее,

$$\begin{aligned}
(X, -dg \cdot g^{-1}Y + dY + Y dg \cdot g^{-1}) &= (X, dY + [Y, dg \cdot g^{-1}]) \\
&= (X, dY) + (X, [Y, dg \cdot g^{-1}]).
\end{aligned}$$

По лемме 2.2 $(X, dY) = ([X,Y], \tilde{d})$, а силу инвариантности формы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ относительно действия алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ получаем $(X, [Y, dg \cdot g^{-1}]) = ([X,Y], dg \cdot g^{-1}])$. Таким образом

$$\begin{aligned}
(X, dY) + (X, [Y, dg \cdot g^{-1}]) &= ([X,Y], \tilde{d}) + ([X,Y], dg \cdot g^{-1}]) \\
&= ([X,Y], \tilde{d} + dg \cdot g^{-1}).
\end{aligned}$$

Окончательно, для любых $X, Y \in \bar{\mathfrak{g}}$, $g \in \overline{G}$ имеем

$$([X,Y], g\,\tilde{d}g^{-1}) = ([X,Y], \tilde{d} + dg \cdot g^{-1}). \tag{2.8}$$

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, и следовательно $[\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}] = \widehat{\mathfrak{g}}$. В силу невырожденности формы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ заключаем, что

$$g\,\tilde{d}g^{-1} = \tilde{d} + dg \cdot g^{-1}. \tag{2.9}$$

Чтобы доказать достаточность этого соотношения для инвариантности формы $(\cdot\,,\,\cdot)$, заметим, что предположение об инвариантности спаривания элемента $\tilde{d}$ с элементами пространства $\widehat{\mathfrak{g}}$ использовалось нами только один раз: в самом первом равенстве соотношения (2.6). В остальных преобразованиях используется инвариантность спаривания между $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\bar{\mathfrak{g}}^*$, которая эквивалентна инвариантности на $\mathfrak{g}$, которая, в свою очередь, дана по условию. Поэтому равенство выражения в средней части соотношения (2.6) и выражения в правой части соотношения (2.9) имеет место независимо от этого предположения:

$$([X,Y], \tilde{d} + dg\cdot g^{-1}) = (g^{-1}[X,Y]g, \tilde{d}).$$

При условии (2.9) это можно записать в виде

$$([X,Y], g\,\tilde{d}g^{-1}) = (g^{-1}[X,Y]g, \tilde{d}).$$

Таким образом, из соотношения (2.9) вытекает инвариантность спаривания элемента $\tilde{d}$ с элементами коммутатора $[\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]$, который, как мы отмечали выше, в полупростом случае совпадает со всем пространством $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Нам остается доказать достаточность условия (2.9) для инвариантности спаривания в случае редуктивной алгебры $\mathfrak{g}$. В этом случае $\widehat{\mathfrak{g}} = [\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}] \oplus (\mathcal{Z} \otimes \mathcal{A})$, где $\mathcal{Z}$ – центр алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, нам осталось лишь доказать инвариантность спаривания элемента $\tilde{d}$ с элементами пространства $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{A}$. Возьмем произвольный элемент этого пространства вида zA. Тогда $(zA, g\,\tilde{d}g^{-1}) = (zA, \tilde{d} + dg\cdot g^{-1}) = (zA, \tilde{d})$, так как $(zA, dg\cdot g^{-1}) = 0$ ввиду вырождения формы $(\cdot\,,\,\cdot)$ на $\mathcal{Z}$. С другой стороны и $(g^{-1}zAg, \tilde{d}) = (zA, \tilde{d})$ потому что g коммутирует с zA. Таким образом $(zA, g\,\tilde{d}g^{-1}) = (g^{-1}zAg, \tilde{d})$, что и требовалось.

Соотношение (2.9) показывает, что при трансформировании групповым элементом $\tilde{d}$ преобразуется как $-d$, где d – дифференциал. На этом основании (и в этом смысле) мы отождествим $\tilde{d}$ и $-d$:

$$\tilde{d} = -d. \tag{2.10}$$

Это вполне согласуется с леммой 2.3.

2.2. Коприсоединенные орбиты и проблема Римана–Гильберта. Ввиду соотношения (2.10) определение (2.3) коприсоединенного пространства будем с этого момента записывать в виде

$$\widehat{\mathfrak{g}}^* = \bar{\mathfrak{g}}^* \oplus \mathbb{C}d, \tag{2.11}$$

считая d обычным дифференциалом. Элементами этого пространства являются операторы вида $bd + \omega$ ($b \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Omega^1_{KN}(\Sigma^*, \mathfrak{g})$), действующие на сечения главного голоморфного G-расслоения на Σ^* и переводящие их в сечения расслоения, ассоциированного с данным с помощью коприсоединенного представления группы G. Проще говоря, пусть u – сечение главного G-расслоения. Тогда при каждом $P \in \Sigma^*$ $(bd+\omega)u_{|P} = b\,du_{|P} + \omega u_{|P}$ – корректно определенный элемент кокасательного пространства к G. Действительно, как $du_{|P}$, так и $\omega u_{|P}$ – элементы кокасательного пространства к G в точке $u(P)$.

Орбиты коприсоединенного действия. Как вытекает из результатов предыдущего раздела, коприсоединенное действие группы $\overline{G}$ на $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ может быть задано соотношением

$$g(bd+\omega)g^{-1} = bd + g\omega g^{-1} - b \cdot dg \cdot g^{-1}, \tag{2.12}$$

или, эквивалентно

$$b \mapsto b, \quad \omega \mapsto g\omega g^{-1} - b \cdot dg \cdot g^{-1}. \tag{2.13}$$

Как отмечалось выше, коприсоединенное действие не является групповым действием, так как 1-форма $g\omega g^{-1}$ вообще говоря не является формой Кричевера–Новикова. Тем не менее, вопрос о том, когда два элемента вида $bd+\omega$, где ω – 1-форма Кричевера–Новикова, сопряжены относительно коприсоединенного действия, является корректно поставленным.

Определение 2.5. Множество элементов вида $bd+\omega$, где ω – 1-форма Кричевера–Новикова, сопряженных относительно коприсоединенного действия группы $\overline{G}$, называется *коприсоединенной орбитой.*

Из (2.13) следует, что b является инвариантом коприсоединенного действия. Следующая очевидная лемма сводит задачу классификации орбит при произвольном $b \neq 0$ к задаче при $b = 1$.

Лемма 2.6. *Две 1-формы ω' и ω'' сопряжены относительно преобразования (2.13) тогда, и только тогда, когда ω'/b и ω''/b сопряжены относительно преобразования*

$$\omega \mapsto g\omega g^{-1} - dg \cdot g^{-1}.$$

Доказательство сводится к делению на b обеих частей соотношения

$$\omega'' = g\omega' g^{-1} - b \cdot dg \cdot g^{-1}.$$

В дальнейшем мы ограничиваемся классификацией орбит при $b = 1$. В этом случае задача сводится к задаче классификации связностей на римановой поверхности (с полюсами в точках $P_\pm$) с точностью до калибровочных преобразований. Мы пользуемся хорошо известным в дифференциальной геометрии описанием классов калибровочной эквивалентности связностей в терминах групп голономии. К классификации орбит аффинных алгебр Каца–Муди такой подход впервые применен И. Френкелем и Г. Сигалом [9], а для алгебр Кричевера–Новикова – автором [51], [53].

Представление монодромии. С элементом двойственного пространства $d + \omega$ свяжем *уравнение монодромии*

$$(d + \omega)u = 0, \tag{2.14}$$

где u – многозначная аналитическая функция на Σ^* со значениями в G (эквивалентно: сечение главного голоморфного G-расслоения на Σ^*).

Рассмотрим решение уравнения (2.14) с начальным условием

$$u(P_0) = 1.$$

Продолжим его вдоль любого замкнутого пути γ: $\gamma(0) = \gamma(1) = P_0$. Пусть $M_\gamma = u(\gamma(1))$. Для аналитического продолжения условие $(d + \omega)u = 0$ будет продолжать выполняться (теорема единственности для аналитических функций), то есть продолжение вдоль пути γ в окрестность точки P_0 приведет к решению того же уравнения с начальным условием M_γ. Обозначим это решение u_γ. Очевидно,

$$u_\gamma = uM_\gamma.$$

Матрица M_γ называется *матрицей монодромии* уравнения (2.14) вдоль пути γ, а соответствующий оператор в пространстве решений – *оператором монодромии.*

Если условиться, что произведение $\gamma_1\gamma_2$ означает, что путь γ_2 проходится первым, а γ_1 – вторым, то имеем

$$u_{\gamma_1\gamma_2} = (u_{\gamma_2})_{\gamma_1} = (uM_{\gamma_2})_{\gamma_1} = u_{\gamma_1}M_{\gamma_2} = uM_{\gamma_1}M_{\gamma_2},$$

то есть $\gamma \mapsto M_\gamma$ является гомоморфизмом группы петель, прикрепленных в точке P_0, в группу G.

Наконец, аналитическое продолжение зависит не от самого контура, а от его гомотопического класса. Поэтому нами доказано

Предложение 2.7. *Соответствие $\gamma \mapsto M_\gamma$ является гомоморфизмом $\pi_1(\Sigma^*, P_0) \mapsto G$.*

Этот гомоморфизм называется *представлением монодромии*, соответствующим элементу $d + \omega \in \widehat{\mathfrak{g}}^*$. Для пространства таких гомоморфизмов имеется стандартное обозначение $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma^*, P_0), G)$.

Два гомоморфизма $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma^*, P_0), G)$ назовем *эквивалентными*, если они отличаются на внутренний автоморфизм группы G, то есть существует элемент $g \in G$, такой что

$$\mu_1(\gamma) = g\mu_2(\gamma)g^{-1} \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \pi_1(\Sigma^*).$$

Пространство классов эквивалентных гомоморфизмов $\pi_1(\Sigma^*) \mapsto G$ получается как фактор-пространство $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma^*, P_0), G)$ по действию $\mu \mapsto g\mu g^{-1}$ и обозначается $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma^*, P_0), G)/G$.

Заметим, что другой выбор точки P_0 приводит к эквивалентному гомоморфизму. Поэтому, во-первых, мы пропускаем указание на P_0 в обозначении фундаментальной группы, а во-вторых получаем

Следствие 2.8. *Соответствие $\gamma \mapsto M_\gamma$ задает элемент пространства $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma^*, P_0), G)/G$, то есть класс эквивалентности представлений монодромии.*

Теорема 2.9. *Две связности калибровочно эквивалентны тогда, и только тогда, когда эквивалентны соответствующие представления монодромии.*

Доказательство. 1) Предположим, связности калибровочно эквивалентны, то есть $d + \omega_1 = g(d + \omega_2)g^{-1}$. Тогда любые два решения уравнений монодромии

$$(d + \omega_1)u = 0 \quad \text{и} \quad (d + \omega_2)u = 0$$

связаны соотношением $u_2 = g^{-1}u_1C$, где $C \in G$ – постоянный элемент (свой для каждой пары решений). Имеем: $(u_2)_\gamma =$

$g^{-1}(u_1)_\gamma C$, то есть $u_2 M^2_\gamma = g^{-1}u_1 M^1_\gamma C$. Сокращая слева на $u_2 = g^{-1}u_1 C$, получаем
$$M^2_\gamma = C^{-1}M^1_\gamma C,$$
то есть эквивалентность представлений монодромии M^1 и M^2.

2) Пусть представления монодромии эквивалентны, то есть существует $C \in G$, такое что для любого $\gamma \in \pi_1(\Sigma^*)$
$$M^2_\gamma = C^{-1}M^1_\gamma C. \tag{2.15}$$

Обозначим через u_1, u_2 фундаментальные решения соответствующих уравнений:
$$(d+\omega_1)u_1 = 0, \quad (d+\omega_2)u_2 = 0, \quad u_1(P_0) = u_2(P_0) = E,$$
где E – единичный оператор.

Положим $g = u_2 C^{-1}u_1^{-1}$. Тогда g – однозначная функция. Действительно, обозначим через g_γ результат продолжения функции g вдоль контура γ. Тогда
$$g_\gamma = (u_2)_\gamma C^{-1}(u_1)_\gamma^{-1} = u_2 M^2_\gamma C^{-1}(M^1_\gamma)^{-1}u_1^{-1} = u_2 C^{-1}u_1 = g.$$

Покажем, что
$$\omega_2 = g\omega_1 g^{-1} - dg\cdot g^{-1}. \tag{2.16}$$

Для этого просто подсчитаем правую часть. Из уравнений монодромии имеем $\omega_1 = -du_1\cdot u_1^{-1}$, $\omega_1 = -du_2\cdot u_2^{-1}$. Тогда
$$\begin{aligned} &g\omega_1 g^{-1} - dg\cdot g^{-1} = \\ &\quad = g(-du_1\cdot u_1^{-1})g^{-1} - dg\cdot g^{-1} = \\ &\quad = -u_2C^{-1}u_1^{-1}(-du_1\cdot u_1^{-1})u_1Cu_2^{-1} - d(u_2C^{-1}u_1^{-1})u_1Cu_2^{-1} = \\ &\quad = -u_2C^{-1}u_1^{-1}du_1\cdot Cu_2^{-1} - du_2\cdot u_2^{-1} + u_2C^{-1}u_1^{-1}du_1\cdot Cu_2^{-1} = \\ &\quad = -du_2\cdot u_2^{-1} = \omega_2. \end{aligned}$$

Соотношение (2.16) доказано, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 2.9 задает вложение
$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma^*), G)/G, \tag{2.17}$$
где $\mathcal{O}$ обозначает пространство орбит на уровне $b = 1$.

Завершение классификации коприсоединенных орбит требует ответа на вопрос каким представлениям монодромии отвечают мероморфные связности на римановой поверхности, голоморфные вне отмеченных точек. Этот вопрос является версией проблемы Римана–Гильберта. Насколько известно автору, ответа на него не существует. В частности, это связано с тем, что решение проблемы Римана–Гильберта на римановой поверхности положительного рода приводит к связностям с дополнительными полюсами, монодромии в которых тривиальны.

В заключение заметим, что доказательство теоремы 2.9 не изменится, если ограничиться связностями с регулярными особыми точками, и мероморфными калибровочными преобразованиями. Единственное, чем надо дополнить доказательство в этом случае – это замечанием, что во второй части доказательства теоремы 2.9 функция g оказывается мероморфной.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АФФИННЫХ АЛГЕБР КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА

Аффинные алгебры Кричевера–Новикова относятся к новому классу *почти градуированных* алгебр Ли (см. определение в разделе 1.4), структура и представления которых к настоящему моменту находятся в начальной стадии изучения. В то же время почти градуированность является важным понятием, позволяющим обобщить многие свойства хорошо изученного класса градуированных алгебр, важнейшим их которых является конструкция представлений, порожденых вакуумным вектором. Первые конструкции представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова (модулей Верма и неприводимых модулей) были предложены автором в [52], [54], [55], а для случая нескольких отмеченных точек – в [49] (эта конструкция представлена в разделе 3.6 настоящей главы). Эти конструкции носят абстрактно-алгебраический характер. Оставалась открытой задача нахождения таких геометрических объектов, на которых рассматриваемые алгебры действуют естественным образом. В работе автора [56] такой объект предъявлен: это тензорное произведение пространства сечений Кричевера–Новикова голоморфного векторного расслоения общего положения (см. ниже) на соответствующей римановой поверхности на пространство конечномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Отправляясь от этих пространств, мы строим представления, порожденные старшими векторами, с помощью известной конструкции бесконечного фермионного представления (клин-представления) [19], [7], [26], [27], [42], см. также, [18], [17]. Для этого нам необходим базис в пространстве сечений голоморфного векторного расслоения. Такие базисы были построены И. М. Кричевером и С. П. Новиковым в [32] на основе более ранних работ [30], [29] и результатов А. Н. Тюрина [65]. В разделе 3.2 мы излагаем конструкцию этих базисов, немного расширяя изложение работы [32].

Конструкция фермионных представлений является центральным результатом настоящей главы.

Появление расслоений в теории представлений алгебр Кричевера–Новикова является далеко не случайным фактом. В главе 2 показано, что орбита коприсоединенного представления аффинной алгебры задается классом эквивалентности неприводимых представлений фундаментальной группы проколотой римановой поверхности. Связь этих данных с голоморфными расслоениями на (компактных) римановых поверхностях хорошо известна и возникала в классификации Нарасимхана–Сешадри модулей стабильных расслоений на римановых поверхностях, у Делиня в контексте связи голоморфных расслоений и локальных систем, и в работах многих других авторов.

К идее о возможности конструкции представлений по алгебраическим кривым, исходя из других соображений, пришли И. М. Кричевер и С. П. Новиков в работе [32]. Квазиградуированная структура на алгебрах Кричевера–Новикова и их модулях позволяет рассматривать теорию представлений этих алгебр как раздел теории разностных операторов, где существенную роль играет теория коммутирующих разностных операторов, развитая в работах этих авторов [32], [31], [23] и непосредственно приводящая к голоморфным расслоениям на кривых. Фактически, связь с теорией солитонов имелась ими ввиду еще при написании работ [26], [27], [28]. Заметим, что глубокая связь между теорией представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова и теорией коммутативных колец разностных операторов проявляется, в частности, в доказательстве теоремы 3.10 настоящей главы.

3.1. Описание голоморфных расслоений в терминах параметров Тюрина. В первых разделах этой главы мы исследуем фермионные представления. Каждое фермионное представление аффинной алгебры Кричевера–Новикова связано с голоморфным векторным расслоением на римановой поверхности Σ. Поэтому начнем с рассмотрения голоморфного расслоения F ранга r и степени gr на Σ. По теореме Римана–Роха расслоение F имеет r голоморфных сечений $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$, которые образуют базис в слое над каждой точкой за исключением gr из них. В случае общего положения (который только и рассматривается здесь) эти точки являются попарно различными. Мы называем их *точками вырождения* и обозначаем $\gamma_1, \ldots, \gamma_{gr}$. Следуя терминологии [29], [30], назовем множество введенных сечений *оснащением*, а расслоение с заданным оснащением – *оснащенным.*

Задавшись локальной тривиализацией F, можно рассматривать сечения $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ как векторнозначные функции (скажем, столбцы). Из этих функций можно составить матрицу Ψ. Полученная матрица обратима везде, кроме точек γ_i, $i = 1, \ldots, gr$, в которых $\det\Psi$ имеет простые полюсы: $\det\Psi(\gamma_i) = 0$, $(\det\Psi)'(\gamma_i) \neq 0$.

Мы называем $D=\gamma_1+\dots+\gamma_{gr}$ *дивизором Тюрина* расслоения F. Наложим еще одно условие общности положения: $\operatorname{rank}\Psi(\gamma_i)=r-1$, $i=1,\dots,gr$. Тогда для каждого $i=1,\dots,gr$ существует единственное с точностью до пропорциональности нетривиальное решение системы линейных уравнений $\Psi(\gamma_i)\alpha_i=0$. Введем обозначение $\alpha_i=(\alpha_{ij})^{j=1,\dots,r}$ $(i=1,\dots,gr)$. Дивизор Тюрина расслоения и числа $(\alpha_{ij})^{j=1,\dots,r}_{i=1,\dots,gr}$ называются параметрами Тюрина расслоения F [29], [30]. Оснащение определено однозначно с точностью до действия группы $GL(r)$ на Ψ *правым* умножением, в противоположность функциям склейки, действующим *левым* умножением. Мы видим, что указанное действие $GL(r)$ перестановочно с действием функций склейки; таким образом, оно переводит сечения в сечения. Благодаря этому параметры Тюрина определены однозначно с точностью до пропорциональности и *левого* действия $GL(r)$. Подчеркнем, что эквивалентные оснащенные расслоения имеют *одно и то же* множество $\gamma_1,\dots,\gamma_{gr}$, в то время как для неоснащенных расслоений инвариантом является лишь *класс* дивизора. Согласно [65] параметры Тюрина определяют расслоение однозначно с точностью до эквивалентности.

В [29], [30] предлагается следующее описание пространства мероморфных сечений расслоения F в терминах его параметров Тюрина (рассматриваются только те мероморфные сечения, которые голоморфны вне точек $P_\pm$). В слое над произвольной точкой P вне носителя дивизора D элементы $\Psi_j(P)$ $(j=1,\dots,r)$ образуют базис. Следовательно, для каждого мероморфного сечения S его значение $S(P)$ можно выразить в терминах этого базиса. Таким образом, каждому сечению S можно сопоставить вектор-функцию $f=(f_1,\dots,f_r)^T$ на римановой поверхности Σ так, что вне носителя D

$$S(P)=\sum_{j=1}^{r}\Psi_j(P)f_j(P). \tag{3.1}$$

По формуле Крамера

$$f_j=\det(\Psi_1,\dots,\Psi_{j-1},S,\Psi_{j+1},\dots,\Psi_r)\,(\det\Psi)^{-1}.$$

Отсюда видно, что функции f_j можно продолжить в точки дивизора D. Там они будут иметь не более чем простые полюса, так как $\Psi_1,\dots,\Psi_r$ голоморфны в точках дивизора D а $\det\Psi$ имеет там простые нули. Ввиду (3.1) в локальных координатах в окрестности точки γ_i имеем $S(z) = \Psi(\gamma_i)(\mathrm{res}_{\gamma_i} f)z^{-1} + O(1)$. Левая часть последнего соотношения голоморфна. Следовательно, вычеты функций f_j, $j = 1, \ldots, r$ в точке γ_i удовлетворяют системе линейных уравнений $\Psi(\gamma_i)(\mathrm{res}_{\gamma_i} f) = 0$. Это в точности система, определяющая параметры Тюрина в точке γ_i. Согласно предположению, ранг матрицы $\Psi(\gamma_i)$ равен $r-1$. Следовательно, вектора $\mathrm{res}_{\gamma_i} f$ и α_i пропорциональны.

Предложение 3.1 [29], [30]. *Пространство мероморфных сечений расслоения F, голоморфных вне отмеченных точек $P_\pm$, изоморфно пространству мероморфных векторнозначных функций $f = (f_1, \ldots, f_r)^T$ (на той же римановой поверхности), голоморфных вне точек $P_\pm$ и дивизора D, имеющих не более чем простые полюса в точках D и удовлетворяющих условиям*

$$(\mathrm{res}_{\gamma_i} f_j)\,\alpha_{ik} = (\mathrm{res}_{\gamma_i} f_k)\,\alpha_{ij}, \quad i = 1, \ldots, gr, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Обозначим введенное только что пространство функций F_{KN}.

3.2. Базисы Кричевера–Новикова в сечениях голоморфных расслоений. Введем базис в F_{KN}, имея ввиду его использование при построении полубесконечных мономов на этом пространстве. Для каждой пары целых чисел n, j $(0 \leqslant j < r)$ построим вектор-функцию $\psi_{n,j} \in F_{KN}$. Число n называется *степенью* $\psi_{n,j}$. Функция $\psi_{n,j}$ определяется заданием ее асимптотического поведения в точках $P_\pm$. Рассмотрим $\psi_{n,j}$ как столбец и составим из этих столбцов матрицу Ψ_n. Потребуем

$$\Psi_n(z_+) = z_+^n \sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^+ z_+^s, \quad \xi_{n,0}^+ = \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

и

$$\Psi_n(z_-) = z_-^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^- z_-^s, \quad \xi_{n,0}^- = \begin{pmatrix} * & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где $z_\pm$ – локальная координата в точке $P_\pm$ и звездочки обозначают произвольные комплексные числа.

Так заданная матрица Ψ_n имеет нуль порядка n в одной из точек $P_\pm$ и полюс порядка n в другой. Ее детерминант имеет gr

простых полюсов в точках дивизора D и дополнительный (заранее не фиксированный) дивизор нулей вне вне точек $P_\pm$. Назовем $\{\psi_{n,j}\}$ *базисом Кричевера–Новикова* в F_{KN}.

Случай $r=1$ является исключительным и требует специального определения базиса Кричевера–Новикова.

Пример 2. Для случая алгебры $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ (состоящей из сечений одномерного тривиального расслоения) требования к базису Кричевера–Новикова, сформулированные в [26], таковы:

$$A_m = \alpha_m^\pm z_\pm^{\pm m+\varepsilon_\pm}(1+O(z_\pm)), \quad \alpha_m^\pm \in \mathbb{C}, \quad \alpha_m^+ = 1, \tag{3.4}$$

где $\varepsilon_+ = 0$ для любого $m \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_- = -g$ для $m > 0$ или $m < -g$, и $\varepsilon_- = -g-1$ для $-g \leqslant m \leqslant 0$. Для $m > 0$ и $m < -g$ сумма порядков в отмеченных точках равна $(-g)$ (напомним, что в нашем случае $r=1$). Следовательно, существует в точности g нулей (и не существует полюсов) вне $P_\pm$.

Предложение 3.2 [56].

1°. *Существует единственная матричнозначная функция* Ψ_n, *которая удовлетворяет условиям* (3.2), (3.3).

2°. *Размерность пространства, порожденного вектор-функциями* $\psi_{n,j}$ *(при фиксированном* n*) равна* r.

Алгебра $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ имеет естественное действие в пространстве F_{KN}, заключающееся в умножении элементов последнего на функции. Введем структурные константы этого действия посредством соотношений [56, Предложение 2.3]:

$$A_m\psi_{n,j} = \sum_{k=m+n}^{m+n+\bar{g}} \sum_{j'=0}^{r-1} C_{m,n,j}^{k,j'} \psi_{k,j'}, \tag{3.5}$$

где $\bar{g} = g+1$ при $-g \leqslant m \leqslant 0$ и $\bar{g} = g$ в остальных случаях. Это соотношение выражает тот факт, что $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$-модуль F_{KN} является *почти градуированным*, то есть k в (3.5) удовлетворяет ограничениям $|m+n-k| < const$, где $const$ не зависит от m, n.

Пусть τ – представление алгебры $\mathfrak{g}$ в линейном пространстве $\mathbb{C}^l$. Пусть $\tau(x) = (x_{i'}^i)$, где $x \in \mathfrak{g}$, $(x_{i'}^i) \in \mathfrak{gl}(l)$ – матрица, представляющая элемент x, а индексы i, i' пробегают $\{1,\ldots,l\}$. Каждому базисному элементу $\psi_{n,j}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $j = 0,\ldots,r-1$) сопоставим набор базисных элементов $\{\psi_{n,j}^i \colon i = 1,\ldots,l\}$ пространства

$F^{\tau}_{KN} = F_{KN} \otimes \mathbb{C}^l$. Определим действие алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ на F^{τ}_{KN}:

$$(xA_m)\psi^i_{n,j} = \sum_{k=m+n}^{m+n+\bar{g}} \sum_{j'=0}^{r-1} \sum_{i'=1}^{l} C^{k,j'}_{m,n,j} x^i_{i'} \psi^{i'}_{k,j'}. \tag{3.6}$$

Действие $\mathfrak{g}$ не меняет индексов n, j; и при данных индексах n, j, роль старшего вектора играет $\psi^l_{n,j}$. Из определений следует, что это действие почти градуировано.

3.3. Базисы в случае многих точек. В предыдущем разделе был построен базис в пространстве вектор-функций Кричевера–Новикова для случая двух отмеченных точек. Здесь мы обобщаем эту конструкцию на случай многих отмеченных точек. Этот результат получен в [61].

Для любой тройки целых чисел $n \in \mathbb{Z}$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$ и $p = 1, \ldots, N$, пусть $\psi_{n,j,p} = (\psi^i_{n,j,p})$ – вектор-функция из F_{KN} $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$. Эта функция однозначно определяется асимптотическим поведением в точках множества A:

$$\psi^i_{n,j,p}(z_q) = z_q^{n+1-\delta_{p,q}}(\xi^i_{npqj} + O(z_q)) \tag{3.7}$$

где z_q – локальная координата в точке P_q, $q \in \{1, \ldots, N\}$, $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера, ξ_{npqj} – комплексные числа, такие что $\xi^i_{nppi} = 1$, $\xi^i_{nppj} = 0$, $i > j$;

$$\psi^i_{n,j,p}(z_\infty) = z_\infty^{-nN-N+1}(\xi^i_{np\infty j} + O(z_\infty)) \tag{3.8}$$

где $\xi^i_{np\infty j} = 0$, $i < j$.

Для данного n пространство, натянутое на векторнозначные функции $\psi_{n,j,p}$, называется пространством функций степени n.

Предложение 3.3. 1. *Вектор-функция $\psi_{n,j,p}$, удовлетворяющая условиям* (3.7) *и* (3.8), *существует и единственна.*

2. *Для данного n размерность пространства, натянутого на вектор-функции $\psi_{n,j,p}$, равна rN.*

Доказательство. Расмотрим дивизор $D_{n,p} = D + nP_p + \Sigma_{q\neq p}(n+1)P_q + (-nN - N + 1)P_\infty$, для которого $\deg D_{n,p} = \deg D = -rg$. Пусть $(D_{n,p})$ пространство (скалярных) мероморфных функций с дивизором, не меньшим чем $D_{n,p}$, тогда $\dim(D_{n,p}) = rg - g + 1$. Для аналогичного пространства функций, но со значениями в r-мерном векторном пространстве (обозначим это пространство функций через $(D_{n,p})_r$), имеем $\dim (D_{n,p})_r = r(rg-g+1)$. Такие функции в F_{KN} удовлетворяют $(r-1)gr$ соотношениям Тюрина. Следовательно, $\dim\bigl((D_{n,p})_r \cap F_{KN}\bigr) = r(gr-g+1)-(r-1)gr = r$.

Заметим, что $\psi_{n,j,p} \in (D_{n,p})_r \cap F_{KN}$ для любого j. Для данного j эта функция выделяется в $(D_{n,p})_r$ в точности r условиями нормализации на матрицы ξ. Таким образом, $\psi_{n,j,p}$ определена однозначно и утверждение 1 доказано.

Далее, заметим, что, для данного n, пространство всех функций степени n в F_{KN} в точности равно прямой сумме своих подпространств $(D_{n,p})_r \cap F_{KN}$, $p=1,\dots,N$. Следовательно, его размерность равна rN.

3.4. Конструкция фермионных представлений. Для простоты мы будем вести изложение для случая двух отмеченных точек, то есть в обозначениях раздела 3.2. Занумеруем элементы $\psi^i_{n,j}$ в порядке лексикографического возрастания троек (n,j,i). Пусть $N = N(n,j,i)$ – номер тройки (n,j,i). Здесь n – произвольное целое, $j = 0,\dots,r-1$, $i=0,\dots,l-1$, следовательно

$$N = nrl + jl + i. \tag{3.9}$$

Введем следующее обозначение: $\psi_N = \psi^i_{n,j}$. В случае нескольких отмеченных точек, когда мы имеем базисные векторы $\psi^i_{n,j,p}$, можно считать, что ψ_N имеет дополнительный индекс p. Во всех случаях, когда надо упорядочивать по N, вместо этого следует лексикографически упорядочивать по (N,p), считая, что N старше, чем p. При этом соглашении дополнительный индекс не окажет влияния на дальнейшее изложение в пределах настоящей главы.

Введем фермионное представление, соответствующее F, τ, следующим образом. Пространство V_F представления порождено над $\mathbb{C}$ формальными выражениями (*полубесконечными мономами*) вида $\psi_{N_0} \wedge \psi_{N_1} \wedge \dots$, где $N_0 < N_1 < \dots$ и знак монома меняется при перестановке ψ_N и $\psi_{N'}$. Мы требуем, также, чтобы $N_k = k+m$ для достаточно больших k. Следуя [18], мы называем m *зарядом* монома.

Для монома ψ заряда m степень ψ определятся как

$$\deg\psi = \sum_{k=0}^{\infty}(N_k - k - m). \tag{3.10}$$

Заметим, что в нумерации элементов $\psi^i_{n,j}$ при фиксированном n имеется произвол; степень монома от этого произвола не зависит.

Введем представление $\pi_{F,\tau}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V_F. Согласно (3.6) каждый элемент алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ действует на элементы ψ_N линейными подстановками почти градуированным образом (считаем, что t действует как скалярный оператор). Кроме того, число элементов ψ_N фиксированной степени не зависит от этой степени. Это в точности означает, что если элементы ψ_N рассматривать как формальный базис бесконечномерного линейного пространства, то действие элемента алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ может быть задано в этом базисе бесконечной матрицей с лишь конечным числом ненулевых диагоналей. Следуя [17], мы обозначаем алгебру таких матриц $\mathfrak{a}_\infty$.

Замечание. Другими словами, $\mathfrak{a}_\infty$ – алгебра разностных операторов в 1-мерной решетке. Это замечание устанавливает связь с результатами работы [32].

Таким образом, выбор расслоения F определяет вложение алгебры $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$ в $\mathfrak{a}_\infty$. Так как $\mathfrak{a}_\infty$ обладает стандартным действием в V_F, мы получаем представление $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$ в V_F. Напомним [18], [56], что действие базисных элементов $E_{IJ}\in\mathfrak{a}_\infty$ на полубесконечные мономы $\psi=\psi_{I_0}\wedge\psi_{I_1}\wedge\dots$ определяется правилом Лейбница:

$$r(E_{IJ})\psi=(E_{IJ}\psi_{I_0})\wedge\psi_{I_1}\wedge\ldots+\psi_{I_0}\wedge(E_{IJ}\psi_{I_1})\wedge\ldots+\cdots. \tag{3.11}$$

Очевидно, действие $\mathfrak{a}_\infty$ сохраняет заряд монома, так как бесконечные “хвосты” мономов в правой и левой частях соотношения (3.11) одинаковы. Следовательно, фермионное пространство можно разложить в прямую сумму $\widehat{\mathfrak{g}}$-инвариантных подпространств, отвечающих всевозможным значениям заряда. Для $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(l)$ подпространство заряда m порождено мономом $|0\rangle=\psi_m\wedge\psi_{m+1}\wedge\cdots$ под действием универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Этот моном называется *вакуумным мономом*, или просто *вакуумом*, заряда m. Каждый вакуумный моном обладает следующим свойством: $\pi_{F,\tau}(xA)\,|0\rangle=0$ для $A\in\mathcal{A}_+$, а также для $A=1$ и любой строго верхнетреугольной матрицы $x\in\mathfrak{g}$.

Ввиду условия $I_k=k+m$ (при достаточно больших k) действие (3.11) корректно определено для $I\neq J$. Для $I=J$, правая часть (3.11) содержит бесконечно много членов. В этом случае применяется стандартная регуляризация [18], [56] : мы полагаем $\hat r(E_{IJ})=r(E_{IJ})-Id$ при $I=J>0$ и $\hat r(E_{IJ})=r(E_{IJ})$ во всех остальных случаях. Коммутационные соотношения между операторами $\hat{r}(E_{IJ})$ – те же, что и между соответствующими $r(E_{IJ})$ с точностью до возникновения дополнительных скалярных операторов в правых частях, то есть регуляризация приводит к проективному представлению $\pi_{F,\tau}$ алгебры $\mathfrak{a}_\infty$, и следовательно алгебры $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$. Для последней это почти градуированное представление, как следует из почти градуированности действия (3.6) в пространстве F_{KN}. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.4 В. Кац [18]. *Коцикл фермионного представления алгебры $\mathfrak{a}_\infty$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\begin{aligned}&\widehat{\gamma}(E_{IJ},E_{JI})=-\widehat{\gamma}(E_{JI},E_{IJ})=1, \textit{если } I\leqslant 0, J>0,\\ &\widehat{\gamma}(E_{IJ},E_{MN})=0 \textit{ во всех остальных случаях.}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Обратимся к вопросу о том, является ли фермионное представление $\pi_{F,\tau}$ представлением аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$. Пусть $\widehat{\gamma}$ – коцикл представления $\pi_{F,\tau}$. В терминах $\widehat{\gamma}$ поставленный вопрос – это вопрос о том, имеет ли данный коцикл форму (1.33) (с точностью до пропорциональности).

Теорема 3.5. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то коцикл фермионного представления пропорционален коциклу* (1.33).

В этом разделе мы докажем лишь следующую лемму, оставляя завершение доказательства теоремы до раздела 4.1.

Лемма 3.6. *Коцикл фермионного представления имеет вид*

$$\widehat{\gamma}(xA,yB)=\alpha(x,y)\,\gamma(A,B),\tag{3.13}$$

где γ – коцикл на алгебре Ли $\mathcal{A}$, α – симметрическая инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. В частности, при $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(l)$ $\alpha(x,y)=\mathrm{tr}(xy)$.

Доказательство. Пусть $e_{ij}\in\mathfrak{gl}(l)$ – матрица с единицей на (i,j)-ом месте и остальными нулями, E_{IJ} – аналогичный элемент в $\mathfrak{a}_\infty$. Ввиду громоздкости нижеследующих выражений нам будет удобнее обозначать его E^I_J, где I – индекс строки. Через $e_{ij}(A_m)$ будем обозначать оператор представления элемента $e_{ij}A_m$.

Из (3.6) следует, что

$$e_{ij}(A_m)\psi^j_{n,k}=\sum_{n'=m+n}^{m+n+\bar{g}}\sum_{k'=0}^{r-1}C^{n',k'}_{m,n,k}\psi^i_{n',k'},\tag{3.14}$$

и $e_{ij}(A_m)$ аннулирует $\psi^{j'}_{n,k}$ с $j \neq j'$.

Переходя от трехиндексной нумерации ψ к одноиндексной (3.9), запишем это в виде

$$e_{ij}(A_m)\psi_{nrl+kl+j} = \sum_{n'=m+n}^{m+n+\bar g} \sum_{k'=0}^{r-1} C^{n',k'}_{m,n,k} \psi_{n'rl+k'l+i}. \tag{3.15}$$

Последнее соотношение показывает, что $C^{n',k'}_{m,n,k}$ является матричным элементом оператора $e_{ij}(A_m)$, соответствующим строке $n'rl+k'l+i$ и столбцу $nrl+kl+j$. Поэтому это соотношение можно переписать в виде

$$e_{ij}(A_m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{n'=m+n}^{m+n+\bar g} \sum_{k'=0}^{r-1} C^{n',k'}_{m,n,k} E^{n'rl+k'l+i}_{nrl+kl+j}. \tag{3.16}$$

Для произвольной шестерки индексов i, $\bar i$, j, $\bar j$, m, $\overline{m}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\widehat{\gamma}(e_{ij}A_m, e_{\bar i\bar j}A_{\overline{m}}) = \\
&\quad = \sum_{n,\bar n\in\mathbb{Z}} \sum_{k,\bar k=0}^{r-1} \sum_{n'=m+n}^{m+n+\bar g} \sum_{\bar n'=\overline{m}+\bar n}^{\overline{m}+\bar n+\bar g} \sum_{k',\bar k'=0}^{r-1} C^{n',k'}_{m,n,k} C^{\bar n',\bar k'}_{\overline{m},\bar n,\bar k} \times \\
&\qquad \times \widehat{\gamma}(E^{n'rl+k'l+i}_{nrl+kl+j}, E^{\bar n'rl+\bar k'l+\bar i}_{\bar nrl+\bar kl+\bar j}).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Согласно лемме 3.4 значение коцикла в последней строчке соотношения (3.17) равно единице при совпадении верхнего индекса первого оператора с нижним индексом второго, и нижнего индекса первого оператора с верхним индексом второго (либо нулю). Поэтому

$$\widehat{\gamma}(E^{n'rl+k'l+i}_{nrl+kl+j}, E^{\bar n'rl+\bar k'l+\bar i}_{\bar nrl+\bar kl+\bar j}) = \delta_{i\bar j}\delta_{j\bar i}\delta_{n'\bar n}\delta_{n\bar n'}\delta_{k'\bar k}\delta_{k\bar k'}. \tag{3.18}$$

Подставляя найденное значение коцикла в соотношение (3.17) (и обозначая кратное сумирование в (3.17) одним символом $\sum$), получим

$$\widehat{\gamma}(e_{ij}A_m, e_{\bar i\bar j}A_{\overline{m}}) = \delta_{i\bar j}\delta_{j\bar i} \sum C^{n',k'}_{m,n,k} C^{\bar n',\bar k'}_{\overline{m},\bar n,\bar k} \delta_{n'\bar n}\delta_{n\bar n'}\delta_{k'\bar k}\delta_{k\bar k'} \tag{3.19}$$

(суммирование по всем повторяющимся индексам).

Заметим, что сумма в (3.19) зависит только от A_m и $A_{\overline{m}}$. Обозначим эту сумму через $\gamma(A_m, A_{\overline{m}})$. Множитель перед суммой равен $\mathrm{tr}(e_{ij}e_{\overline{i}\overline{j}})$. Таким образом

$$\widehat{\gamma}(e_{ij}A_m, e_{\overline{i}\overline{j}}A_{\overline{m}}) = \mathrm{tr}(e_{ij}e_{\overline{i}\overline{j}})\gamma(A_m, A_{\overline{m}}).$$

В силу билинейности для произвольных $x, y \in \mathfrak{gl}(l)$ получаем окончательно

$$\widehat{\gamma}(xA_m, yA_{\overline{m}}) = \mathrm{tr}(xy)\gamma(A_m, A_{\overline{m}}), \tag{3.20}$$

что доказывает утверждение для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$.

Если $\mathfrak{g}$ – произвольная редуктивная алгебра, и τ – ее представление в $\mathfrak{gl}(l)$, то фермионное представление строится как композиция τ и фермионного представления $\widehat{\mathfrak{gl}(l)}$. Поэтому коцикл равен

$$\widehat{\gamma}(\tau(x)A_m, \tau(y)A_{\overline{m}}) = \mathrm{tr}(\tau(x)\tau(y))\gamma(A_m, A_{\overline{m}}),$$

что совпадает с (3.13) при $\alpha(x, y) = \mathrm{tr}(\tau(x)\tau(y))$.

3.5. Классы эквивалентности фермионных представлений.

Определение 3.7. Два фермионных представления называются *сильно эквивалентными* (*сильно изоморфными*), если существует их изоморфизм как линейных пространств, коммутирующий с действием алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$, *квазиоднородный*, то есть переводящий однородные компоненты первого модуля в однородные компоненты второго, и такой, что образ любого старшего монома снова является старшим мономом того же заряда.

Теорема 3.8. *Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, ее фермионное представление π задается оснащенным голоморфным расслоением F и неприводимым представлением τ алгебры $\mathfrak{g}$, а фермионное представление π' – оснащенным голоморфным расслоением F' и неприводимым представлением τ'. Представления π и π' сильно эквивалентны тогда, и только тогда, когда эквивалентны соответствующие оснащенные расслоения F и F', а представления τ, τ' алгебры $\mathfrak{g}$ равны.*

Из данного ниже (стр. 52) доказательства теоремы 3.8 будет видно, что сильный изоморфизм фермионных представлений всегда индуцируется отображением вида $i \otimes \varepsilon$ пространства

$\mathbb{C}^l \otimes F^\tau_{KN}$ на себя, где i – тождественный автоморфизм представления τ, а ε – автоморфизм оснащенного расслоения. Тождественность i, фактически, обусловлена выбором базиса в пространстве представления τ при построении фермионного представления (стр. 45). Мы хотим избавиться от этого произвола. Введем более общее понятие эквивалентности фермионных представлений, нежели то, которое задано определением 3.7.

Определение 3.9. Два фермионных представления называются *эквивалентными* (*изоморфными*), если между пространствами представлений существует изоморфизм, индуцированный отображением вида $\alpha \otimes \varepsilon$ пространства $\mathbb{C}^l \otimes F^\tau_{KN}$ на себя, где α – произвольный автоморфизм представления τ, а ε – автоморфизм оснащенного расслоения.

Из этого определения и теоремы 3.8 немедленно получаем следующую теорему.

Теорема 3.10. *Два фермионных представления, первое из которых задается оснащенным голоморфным расслоением F и неприводимым представлением τ (алгебры $\mathfrak{g}$), а второе – оснащенным голоморфным расслоением F' и неприводимым представлением τ' эквивалентны тогда, и только тогда, когда F эквивалентно F', а τ эквивалентно τ'.*

Доказательство теоремы 3.8. Пусть расслоения F и F' эквивалентны и эквивалентность осуществляется отображением $C\colon F \to F'$. Очевидно, C индуцирует следующие изоморфизмы:

1) пространств глобальных голоморфных сечений, $H^0(\Sigma, F) \cong H^0(\Sigma, F')$. При этом матрицы Ψ и Ψ', составленные из базисных голоморфных сечений, переходят друг в друга: $\Psi' = C\Psi$;

2) пространств мероморфных вектор-функций Кричевера–Новикова, рассматриваемых как $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$-модули: $F_{KN} \cong F'_{KN}$, равно как и связанных с ними пространств F^τ_{KN}, F'^τ_{KN}.

Ввиду равенства представлений τ и τ' пространства F^τ_{KN} и F'^τ_{KN} изоморфны и как $\mathfrak{g}$-модули. Следовательно, соответствующие представления алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространствах полубесконечных форм над F^τ_{KN} и F'^τ_{KN} сильно эквивалентны.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Рассмотрим два сильно эквивалентных фермионных представления π и π' алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$, порожденные оснащенными расслоениями F и F', и неприводимыми представлениями τ и τ' соответственно в смысле приведенной выше конструкции. Пусть C – их сильный изоморфизм: $\pi' = C\pi C^{-1}$.

Пусть v – какой-либо старший моном в пространстве представления π и $v' = Cv$. Тогда в силу определения 3.7 v' – тоже старший моном. Наша ближайшая цель – доказательство эквивалентности представлений τ и τ'. С этой целью рассмотрим структуру старших мономов v и v'.

Пусть $v = \tilde{\psi}_M$. Тройка индексов (n, j, i), такая, что $M = N(n, j, i)$, определяется однозначно (см. выше). Введем для нее обозначения $n = n(M)$, $j = j(M)$, $i = i(M)$. Выберем v так, что $i = l$. Как отмечено в конце предыдущего параграфа, это равносильно тому, что ψ_M – старший вектор подпредставления, эквивалентного τ, действующего в пространстве F^{τ}_{KN}. Пусть $v' = \tilde{\psi}'_{M'}$ и, соответственно, $n' = n(M')$, $j' = j(M')$, $i' = i(M')$. По определению квазиоднородный изоморфизм сохраняет заряд, поэтому $M = M'$. Следовательно, $i = i' = l$, то есть $\psi'_{M'}$ – старший вектор подпредставления, эквивалентного τ'.

Итак, ψ_M и $\psi'_{M'}$ – соответственно старшие векторы представлений τ, τ'. Структура монома $v = \tilde{\psi}_M$, следовательно, такова: на первом месте стоит старший вектор ψ_M представления τ, а справа от него – бесконечное внешнее произведение элементов ψ_N, которое может быть разбито на последовательно стоящие группы (назовем их пакетами), каждая из которых есть внешнее произведение (всех) базисных элементов представления τ. Из этого немедленно следует, что для произвольного $x \in \mathfrak{g}$

$$\pi(x)v = \big(\tau(x)\psi_M\big) \wedge \psi_{M+1} \wedge \dots . \tag{3.21}$$

Действительно, если $\tau(x)$ – нильпотентный элемент, то остальные члены (возникающие при действии $\pi(x)$ на v по формуле Лейбница) равны 0. Если же $\tau(x)$ – диагональный элемент, то их сумма аннулируется для каждого пакета ввиду того, что сумма весов (с учетом их кратности) конечномерного представления полупростой алгебры Ли равна 0 (для неприводимых представлений $sl(2)$ это очевидно, а все остальные случаи сводятся к этому путем разложения на неприводимые представления простых трехмерных подалгебр, отвечающих простым корням. В случае редуктивных алгебр эта аргументация не прошла бы для центрального элемента). Аналогичное рассмотрение показывает, что

$$\pi'(x)v' = \big(\tau'(x)\psi'_{M'}\big) \wedge \psi'_{M'+1} \wedge \dots . \tag{3.22}$$

Пусть $x = h$ – картановский элемент, α_τ, $\alpha_{\tau'}$ – старшие веса представлений τ, τ' соответственно. Тогда из (3.21), (3.22) следует, что $\pi(h)v = \alpha_\tau(h)v$, а $\pi'(h)v' = \alpha_{\tau'}(h)v'$. Ввиду эквивалентности π и π' имеем $\alpha_\tau = \alpha_{\tau'}$. Следовательно, τ и τ' эквивалентны.

В пространствах F^τ_{KN} и V_F действует алгебра $\mathfrak{g}$, и, следовательно, ее универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$. Там действует, также, ассоциативная алгебра $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ и тензорное произведение $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$. При этом представление алгебры $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ по построению распадается в произведение представлений алгебр $U(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$: если $u \otimes A \in U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$, то $\pi(u \otimes A) = \tau(u)\pi(A)$. Мы хотим показать, что из эквивалентности представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ следует эквивалентность соответствующих представлений алгебры $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$. Пусть $u = u^{i_1\dots i_n} e_{i_1} \dots e_{i_n} \in U(\mathfrak{g})$ (по верхним и нижним индексам предполагается суммирование). Рассмотрим, также, элемент $u' = u^{i_1\dots i_n} e_{i_1} \dots (e_{i_n} A)$, где в каждом мономе функция A отнесена к последнему сомножителю. Тогда $\pi(u') = \tau(u)\pi(A)$. Для эквивалентного представления π' алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ имеем $\pi' = C\pi C^{-1}$, где C – сплетающий оператор, и, следовательно,

$$\tau'(u)\pi'(A) = C(\tau(u)\pi(A))C^{-1}. \tag{3.23}$$

Пусть $Z(\mathfrak{g})$ – центр кольца $U(\mathfrak{g})$. Тогда в силу неприводимости представлений τ, τ' кольцо $Z(\mathfrak{g})$ действует на F^τ_{KN} и F'^τ_{KN} скалярными операторами. Для $u \in Z(\mathfrak{g})$ пусть $\tau(u) = \lambda_u \circ \mathrm{id}$, $\tau'(u) = \lambda'_u \circ \mathrm{id}$. При этом так как $\tau \cong \tau'$, то $\lambda_u = \lambda'_u$. Теперь из (3.23), сокращая на λ_u (что можно сделать хотя бы при одном u), получим $\pi'(A) = C\pi(A)C^{-1}$, что и требовалось.

Покажем, что эквивалентны представления кольца $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ в пространствах F_{KN} и F'_{KN}. Для этого рассмотрим действие элемента $A_n \in \mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ на мономы вида $\psi_{N,M} = \psi_N \wedge \psi_{M+1}\psi_{M+2}\dots$. Если $M - N$ велико по сравнению с n, то среди структурных констант действия A_n на $\psi_{N,M}$ содержатся структурные константы действия A_n на ψ_N. Таким образом по первому действию второе восстанавливается. Пусть, как обычно, $N = N(n, j, i)$. Структурные константы действия A_m на $\psi^i_{n,j}$ не зависят от i и совпадают со структурными константами действия A_m на $\psi_{n,j}$, что видно из сравнения 3.5 и (3.6). Таким образом мы получили требуемую эквивалентность F_{KN} и F'_{KN} как $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$-модулей. В работе [32] показано, что в этом случае оснащенные расслоения F и F' эквивалентны.

Вернемся к представлениям τ, τ'. Выше показано, что они эквивалентны, то есть существует элемент $\gamma \in GL(l)$, такой, что $\tau' = \gamma\tau\gamma^{-1}$. Если матрица γ не была бы скалярной, она “смешивала” бы однородные компоненты $\psi'^{\,i}_{n,j}$ по индексу i. Таким образом изоморфизм C не был бы квазиоднородным, что противоречит предположению. Следовательно γ принадлежит центру $GL(l)$ и поэтому $\tau = \tau'$. Это завершает доказательство.

3.6. Модули Верма аффинных алгебр. Фермионные представления – не единственный построенный к настоящему времени класс представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова. Здесь мы дадим конструкцию еще одного класса представлений, введенного нами в [49], зависящего от меньшего числа параметров, чем фермионные представления, но также нашедшего свое применение в конформной теории поля [49]. В случае двух отмеченных точек эти представления сводятся к обычным модулям Верма.

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая конечномерная алгебра Ли. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}_0 \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ – линейное подпространство элементов степени 0, то есть $\bar{\mathfrak{g}}_0 = \bigoplus_{p=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes A_{0,p}$. Пусть $\widehat{\mathfrak{g}}_+ = \bar{\mathfrak{g}}_+ \subset \bar{\mathfrak{g}}$ – подалгебра Ли элементов положительной степени, Z – одномерное подпространство в $\widehat{\mathfrak{g}}$, порожденное центральным элементом t. Степень t была положена равной 0, следовательно, $\widehat{\mathfrak{g}}_0 = \bar{\mathfrak{g}}_0 \oplus Z$. Напомним, что из леммы 1.3 вытекает, что $\mathfrak{g} \subset \widehat{\mathfrak{g}}_0$ (как подалгебра Ли).

Лемма 3.11. *Прямая сумма $\widehat{\mathfrak{g}}'_+ := \widehat{\mathfrak{g}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+$ является подалгеброй Ли алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$.*

Доказательство. Напомним (см. предложение 1.2), что $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$ – (ассоциативная) подалгебра функций, регулярных во всех точках P_i, $1, \dots, N$. Отсюда и следует утверждение.

Выберем и зафиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, соответствующую борелевскую подалгебру $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ и соответствующую верхнюю нильпотентную подалгебру $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$. Пусть $\overline{\mathfrak{b}}_0 = \bigoplus_{p=1}^{N} \mathfrak{b} \otimes A_{0,p} \subseteq \bar{\mathfrak{g}}_0$. Из доказательства леммы 3.12 (см. ниже) следует, что $\hat{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{b}}_0 \oplus Z \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_+$ – подалгебра Ли алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Рассмотим ее как аналог борелевской подалгебры в $\widehat{\mathfrak{g}}$ и, как в стандартной конструкции модулей Верма, определим ее одномерное представление. Пусть $V = \mathbb{C}v$ – одномерное пространство с базисным элементом v, $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ – набор весов (линейных функционалов на $\mathfrak{h}$) и $\delta \in \mathbb{C}$. Определим отображение $\tau_{\lambda,\delta} \colon \hat{\mathfrak{b}} \to \mathrm{End}(V)$

следующими соотношениями. Положим

$$\tau_{\lambda,\delta}|_{\widehat{\mathfrak{g}}_+} = 0, \quad \tau_{\lambda,\delta}(t) = \delta \cdot \mathrm{Id}\,. \tag{3.24}$$

Для $h \in \mathfrak{h}$, $n \in \mathfrak{n}$ и произвольного $p = 1, \ldots, N$ положим

$$(hA_{0,p})v = \lambda_p(h)v, \quad (nA_{0,p})v = 0. \tag{3.25}$$

Лемма 3.12. *Отображение $\tau_{\lambda,\delta}$ является представлением алгебры Ли $\hat{\mathfrak{b}}$.*

Доказательство. Следующие соотношения являются частными случаями соотношений предложения 1.2:

$$\begin{aligned} &A_{0,p}A_{0,p} = A_{0,p} + B_p, \qquad B_p \in \mathcal{A}_+, \\ &A_{0,p}A_{0,q} = B_{p,q}, \qquad B_{p,q} \in \mathcal{A}_+, \quad q \neq p. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Коцикл, определяющий центральное расширение, обращается в ноль на $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$. Отсюда вытекает, в частности, что $\hat{\mathfrak{b}}$ является подалгеброй Ли, и $[\hat{\mathfrak{b}}, \hat{\mathfrak{b}}] \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}_+$. Поэтому согласно (3.24) $\tau_{\lambda,\delta}([\hat{\mathfrak{b}}, \hat{\mathfrak{b}}]) = 0$. В то же время ввиду одномерности V все операторы представления $\hat{\mathfrak{b}}$ в нем коммутируют.

Определение 3.13. Линейное пространство

$$\widehat{V}_{\lambda,\delta} := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\hat{\mathfrak{b}})} V \tag{3.27}$$

с естественной структурой $\widehat{\mathfrak{g}}$-модуля называется модулем Верма алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$, соответствующим набору данных (λ, δ). Как всегда $U(\cdot)$ обозначает универсальную обертывающую алгебру соответствующей алгебры Ли. $U(\hat{\mathfrak{b}})$ действует на V с помощью представления $\tau_{\lambda,\delta}$. Набор λ называется *весом*, комплексное число δ – *уровнем*, а вектор $v_{\lambda,\delta} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ – *вектором старшего веса* модуля $V_{\lambda,\delta}$.

Как и в обычной теории, модуль Верма определяется своими старшим весом и уровнем однозначно с точностью до эквивалентности.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБР ТИПА ВИРАСОРО

4.1. Фермионные представления. В этом разделе в пространстве фермионов, построенном в предыдущей главе, мы определим проективное представление алгебры Ли $\mathcal{L}$, и даже более того – алгебры Ли $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ [56], [58], [61].

Как и в предыдущей главе, рассмотрим риманову поверхность Σ, и на ней голоморфное расслоение F ранга r и степени $g \cdot r$ (g – род римановой поверхности Σ). Пусть $\Gamma(F)$ обозначает пространство мероморфных сечений расслоения F, голоморфных вне точек $P_1, \ldots, P_N, P_\infty$. Пусть τ – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V_τ. Положим $\Gamma_{F,\tau} := \Gamma(F) \otimes V_\tau$.

В этих обозначениях $\bar{\mathfrak{g}}$-действие на $\Gamma_{F,\tau}$, заданное формулой (3.6), выглядит следующим образом:

$$(x \otimes A)(s \otimes v) = (A \cdot s) \otimes \tau(x)v \tag{4.1}$$

для всех $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$, $s \in \Gamma(F)$, $v \in V_\tau$.

Чтобы определить на $\Gamma(F)$ действие $\mathcal{L}$ выберем на F мероморфную (следовательно, плоскую) связность ∇, имеющую логарифмические особенности в $P_1, \ldots, P_N$ и P_∞. Ввиду плоскостности имеем $\nabla_{[e,f]} = [\nabla_e, \nabla_f]$ для любых $e, f \in \mathcal{L}$. Следовательно, ∇ определяет представление алгебры $\mathcal{L}$ в $\Gamma(F)$.

По определению связности, для любых $s \in \Gamma(F)$, $e \in \mathcal{L}$ и $A \in \mathcal{A}$ имеем $\nabla_e(As) = (eA)s + A\nabla_e s$, где eA обозначает производную функции A вдоль векторного поля e. Следовательно, $[\nabla_e, A] = eA$, то есть отображение $e + A \to \nabla_e + A$ дает представление алгебры $\mathcal{D}^1$ в пространстве $\Gamma(F)$.

Определим соответствующее действие алгебры $\mathcal{L}$ на $\Gamma_{F,\tau}$:

$$e(s \otimes v) = \nabla_e s \otimes v \quad \text{для любых} \quad e \in \mathcal{L}, \quad s \in \Gamma(F), \quad v \in V_\tau. \tag{4.2}$$

Можно непосредственно проверить, что (4.1) и (4.2) задают представление алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ в пространстве $\Gamma_{F,\tau}$.

Лемма 4.1 [61]. *По отношению к индексу M модуль $\Gamma_{F,\tau}$ является почти градуированным $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$-модулем.*

Доказательство. Мы действуем в обозначениях раздела 3.4. Воспользуемся определением базисных векторных полей (раздел 1.3). Для $n \neq 0$ порядок $e_m \psi_{n,j}$ равен $n+m$ в P_+ и $-n-m-3g$ в P_-; для $n = 0$ эти порядки равны $n+m$ и $-n-m-3g$

соответственно. Следовательно, для некоторых констант $D^{k,j'}_{m,n,j}$ выполняются следующие условия:

$$e_m\psi^i_{n,j} = \sum_{k=m+n+\varepsilon}^{m+n+3g+\varepsilon}\sum_{j'=0}^{l-1} D^{k,j'}_{m,n,j}\psi^i_{k,j'}, \tag{4.3}$$

где $\varepsilon = 0$ при $n \neq 0$ и $\varepsilon = 1$ при $n = 0$.

Ввиду почти градуированности построение действия векторных полей в пространстве фермионного представления ничем не отличается от построения действия функций (раздел 3.4), поэтому нет необходимости повторять его здесь.

Отметим следующее технически полезное утверждение. Пусть $\mathcal{L}^{(2)}_+ \subset \mathcal{L}$ – подалгебра, состоящая из элементов, обращающихся в ноль в точке P_+ как минимум со вторым порядком.

Лемма 4.2. *Элементы подалгебры $\mathcal{L}^{(2)}_+$ аннулируют вакуумные векторы фермионных представлений.*

Доказательство. По определению (см. раздел 1.3) $e_m \in \mathcal{L}^{(2)}_+$ тогда, и только тогда, когда $m \geqslant 1$. В этом случае, согласно (4.3), действие векторного поля e увеличивает значение индекса n: $k > n$ для всех $\psi^i_{k,j'}$, которые встречаются в правой части соотношения (4.3). Но так как вакуумный моном содержит $\psi^i_{n,j}$, он также содержит справа от него *все* $\psi^i_{k,j'}$, $k > n$. Поэтому e_m аннулирует вакуум.

Пусть V – пространство фермионного представления. Совместное действие $\mathcal{L}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ превращает его в проективный модуль над алгеброй $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ – полупрямой суммой алгебр $\mathcal{L}$ и $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$. Коцикл этого проективного модуля локален по тем же очевидным причинам, что и в разделе 3.4.

Мы возвращаемся сейчас к доказательству теоремы 3.5. Напомним, она утверждает, что *если $\mathfrak{g}$ проста, то коцикл фермионного представления алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид*

$$\widehat{\gamma}(xA, yB) = \lambda\cdot(x,y)\,\mathrm{res}_{P_+} AdB, \tag{4.4}$$

где (x,y) – форма Киллинга, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство теоремы 3.5. Согласно лемме 3.6

$$\widehat{\gamma}(xA, yB) = \alpha(x,y)\,\gamma(A,B), \tag{4.5}$$

где α – симметрическая инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$, γ – коцикл на $\mathcal{A}$. Поскольку $\mathfrak{g}$ проста, сразу получаем $\alpha(x,y) = \lambda_1 \cdot (x,y)$, где $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq 0$.

Поскольку действие алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ в пространстве V является ограничением действия алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$, коцикл $\widehat{\gamma}$ является ограничением некоторого коцикла на $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$. За последним мы сохраним то же самое обозначение $\widehat{\gamma}$.

Запишем определение коцикла для тройки элементов e, xA, yB:

$$\widehat{\gamma}(e,[xA,yB]) + \widehat{\gamma}(yB,[e,xA]) + \widehat{\gamma}(xA,[yB,e]) = 0. \tag{4.6}$$

Пусть x, y принадлежат одной и той же картановской подалгебре, то есть коммутируют, и $(x,y) \neq 0$. Тогда $[xA,yB] = 0$ (коммутатор берется в $\bar{\mathfrak{g}}$), и (4.6) совместно с (4.5) дают

$$(y,x)\gamma(B,eA) - (x,y)\gamma(A,eB) = 0. \tag{4.7}$$

Сокращая на (x,y), получаем

$$\gamma(B,eA) = \gamma(A,eB), \tag{4.8}$$

то есть $\mathcal{L}$ – инвариантность коцикла γ (ср. с (1.28)). По теореме 1.7(a) $\gamma(A,B) = \lambda_2 \operatorname{res}_{P_+} AdB$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

4.2. Представление Сугавары. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная редуктивная алгебра Ли. Зафиксируем невырожденную инвариантную симметрическую билинейную форму α на $\mathfrak{g}$. Пусть $\widehat{\mathfrak{g}}$ – соответствующая аффинная алгебра Ли (зависящая от билинейной формы α), введенная в разделе 1.6 (соотношения (1.32) и (1.33)).

Представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ называется *допустимым*, если любой элемент пространства представления аннулируются всеми элементами алгебры достаточно большой степени.

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ – коммутативная или простая, то для каждого допустимого представления алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ не критического уровня (то есть уровня, отличного от числа, противоположного дуальному числу Коксетера в простом случае, или отличного от нуля в коммутативном случае) конструкция Сугавары дает проективное представление алгебры $\mathcal{L}$ векторных полей Кричевера–Новикова. Это представление называется *представлением Сугавары*. Для двухточечного случая коммутативная версия данной конструкции предложена в [27]. Некоммутативный случай впервые рассмотрен в физической литературе [4] и, независимо, хотя и позднее, в нашей работе [48]. В [48] была также дана многоточечная версия конструкции. Следует отметить, что работа [4] содержит неполные и даже неверные доказательства. Например, вывод формулы (37) работы [4] опирается на гипотезу (даже не на утверждение!) о единственности локального коцикла, но в рассматриваемом в этом месте случае коммутативной алгебры, как показано в [46], [47], эта гипотеза неверна. Можно отметить, что работа [4] не содержит ссылок на процедуру усечения В. Каца (см. ниже стр. 70), что стало возможным только потому, что большие куски доказательств в ней опущены вовсе. Наша работа [48] использует другие методы доказательства, что позволило избежать подобных ошибок.

В случае произвольной комплексной редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ представление Сугавары определяется как некоторая линейная комбинация представлений Сугавары, соответствующих ее простым идеалам (теорема 4.8).

Переходя к изложению конструкции Сугавары, предположим, что V – произвольное допустимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ уровня c. Для любых $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$ обозначим через $u(A)$ оператор в V, соответствующий элементу $u \otimes A$. Мы, также, обозначаем элемент вида $u(A_{n,p})$ через $u(n,p)$. Выберем базис u_i, $i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, алгебры $\mathfrak{g}$ и двойственный к нему базис u^i, $i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, по отношению к форме α. *Элемент Казимира* $\Omega^0 = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} u_i u^i$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ не зависит от выбора базиса. Чтобы упростить обозначения, мы пишем $u(n,p)u(m,q)$ вместо $\sum_i u_i(n,p)u^i(m,q)$.

Введем *оператор Сугавары*, также называемый *тензором энергии-импульса*:

$$T(P) := \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_{p,s} {:}u(n,p)u(m,s){:}\, \omega^{n,p}(P)\omega^{m,s}(P). \tag{4.9}$$

С помощью $: \, :$ мы обозначаем некоторое нормальное упорядочение. В этом разделе индексы суммирования n, m пробегают $\mathbb{Z}$, а p, s – множество $\{1, \dots, N\}$. Точная форма нормального упорядочения здесь не важна. Как пример, мы можем взять следующее “стандартное нормальное упорядочение” $(x, y \in \mathfrak{g})$

$$ {:}x(n,p)y(m,r){:} \; = \begin{cases} x(n,p)y(m,r), & n \leqslant m, \\ y(m,r)x(n,p), & n > m. \end{cases} \tag{4.10}$$

Выражение $T = T(P)$ можно рассматривать как формальный ряд квадратичных дифференциалов с операторнозначными коэффициентами. Раскладывая его по базису $\Omega^{k,r}$ квадратичных дифференциалов, получим

$$T = \sum_k \sum_r L_{k,r} \cdot \Omega^{k,r}, \tag{4.11}$$

где

$$\begin{gathered} L_{k,r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_S} T \cdot e_{k,r} = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_{p,s} {:}u(n,p)u(m,s){:}\, l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)}, \\ l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_S} \omega^{n,p} \omega^{m,s} e_{k,r}. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Формально операторы $L_{k,r}$ являются бесконечными двойными суммами. Однако, для данных k и m коэффициент $l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)}$ оказывается ненулевым только для конечного множества значений n. Это можно проверить с помощью рассмотрения вычетов подынтегральных выражений. После применения остающейся бесконечной суммы к некоторому фиксированному элементу $v \in V$ ввиду нормального упорядочения и допустимости представления получаем лишь конечное число операторов, нетривиально действующих на данный элемент.

Центральным результатом в конструкции Сугавары являются две нижеследующие теоремы.

Теорема 4.3 [48]. *Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная коммутативная или простая алгебра Ли, 2κ – собственное значение ее оператора Казимира в присоединенном представлении, V – допустимый почти градуированный $\widehat{\mathfrak{g}}$-модуль уровня c. Если $c + \kappa \neq 0$, то нормализованные “моды”*

$$L_{k,r}^{*} = \frac{-1}{2(c+\kappa)} \sum_{n,m} \sum_{p,s} {:}u(n,p)u(m,s){:}\, l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)}, \tag{4.13}$$

оператора Сугавары являются коректно определенными операторами на V и определяют допустимое проективное представление алгебры $\mathcal{L}$ с коциклом

$$\chi(e,f) = \frac{c \cdot \dim \mathfrak{g}}{c+\kappa} \cdot \frac{1}{24\pi i} \int_{C_S} \left(\frac{1}{2}(e'''f - ef''') - R \cdot (e'f - ef') \right) dz, \tag{4.14}$$

где R – подходящая мероморфная проективная связность с полюсами лишь в точках $P_\pm$, причем $\operatorname{ord}_{P_+} R \geqslant -1$, $\operatorname{ord}_{P_-} R \geqslant -2$.

Замечание. И уровень c, и собственное значение k казимира зависят от нормировки билинейной формы α (первый обратно пропорционально, а второе – обратно пропорционально квадратному корню). Применяют стандартную нормировку, при которой длинные корни имеют квадрат нормы 2 ([18, замечание 10.2]). При этом k называется *дуальным числом Коксетера*. Для нас нормировка α не имеет значения.

Теорема 4.4 [48]. *Имеют место следующие коммутационные соотношения*:

$$[L_{k,r}, x(m,s)] = -(c+\kappa)\, x(e_{k,r}A_{m,s}),$$

где eA – производная функции A в направлении векторного поля e.

Доказательству теорем 4.3, 4.4 посвящен нижеследующий раздел 4.3. Здесь мы продолжим установление основных свойств операторов Сугавары.

Предложение 4.5. *Операторы Сугавары действуют на V почти градуированным образом.*

Доказательство. Мы должны показать, что существуют постоянные M_1, M_2 такие, что для каждого фиксированного однородного элемента $\psi_s \in V$ степени s и каждого k имеем

$$k + s + M_1 \leqslant \deg(L^*_{k,r}\psi_s) \leqslant k + s + M_2. \tag{4.15}$$

Рассмотрим коэффициенты $l^{(n,p)(m,s)}_{(k,r)}$ в (4.13), заданные интегралами (4.12). Интеграл может быть ненулевым только если подынтегральное выражение имеет полюсы в точках множества I и в точке P_∞. Воспользовавшись явными формулами (1.8) и (1.9) для порядков в этих точках, получим

$$k \leqslant n + m \leqslant k + C(g,N), \tag{4.16}$$

с рациональной константой $C(g,N) \geqslant 0$, зависящей от рода g и числа отмеченных точек N. Ввиду почти градуированности V как $\widehat{\mathfrak{g}}$-модуля, существуют константы c_1 и c_2, такие что для всех m, r, s

$$m + s + c_1 \leqslant \deg(u(m,r)\psi_s) \leqslant m + s + c_2, \tag{4.17}$$

если $u(m,r)\psi_s \neq 0$. Следовательно,

$$n+m+s+2c_1 \leqslant \deg(\,{:}u(n,p)u(m,r){:}\,\psi_s) \leqslant n+m+s+2c_2, \quad (4.18)$$

если ${:}u(n,p)u(m,r){:}\,\psi_s \neq 0$. Используя (4.16), мы получим соотношение (4.15), если положим $M_1 = 2c_1$ и $M_2 = 2c_2 + C(g,N)$.

Для $e = \sum_{n,p} a_{n,p}e_{n,p} \in \mathcal{L}$ $(a_{n,p} \in \mathbb{C})$ положим $T(e) = \sum_{n,p} a_{n,p}L^*_{n,p}$. Тогда $T(e) \in \operatorname{End} V$. Ввиду двойственности Кричевера–Новикова оператор Сугавары $T(e)$, соответствующий векторному полю $e \in \mathcal{L}$, может быть эквивалентно определен как

$$T(e) = \frac{-1}{c+\kappa} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_S} T(P)e(P). \quad (4.19)$$

Суммируя утверждения теорем 4.3, 4.4 и предложения 4.5, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Пусть $\mathfrak{g}$ – коммутативная или простая алгебра Ли. Отображение алгебры Ли $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ в $\operatorname{End}(V)$, задаваемое формулами $e \to T(e)$, $uA \to u(A)$, является почти градуированным проективным представлением алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ с нулевым смешивающим коциклом. В частности, выполняются соотношения*

(i) $[T(e), T(f)] = T([e,f]) + \chi(e,f)$, *где χ – коцикл на $\mathcal{L}$, заданный соотношением* (4.14);

(ii) $[T(e), u(A)] {=} u(eA)$.

Проективное представление T алгебры $\mathcal{L}$ называется *представлением Сугавары*, соответствующим данному допустимому представлению u алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Теорема 4.6 обобщается на случай редуктивных алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли, имеющая разложение (1.37). Элементы $x \in \mathfrak{g}$ можно представить в виде $x = \sum_{i=0}^{n} x_i$, где $x_i \in \mathfrak{g}_i$.

Лемма 4.7 ([47], лемма 3.11). *Для произвольного коцикла γ на $\bar{\mathfrak{g}}$ и любых $A, B \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathfrak{g}$*

$$\gamma(x_iA, y_jB) = 0 \quad \textit{для} \quad i \neq j$$

(для y предполагается такое же разложение как выше для x).

Доказательство. По определению коцикла имеем для любых $x, z \in \mathfrak{g}_i$, $y \in \mathfrak{g}_j$

$$\gamma([xA, yB], z) + \gamma([z, xA], yB) + \gamma([yB, z], xA) = 0.$$

Ввиду соотношения $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ первое и третье слагаемые обращаются в ноль. Соотношение, таким образом, дает $\gamma([z, x]A, yB) = 0$. Ввиду простоты алгебры Ли $\mathfrak{g}_i$ имеем $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$. Поэтому для любых $x_i \in \mathfrak{g}_i$, $y_j \in \mathfrak{g}_j$ можно взять $[z, x] = x_j$, $y = y_j$, что и доказывает наше утверждение.

Из леммы 4.7 следует

$$\gamma(xA, yB) = \sum_{i=0}^{M} \gamma(x_i A, y_i B). \tag{4.20}$$

Если дано допустимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространстве V, получим представления ее идеалов $\widehat{\mathfrak{g}}_i$ в том же пространстве. Для них мы можем определить (нормированные) операторы Сугавары $T_i(e)$, $i = 0, 1, \ldots, M$. Мы полагаем по определению

$$T(e) = \sum_{i=0}^{M} T_i(e). \tag{4.21}$$

Теорема 4.8. *Утверждения теоремы 4.6 остаются в силе, если $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли. При этом коцикл представления T равен сумме коциклов представлений T_i, $i = 0, 1, \ldots, M$.*

Доказательство. Для $x, y \in \mathfrak{g}$ обозначим через x_i и y_j их компоненты, как и выше. Тогда $[x_i(A), y_j(B)] = [x_i, y_j](AB) + \gamma(x_i A, y_j B) \cdot \mathrm{id}$. При $i \neq j$ элементы x_i и y_j коммутируют, а коцикл обращается в ноль. Следовательно, элементы $x_i(A)$, $y_j(B)$ коммутируют в $\widehat{\mathfrak{g}}$. Пусть T_k – представление Сугавары, соответствующее представлению $\widehat{\mathfrak{g}}_k$ в V. Так как операторы представления T_i выражены через операторы $x_i(A)$, а операторы T_j – через $x_j(A)$, представления T_i и T_j при $i \neq j$ коммутируют. Следовательно

$$\left[\sum_{i=0}^{M} T_i(e), \sum_{j=0}^{M} T_j(f) \right] = \sum_{i=0}^{M} [T_i(e), T_i(f)] \,.$$

Отсюда следует как утверждение о том, что T – проективное представление, так и утверждение теоремы насчет коцикла.

Докажем, теперь для редуктивной алгебры утверждение (ii) теоремы 4.6. Для $x_i \in \mathfrak{g}_i$, $A \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{L}$, как и выше, имеем $[T_j(e), x_i(A)] = 0$. По теореме 4.6

$$[T_k(e), x_k(A)] = x_k(eA), \qquad k = 0, 1, \ldots, M.$$

Отсюда имеем

$$[T(e), x(A)] = \left[\sum_{k=0}^{M} T_k(e), \sum_{i=0}^{M} x_i(A)\right] = \sum_{i=0}^{M} x_i(eA) = x(eA).$$

В частном случае, когда представление V алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ порождено вакуумным вектором, нам будет полезно следующее утверждение. Мы формулируем его в случае двух отмеченных точек, то есть индекс p входящей точки в обозначении базисных элементов и соответствующих операторов Сугавары отсутствует. Рассмотрим случай двух отмеченных точек. Пусть $\mathcal{L}_+^{(2)} \subset \mathcal{L}$ – подалгебра Ли векторных полей, обращающихся в ноль в точке P_+ с порядком не менее двух.

Лемма 4.9. *Операторы Сугавары элементов подалгебры $\mathcal{L}_+^{(2)}$ аннулируют вакуумный вектор представления алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$, по которому они построены.*

Доказательство. По определению $e_k \in \mathcal{L}_+^{(2)}$ тогда и только тогда, когда $k \geqslant 1$. Рассмотрим операторы Сугавары L_k для $k \geqslant 1$. Мы хотим показать, что если $l_k^{mn} \neq 0$, то либо $m \geqslant 1$, либо $n \geqslant 1$. Если это верно, то принимая во внимание нормальное упорядочение, на втором месте в произведении $:u(m)u(n):$ стоит оператор представления подалгебры $\widehat{\mathfrak{g}}_+$. Следовательно, это произведение аннулирует вакуум.

Рассмотрим выражение l_k^{mn} в (4.12). Согласно разделу 1.3

$$\operatorname{ord}_{P_+} \omega^m = -m-1, \qquad \operatorname{ord}_{P_+} \omega^n = -n-1, \qquad \operatorname{ord}_{P_+} e_k = k+1.$$

Таким образом, $\operatorname{ord}_{P_+} \omega^m\omega^n e_k = -m-n+k-1$. Чтобы вычет 1-формы $\omega^m\omega^n e_k$ в точке P_+ был ненулевым, эта 1-форма обязана по крайней мере иметь полюс в P_+. Следовательно, $-m-n+k-1 \leqslant -1$. Отсюда следует, что $m+n \geqslant k \geqslant 1$ и, следовательно, либо $m > 0$, либо $n > 0$. При этом оператор $:u(n)u(m):$, стоящий при l_k^{mn} в первом из соотношений (4.12), аннулирует вакуум.

4.3. Доказательство основных теорем о конструкции Сугавары. Для упрощения обозначений мы даем доказательства для случая двух отмеченных точек на римановой поверхности. При этом исчезает индекс отмеченной точки. Добавление этого индекса ничего не меняет в ходе доказательств.

Основные теоремы в форме соотношений со структурными константами. Следующее предложение является переформулировкрй теоремы 4.4 через структурные константы, и является ключевым в конструкции.

Предложение 4.10. *Пусть $\mathfrak{g}$ – простая или коммутативная алгебра Ли. Тогда*

$$[L_k, x(r)] = -(c+\kappa)\sum_v K^v_{r,k} x(v), \tag{4.22}$$

где

$$K^v_{r,k} := \frac{1}{2\pi i}\oint_C \omega^v(Q) e_k(Q) dA_r(Q) = \sum_m l_k^{vm}\gamma_{mr}, \tag{4.23}$$

$$\gamma_{mr} := \gamma(A_m, A_r) := \frac{1}{2\pi i}\oint_C A_m(Q) dA_r(Q). \tag{4.24}$$

Результат не зависит от нормального упорядочения.

Заметим, что все имеющиеся здесь суммы на самом деле являются конечными и потому имеют смысл. Последнее предложение в классическом случае сводится к тому, что $[L_k, x(r)] = -(c+\kappa) r\, x(r+k)$ (см. [18, предложение 10.1]). Мы отложим полное доказательство до следующего параграфа. Здесь мы хотим показать соотношение (4.23). Введем *дельта-распределение* [26]

$$\Delta(Q', Q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(Q')\omega^m(Q).$$

Это формальный ряд, однако его свертка (в смысле интегрирования по разделяющему контуру) с любым базисным элементом Кричевера–Новикова подходящего тензорного веса имеет смысл, причем

$$\int_{C_\tau} \Delta(Q', Q) A_m(Q) = A_m(Q'), \qquad \int_{C_\tau} \Delta(Q', Q)\omega^n(Q') = \omega^n(Q).$$

Доказательство соотношения (4.23). Применяя дельта-распределение, мы получим

$$\sum_m l_k^{vm}\gamma_{mr} = \sum_m \frac{1}{2\pi i}\oint_C \omega^v(Q)\omega^m(Q) e_k(Q) \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\tau'}} A_m(Q') dA_r(Q') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau \, C_{\tau'}} \omega^v(Q) e_k(Q) dA_r(Q') \Delta(Q', Q) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\tau'}} \omega^v(Q') e_k(Q') dA_r(Q') = K^v_{r,k}.$$

Предложение 4.11. $[L_k, x(r)] = -(c+\kappa)\, x(\nabla_{e_k} A_r)$.

Доказательство. В локальных координатах мы можем записать $\nabla_{e_k} A_r$ как $e_k(z)\frac{dA_r(z)}{dz}$, следовательно

$$(\nabla_{e_k} A_r)(Q) = e_k(Q) dA_r(Q) = \sum_v \beta^v_{r,k} A_v(Q).$$

В силу дуальности для коэффициентов $\beta^v_{r,k}$ имеем

$$\beta^v_{r,k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e_k(Q) dA_r(Q) \omega^v(Q) = K^v_{r,k}.$$

Следовательно утверждение вытекает из предложения 4.10.

Предложение 4.12. *Операторы* $L_k \in \mathfrak{gl}(V)$ *и* $\mathrm{id} \in \mathfrak{gl}(V)$ *образуют подалгебру Ли в* $\mathfrak{gl}(V)$ *с коммутационным соотношением*

$$[L_k, L_l] = -(c+\kappa) \sum_n C^n_{kl} L_n - \frac{1}{2} c(c+\kappa) \dim \mathfrak{g} \cdot \chi_{kl} \cdot \mathrm{id}, \qquad (4.25)$$

где C^n_{kl} *– структурные константы алгебры векторных полей* $\mathcal{L}$ *и*

$$\chi_{kl} = \psi_{kl} + \widehat{\chi}_{kl}, \qquad \psi_{kl} = \sum_{s,v} \sum_{n=0}^{v+1} C^s_{kl} l^{nv}_s \gamma_{nv} = \sum_v \sum_{n=0}^{v+1} E^{nv}_{kl} \gamma_{nv}, \qquad (4.26)$$

$$E^{nv}_{kl} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C [e_k, e_l] \cdot \omega^n \omega^v, \qquad \widehat{\chi}_{kl} = \left(\sum_{\substack{n>0 \\ v\leqslant 0}} - \sum_{\substack{n\leqslant 0 \\ v>0}} \right) K^n_{v,k} K^v_{n,l}. \qquad (4.27)$$

Величины χ_{kl} *могут быть отличными от нуля только при* $-6g \leqslant k+l \leqslant 0$. *Другое нормальное упорядочение изменило бы область суммирования* n *и* v *в определении* ψ_{kl} *и, следовательно, изменило бы* χ_{kl}. *На верхнем пределе мы получим*

$$\chi_{k,-k} = -\frac{1}{6}(k^3 - k). \qquad (4.28)$$

Доказательство этого предложения мы также откладываем до раздела 4.3, а здесь выведем из него теорему 4.3. Для этого нам понадобится еще следующая простая лемма.

Лемма 4.13 ([27], соотношение (3.14)). *Пусть χ_R – коцикл вида* (1.29), *R – мероморфная проективная связность с полюсами в точках $P_\pm$.*

(a) *условие $\chi_R(e_k, e_l) = 0$ для $k+l > 0$ и $k+l < -6g$ эквивалентно тому, что полюсы R имеют порядок не более двух.*

(b) *Пусть $R(z_+) = \alpha_+ z_+^{-2}(1 + O(z_+))$ – локальный вид проективной связности в точке P_+, тогда*

$$\chi_R(e_k, e_{-k}) = \frac{1}{12}(k^3 - k - 2\alpha_+ k).$$

Доказательство сводится к подсчету вычетов.

Доказательство теоремы 4.3. Если $c+\kappa \neq 0$, можно взять нормированные элементы $L_k^* = \frac{-1}{c+\kappa} L_k$ и получить

$$[L_k^*, L_l^*] = \sum_n C_{kl}^n L_n^* - \frac{c}{2(c+\kappa)} \dim \mathfrak{g} \cdot \chi_{kl} \cdot \mathrm{id}\,. \tag{4.29}$$

Из тождества Якоби в $\mathfrak{gl}(V)$ вытекает, что χ_{kl} определяет 2-коцикл χ для алгебры Ли $\mathcal{L}$. Следовательно мы получили проективное представление алгебры $\mathcal{L}$. Согласно предложению 4.12 коцикл χ_{kl} локален. Покажем, что он, также, когомологически нетривиален (отличен от кограницы).

Всякая 2-кограница по определению имеет вид $\Phi([e, f])$, где $e, f \in \mathcal{L}$, а Φ – линейная функция на $\mathcal{L}$. Ввиду соотношений двойственности (1.7) и обозначений (1.11) базисные квадратичные дифференциалы Ω^n образуют двойственный базис для базиса векторных полей e_m (для простоты обозначений мы рассматриваем двухточечный случай), следовательно любая линейная функция является их линейной комбинацией, то есть задается с помощью некоторого квадратичного дифференциала Ω (возможно, имеющего бесконечное разложение по базису) по формуле

$$\Phi(e) = \mathrm{res}_{P_+} \Omega e. \tag{4.30}$$

Предположим, что коцикл χ_{kl} имеет такую форму. Тогда для пары векторных полей e_k, e_{-k} получаем

$$\chi_{k,-k} = \mathrm{res}_{P_+} w(E_k' E_{-k} - E_k E_{-k}'), \tag{4.31}$$

где $\Omega = wdz^2$, $e_k = E_k\partial_z$, $e_{-k} = E_{-k}\partial_z$ – выражения соответствующих объектов в локальных координатах в окрестности точки P_+. Поскольку $E_k = z^{k+1}\partial_z$, $E_{-k} = z^{-k+1}\partial_z$ и $E'_kE_{-k} - E_kE'_{-k} = 2kz$. Это означало бы, что вычет в (4.31) линейно зависит от k, что противоречит соотношению (4.28) предложения 4.12, где зависимость кубическая.

По теореме 1.7 все локальные когомологически нетривиальные коциклы кратны геометрическим коциклам (1.29) с подходящими проективными связностями R. Из предложения 4.12 и леммы 4.13 заключаем, что для коцикла χ связность R имеет полюса не выше второго порядка в отмеченных точках. Сопоставление (4.28) и утверждения (b) леммы 4.13 позволяет найти нормировочную константу (равную -2).

Сопоставляя все сказанное, получаем теорему 4.3.

Замечание. Выражения ψ_{kl} в (4.26) определяют кограницу в смысле когомологий алгебр Ли. Определим линейную функцию $\Phi\colon \mathcal{L} \to \mathbb{C}$, полагая $\Phi(e_s) := \sum_v \sum_{n=0}^{v+1} l_s^{nv}\gamma_{nv}$ (эта сумма конечна), тогда

$$\psi_{kl} = \Phi\left(\sum_s C^s_{k,l}e_s\right) = \Phi([e_k, e_l]).$$

И здесь другое нормальное упорядочение привело бы к другой области суммирования в вышеприведенном определении Φ. Этим мы снова показали, не опираясь на классификацию локальных коциклов, что разные нормальные упорядочения не меняют класса когомологий центрального расширения.

Завершение доказательства основных теорем. Прежде всего докажем следующую лемму (суммирование по повторяющимся индексам не предполагается).

Лемма 4.14. *Пусть, как и выше, $\{u_i\}$ и $\{u^i\}$ – пара двойственных базисов в $\mathfrak{g}$, $\Omega^0 = u_iu^i$ – элемент Казимира. Тогда*

(1) $[\Omega^0, \mathfrak{g}] = 0$;

(2) $\sum_i [u_i, u^i] = 0$;

(3) $\sum_i [u_iA_n, u^iA_m] = -\dim\mathfrak{g}\cdot\gamma(A_n, A_m)\cdot t$;

(4) *Если $\mathfrak{g}$ – коммутативная или простая алгебра Ли, то существует константа κ, такая, что $\sum_i \mathrm{ad}_{u_i}\circ\mathrm{ad}_{u^i} = 2\kappa$.*

Доказательство. (1), (2) и (4) – стандартные факты [18]. Чтобы показать (3), берем определение коммутатора в центральном расширении

$$[u_i A_n, u^i A_m] = [u_i, u^i](A_n A_m) - \gamma(A_n, A_m) \cdot (u_i | u^i) \cdot t.$$

После суммирования по i первое слагаемое пропадет в силу (2) и мы получим требуемый результат.

Теперь введем еще одно техническое средство. В определении операторов L_k содержатся формальные бесконечные суммы операторов. Для того, чтобы придать им смысл мы, как это сделано в книге Каца и Райна [18], используем *процедуру усечения*. Пусть ψ – функция на $\mathbb{R}$ заданная следующим образом:

$$\psi(x) = 1, \quad \text{если} \quad |x| \leqslant 1, \quad \text{и} \quad \psi(x) = 0, \quad \text{если} \quad |x| > 1. \tag{4.32}$$

Для $\epsilon \in \mathbb{R}$ определим

$$L_k(\epsilon) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_i :u_i(n) u^i(m): l_k^{nm} \psi(\epsilon n). \tag{4.33}$$

Зафиксируем k. Для любого n имеется только конечное число значений m таких, что $l_k^{nm} \neq 0$. Следовательно для $\epsilon > 0$ сумма состоит лишь из конечного числа слагаемых. Если $v \in V$, то благодаря нормальному упорядочению лишь конечное число операторов $l_k^{nm} :u_i(n) u^i(m):$ будет действовать на v нетривиально. Значит, если мы выберем $\epsilon > 0$ достаточно малым, то получим $L_k(\epsilon) v = L_k v$. Именно это мы будем иметь ввиду, когда пишем $\lim_{\epsilon \to 0} L_k(\epsilon) = L_k$.

Если мы отбросим в (4.33) символ нормального упорядочения, то получим выражение $\widetilde{L}_k(\epsilon)$, которое корректно определено, коль скоро $\epsilon \neq 0$. Для любой пары (n, m), которая не находится в нормальном порядке, рассмотрим коммутатор $\sum_i [u_i(n), u_i(m)]$, который является скаляром по лемме 4.14 (3), следовательно $L_k(\epsilon) = \widetilde{L}_k(\epsilon) + \alpha \cdot t$, где α является скаляром коль скоро $\epsilon \neq 0$. В частности, если мы вычисляем коммутаторы, мы можем забыть о нормальном упорядочении, пока $\epsilon \neq 0$.

Доказательство предложения 4.10. По определению

$$R_\epsilon := 2\,[\widetilde{L}_k(\epsilon), x(r)\,] = \sum_{n,m} \sum_i [u_i(n) u^i(m), x(r)]\, l_k^{nm} \psi(\epsilon n) =$$

$$= \sum_{n,m} \sum_i \big(u_i(n)[u^i(m), x(r)] + [u_i(n), x(r)]u^i(m)\big) l_k^{nm} \psi(\epsilon n),$$

что получается после раскрытия коммутаторов и переупорядочивания членов. Затем каждый коммутатор может быть записан в виде

$$[u^i(m), x(r)] = [u^i, x](A_m A_r) - (u^i|x)\gamma_{mr} \cdot c$$

(заметим, что $t.v = c \cdot v$). Следовательно, мы получаем $R_\epsilon = A_\epsilon + B_\epsilon - (C_\epsilon + D_\epsilon)$, где

$$A_\epsilon = \sum_{n,m} \sum_i u_i(n)[u^i, x](A_m A_r) l_k^{nm} \psi(\epsilon n),$$

$$B_\epsilon = \sum_{n,m} \sum_i [u_i, x](A_n A_r) u^i(m) l_k^{nm} \psi(\epsilon n),$$

$$C_\epsilon = \sum_{n,m} \sum_i u_i(n)(u^i|x)\gamma_{mr} l_k^{nm} c\psi(\epsilon n),$$

$$D_\epsilon = \sum_{n,m} \sum_i (u_i|x) u^i(m)\gamma_{nr} l_k^{nm} c\psi(\epsilon n).$$

Теперь, используя соотношение

$$\sum_i u_i \otimes A_n (u^i|x) = \left(\sum_i (u^i|x) u_i \right) \otimes A_n = x \otimes A_n = x(n),$$

приходим к $C_\epsilon = \sum_{n,m} x(n)\gamma_{mr} l_k^{nm} c\psi(\epsilon n)$, и $D_\epsilon = \sum_{n,m} x(m) \times \gamma_{nr} l_k^{nm} c\psi(\epsilon n)$. Встречается только конечное число членов с фиксированными r и k. Следовательно, в пределе получаем

$$\lim_{\epsilon \to 0} (C_\epsilon + D_\epsilon) = 2\,c \cdot \sum_n \left(\sum_m l_k^{nm} \gamma_{mr} \right) x(n) = 2\,c \sum_n K_{r,k}^n x(n). \tag{4.34}$$

Здесь мы воспользовались (4.23). Суммы A_ϵ и B_ϵ для $\epsilon \to 0$ по отдельности не имеют смысла. Мы можем придать им смысл, перейдя к нормальному упорядочению. Для этого нужно подставить $A_m A_r = \sum_s \alpha_{mr}^s A_s$ с $\alpha_{mr}^s = \frac{1}{2\pi i} \oint_C A_m A_r \omega^s$. Мы получим

$$A_\epsilon = \sum_{n,m,s} \sum_i u_i(n)[u^i, x](s) \alpha_{mr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n),$$

$$B_\epsilon = \sum_{n,m,s} \sum_i [u_i, x](s) u^i(m) \alpha_{nr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n).$$

Для элементов, которые не находятся в нормальном порядке, мы должны ввести коммутатор. Мы пишем $A_\epsilon = A_\epsilon^{(1)} + A_\epsilon^{(2)}$ и $B_\epsilon = B_\epsilon^{(1)} + B_\epsilon^{(2)}$, где $A_\epsilon^{(1)}$ соответственно. $B_\epsilon^{(1)}$ – те же выражения, но со значками нормального упорядочения. Мы можем переписать коммутатор

$$[u_i(n), [u^i, x](s)] = [u_i, [u^i, x]](A_n A_s) - \gamma_{ns}(u_i|[u^i, x])c.$$

Если просуммировать по i, второй член пропадет, так как $(u_i|[u^i, x]) = ([u_i, u^i]|x)$, и по лемме 4.14 (2). Лемма 4.14 (4) дает для первого члена $2\kappa \cdot x(A_n A_s) = 2\kappa \sum_v \alpha_{ns}^v x(v)$. Применяя те же рассуждения к $B_\epsilon^{(2)}$, получаем

$$A_\epsilon^{(2)} + B_\epsilon^{(2)} = 2\kappa \sum_v \Bigg(\sum_{s,m} \sum_{n>s} \alpha_{ns}^v \alpha_{mr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n) - \\ - \sum_{n,m} \sum_{s>m} \alpha_{sm}^v \alpha_{nr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n) \Bigg) x(v). \tag{4.35}$$

Заметим, что ни одна из сумм не имела бы смысла сама по себе при $\epsilon = 0$. Прежде чем продолжать рассмотрение (4.35), покажем, что $A_0^{(1)} + B_0^{(1)}$ равно нулю. Для начала заменим переменные в сумме для $B_\epsilon^{(1)}$ следующим образом: $s \to n \to m \to s$. Благодаря нормальному упорядочению $A_0^{(1)}$ и $B_0^{(1)}$ – корректно определенные операторы в том смысле, что будучи применены к определенному $v \in V$, дадут в результате только конечное число ненулевых членов. Следовательно, мы можем забыть о множителе ψ.

Введем константы

$$F_{r,k}^{sn} := \sum_m \alpha_{mr}^s l_k^{nm} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C A_r(Q) \omega^s(Q) \omega^n(Q) e_k(Q).$$

Лемма 4.15. *Константы $F_{r,k}^{sn}$ симметричны по верхним индексам: $F_{r,k}^{sn} = F_{r,k}^{ns}$.*

Доказательство. Имеем

$$F_{r,k}^{sn} = \sum_m \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau\, C_{\tau'}} A_m(Q) A_r(Q) \omega^s(Q) \omega^n(Q') \omega^m(Q') e_k(Q') = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau\, C_{\tau'}} A_r(Q) \omega^s(Q) \omega^n(Q') e_k(Q') \Delta(Q, Q') =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C A_r(Q)\omega^s(Q)\omega^n(Q)e_k(Q).$$

Последнее выражение очевидным образом симметрично по n и s.

Далее

$$A_0^{(1)} + B_0^{(1)} = \sum_{n,s} \sum_i \left(:u_i(n)[u^i, x](s) + [u_i, x](n)u^i(s): \right) F_{r,k}^{sn}.$$

Лемма 4.16. $\sum_i \left(:u_i(n)[u^i, x](s) + [u_i, x](n)u^i(s): \right) = 0.$

Доказательство. Просто вычислим

$$\begin{aligned}\sum_i u_i(n)[u^i, x](s) &= \sum_i u_i(n) \sum_j ([u^i, x]|u_j)u^j(s) = \\ &= -\sum_{i,j} u_i(n)(u^i|[u_j, x])u^j(s) = \\ &= -\sum_j [u_j, x](n)u^j(s).\end{aligned}$$

Следовательно $A_0^{(1)} + B_0^{(1)} = 0$. Вернемся снова к (4.35).

Предложение 4.17. *Слагаемые суммы по v в пределе $\epsilon \to 0$ совпадают с величинами*

$$E_\epsilon^{(N)} := \sum_{m,s} \sum_{n>N} \alpha_{ns}^v \alpha_{mr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n) - \sum_{n,m} \sum_{s>N} \alpha_{sm}^v \alpha_{nr}^s, l_k^{nm} \psi(\epsilon n), \tag{4.36}$$

взятыми в том же пределе, где N – произвольное целое число.

Доказательство. Если вычислить разность, получим[1]

$$\sum_{m,s} \sum_{n=s+1}^{N} \alpha_{ns}^v \alpha_{mr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n) - \sum_{n,m} \sum_{s=m+1}^{N} \alpha_{sm}^v \alpha_{nr}^s l_k^{nm} \psi(\epsilon n). \tag{4.37}$$

Заметим, что благодаря почти–градуировке в каждой сумме для фиксированных v, k, r встречается лишь конечное число членов. Следовательно, мы можем забыть о $\psi(\epsilon n)$ и сделать во второй сумме замену переменных $(s \to n \to m \to s)$. Применяя лемму 4.15, мы убеждаемся, что разность равна нулю.

[1]Если верхняя граница меньше нижней, мы предполагаем, что меняется порядок суммирования и знаки входящих в него выражений. Это соглашение распространяется на все суммирования, которые могут встретиться ниже.

Это доказательство, также, показывает, что наш результат не зависит от выбора нормального упорядочения. Разность снова будет состоять из конечного числа членов, которые сократятся.

Изучим выражение

$$E_{\epsilon}^{(0)} = \sum_{s} \sum_{n>0} \alpha_{ns}^{v} F_{r,k}^{sn} \psi(\epsilon n) - \sum_{n} \sum_{s>0} \alpha_{nr}^{s} F_{s,k}^{vn} \psi(\epsilon n). \tag{4.38}$$

Заменим порядок во второй сумме следующим образом: $(n, s > 0) = (s, n > 0) + (n > 0, s \leqslant 0) - (s > 0, n \leqslant 0)$, получим

$$\begin{aligned} E_{\epsilon}^{(0)} = \sum_{n>0} \sum_{s} \left(\alpha_{ns}^{v} F_{r,k}^{sn} - \alpha_{nr}^{s} F_{s,k}^{vn}\right) \psi(\epsilon n) + \\ + \left(\sum_{\substack{n>0 \\ s\leqslant 0}} - \sum_{\substack{s>0 \\ s\leqslant 0}} \right) \alpha_{nr}^{s} F_{s,k}^{vn} \psi(\epsilon n). \end{aligned} \tag{4.39}$$

После суммирования по s в первой сумме и использования дельта-распределения, мы увидим, что она обращается в ноль. Используя интегральные представления для $F_{s,k}^{vn}$ (стр. 72), и для α_{nr}^{s} (стр. 71) вторую сумму можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau\, C_{\tau'}} A_r(Q') e_k(Q) \omega^v(Q) \times \\ \times \left(\sum_{\substack{n>0 \\ s\leqslant 0}} A_n(Q') A_s(Q) \omega^s(Q') \omega^n(Q) \psi(\epsilon n) - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{s>0 \\ n\leqslant 0}} A_n(Q') A_s(Q) \omega^s(Q') \omega^n(Q) \psi(\epsilon n) \right). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Теперь мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4.18 [4]. *Для любого N справедливо соотношение*

$$\left(\sum_{n>N} \sum_{s\leqslant N} - \sum_{s>N} \sum_{n\leqslant N} \right) A_n(Q') A_s(Q) \omega^s(Q') \omega^n(Q) = d' \Delta(Q', Q). \tag{4.41}$$

Здесь d' обозначает дифференцирование по переменной Q'.

Для полноты мы приведем ниже доказательство этой леммы. Пока же, применяя ее, имеем

$$
\begin{aligned}
E_0^{(0)} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau\, C_{\tau'}} A_r(Q')e_k(Q)\omega^v(Q) d'\Delta(Q',Q) = \\
&= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_\tau\, C_{\tau'}} d' A_r(Q')e_k(Q)\omega^v(Q)\Delta(Q',Q) = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dA_r(Q)e_k(Q)\omega^v(Q) = -K^v_{r,k}.
\end{aligned}
$$

Если собрать все не обращающиеся в ноль члены, мы в точности получим утверждение предложения 4.10.

Доказательство леммы 4.18. Сначала докажем следующее соотношение.

Лемма 4.19. *Выполнено равенство*

$$
\gamma_{rk} = \left(\sum_{n>0} \sum_{s\leqslant 0} - \sum_{s>0} \sum_{n\leqslant 0} \right) \alpha^s_{rn} \alpha^n_{ks}. \tag{4.42}
$$

Доказательство. В [4] выдвинута идея использования для доказательства представлений в полубесконечных формах. Мы берем здесь полубесконечные формы на пространстве $\mathcal{A}$. Возьмем вакуумный вектор $\Phi = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots$. Элемент $A_i \in \mathcal{A}$ действует по правилу Лейбница следующим образом

$$
A_i\Phi = (A_i \cdot A_1) \wedge A_2 \wedge \cdots + A_1 \wedge (A_i \cdot A_2) \wedge A_3 \cdots + \cdots . \tag{4.43}
$$

Если $|i|$ достаточно велико, это имеет смысл. Для некоторой критической полосы индексов (в том числе и для $A_0 = 1$) действие должно быть регуляризовано, и мы получаем представление центрального расширения $\widehat{\mathcal{A}}'$, где определяющий коцикл локален (глава 3). Поскольку $\mathcal{A}$ является коммутативной алгеброй Ли, два различных коцикла никогда не когомологичны. Как показано на стр. 58, коцикл фермионного представления алгебры Ли $\mathcal{A}$ всегда $\mathcal{L}$-инвариантен, поэтому по теореме 1.7 он кратен стандартному коциклу $\gamma(A,B) = \operatorname{res}_{P_+} A\,dB$. Следовательно, $[A_r, A_k]\Phi = d \cdot \gamma(A_r, A_k)\Phi = d \cdot \gamma_{rk}\Phi$, где $d \in \mathbb{C}$. Если r и k находятся вне критической полосы индексов, действие A_r (соответственно A_k) задается соотношением (4.43). Внутри критической полосы необходимо рассмотреть каким образом элемент A_s, входящий в Φ, воспроизводит себя. Во-первых, $A_k \cdot A_s = \sum_n \alpha_{ks}^n A_n$. Эта комбинация встретится только если $s \geqslant 1$, при этом только члены с $n < 1$ не будут аннигилировать с окружающими элементами. Действуя далее элементом A_r и рассматривая проекцию на исходный элемент A_s, мы получаем $\sum_{s>0} \sum_{n \leqslant 0} \alpha_{rn}^s \alpha_{ks}^n$. Рассматривая так же $-A_k \cdot A_r$ и заменяя переменные, получаем

$$[A_r, A_k]\Phi = -\left(\sum_{n>0}\sum_{s\leqslant 0} - \sum_{s>0}\sum_{n\leqslant 0}\right)\alpha_{rn}^s \alpha_{ks}^n \Phi = d\cdot\gamma_{rk}\Phi. \tag{4.44}$$

Для определения константы вычислим это это выражение для $r = i$ и $k = -i$ при $i \gg 0$. Заметим, что $A_i\Phi = 0$, следовательно, $[A_i, A_{-i}]\Phi = A_i(A_{-i}\Phi)$, и что $A_k \cdot A_s = A_{k+s} + \sum_{j>k+s} C_j A_j$. Таким образом, мы нашли для каждого s множитель 1, если $s - i \leqslant 0$. Пусть теперь $s \geqslant 1$, и мы имеем $[A_i, A_{-i}]\Phi = i\cdot\Phi = d\cdot\gamma(A_i, A_{-i})\Phi$. Путем подсчета вычетов получаем $\gamma(A_i, A_{-i}) = -i$, что доказывает утверждение.

Заметим, что в [4] дано доказательство с помощью прямых вычислений.

Далее

$$dA_k(Q) = \sum_r \beta_{kr}\omega^r(Q), \qquad \beta_{kr} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dA_k(Q)A_r(Q) = \gamma_{rk}, \tag{4.45}$$

и, следовательно, по лемме 4.19

$$\begin{aligned} d'\Delta(Q', Q) &= \sum_k d'A_k(Q')\omega^k(Q) = \\ &= \sum_{k,r}\left(\sum_{\substack{n>0\\ s\leqslant 0}} - \sum_{\substack{s>0\\ n\leqslant 0}}\right)\alpha_{rn}^s\alpha_{ks}^n\omega^k(Q)\omega^r(Q'). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Теперь, пользуясь тем, что $A_i\omega^j = \sum_r \alpha_{ir}^j \omega^r$, мы получим результат для $N = 0$. Чтобы сделать это для произвольного N, достаточно лишь сравнить область суммирования с таковой при $N = 0$. Мы получим в качестве разницы

$$\left(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n} - \sum_{n=1}^{N}\sum_{s}\right)\alpha_{rn}^s\alpha_{ks}^n\omega^k(Q)\omega^r(Q').$$

Каждая из двух двойных сумм содержит лишь конечное число слагаемых. Следовательно, мы можем рассматривать их по отдельности. Проделывая это для суммирования по n в первой сумме, и по s во второй, мы получим (после представления коэффициентов через интегралы и использования дельта-распределения) одни и те же величины, которые сокращаются.

Доказательство предложения 4.12. Снова пишем для $\epsilon \neq 0$

$$[L_k(\epsilon), L_l] = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\sum_i l_k^{nm}[\,:u_i(n)u^i(m):\,, L_l]\psi(\epsilon n). \tag{4.47}$$

Как объясняется в начале этого параграфа, мы можем игнорировать нормальное упорядочение внутри данного коммутатора и переписать (4.47) в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{n,m}\sum_i l_k^{nm}\big(u_i(n)[u^i(m), L_l] + [u_i(n), L_l]u^i(m)\big)\psi(\epsilon n). \tag{4.48}$$

Воспользуемся предложением 4.10 для преобразования коммутатора и получим

$$\frac{1}{2}(c+\kappa)\sum_{n,m,v}\sum_i l_k^{nm}\big(K_{m,l}^v u_i(n)u^i(v) + K_{n,l}^v u_i(v)u^i(m)\big)\psi(\epsilon n). \tag{4.49}$$

Чтобы придать выражениям смысл по отдельности при $\epsilon = 0$, мы должны переписать их снова с применением нормального упорядочения и выписать коммутаторы для индексов, которые не являются нормально упорядоченными. После преобразования этих коммутаторов с использованием леммы 4.14 (3) мы можем записать результат в виде суммы $A_\epsilon + B_\epsilon + C_\epsilon + D_\epsilon$, где слагаемые определены соотношениями

$$\begin{aligned}
A_\epsilon &= \frac{1}{2}(c+\kappa)\sum_{n,m,v}\sum_i l_k^{nm}K_{m,l}^v\,:u_i(n)u^i(v):\,\psi(\epsilon n),\\
B_\epsilon &= \frac{1}{2}(c+\kappa)\sum_{n,m,v}\sum_i l_k^{nm}K_{n,l}^v\,:u_i(v)u^i(m):\,\psi(\epsilon n),\\
C_\epsilon &= -\frac{1}{2}c(c+\kappa)\dim\mathfrak{g}\sum_{v,m}\sum_{n>v} l_k^{nm}K_{m,l}^v\gamma_{nv}\psi(\epsilon n),\\
D_\epsilon &= -\frac{1}{2}c(c+\kappa)\dim\mathfrak{g}\sum_{n,m}\sum_{v>m} l_k^{nm}K_{n,l}^v\gamma_{vm}\psi(\epsilon n).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Рассматривая область, в которой могут быть ненулевыми коэффициенты l_k^{nm} и $K_{m,l}^v$, и принимая во внимание нормальное упорядочение, мы видим, что A_0 и B_0 снова являются корректно определенными операторами, что позволяет игнорировать множитель $\psi(\epsilon n)$. Переобозначая переменные в B_0 по схеме $(v \to n \to m \to v)$, мы получаем

$$A_0+B_0 = \frac{1}{2}(c+\kappa)\sum_{n,m,v}\sum_i (l_k^{nm}K_{m,l}^v+l_k^{mv}K_{m,l}^n)\,{:}u_i(n)u^i(v){:}. \tag{4.51}$$

Структурные константы алгебры векторных полей $\mathcal{L}$ можно вычислить по формуле

$$C_{kl}^s = \frac{1}{2\pi i}\oint_C([e_k,e_l])\cdot\Omega^s. \tag{4.52}$$

Лемма 4.20. *Имеем*

$$\sum_m (l_k^{nm}K_{m,l}^v + l_k^{mv}K_{m,l}^n) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C [e_k,e_l]\cdot\omega^n\omega^v = -\sum_s C_{kl}^s l_s^{nv}. \tag{4.53}$$

Доказательство. Мы можем записать правую часть в виде

$$-\sum_s \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{C_\tau\, C_{\tau'}}[e_k,e_l](Q)\cdot\Omega^s(Q)\omega^n(Q')\omega^v(Q')e_s(Q').$$

После суммирования по s мы приходим к “дельта-распределению” тензорного веса $(-1,2)$, интегрируем по Q' и получаем

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_C [e_k,e_l](Q)\omega^n(Q)\omega^v(Q),$$

то есть среднее выражение в формуле (4.53). В левой части для первой суммы имеем

$$\sum_m l_k^{nm}K_{m,l}^v =$$
$$= \sum_m \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{C_\tau\, C_{\tau'}}\omega^n(Q)\omega^m(Q)e_k(Q)d'A_m(Q')e_l(Q')\omega^v(Q').$$

Применяя соотношение $\sum_m d'A_m(Q')\omega^m(Q) = d'\Delta(Q',Q)$, после интегрирования по Q' получим $-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \omega^n(Q)e_k(Q)d(e_l(Q)\omega^v(Q))$.

Для второй суммы имеем $-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \omega^v(Q)e_k(Q)d(e_l(Q)\omega^n(Q)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C d(\omega^v(Q)e_k(Q))e_l(Q)\omega^n(Q)$. Собирая все вместе, получаем

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \Big(\omega^n(Q)e_k(Q)d\big(e_l(Q)\omega^v(Q)\big) - \omega^n(Q)e_l(Q)d\big(e_k(Q)\omega^v(Q)\big)\Big).$$

Если перейти от форм к представляющим их локально функциям, для подынтегрального выражения можно получить

$$\omega^n(z)\omega^v(z)\left(e_k(z)\frac{de_l}{dz}(z) - e_l(z)\frac{de_k}{dz}(z)\right) = \omega^n(z)\omega^v(z)[e_k, e_l](z).$$

Утверждение доказано.

Далее

$$\begin{aligned} A_0 + B_0 &= -\frac{1}{2}(c+\kappa)\sum_s\sum_{n,v}\sum_i C_{kl}^s l_s^{nv} :u_i(n)u^i(v): \\ &= -(c+\kappa)\sum_s C_{kl}^s L_s. \end{aligned}$$

Остается только изучить $\alpha(k,l) := \lim_{\epsilon\to 0}(C_\epsilon + D_\epsilon)$. Поскольку L_k и L_l – корректно определенные операторы в $\mathfrak{gl}(V)$ скаляр $\alpha(k,l)$ также определен. Используя тождество Якоби в $\mathfrak{gl}(V)$ и тот факт, что C_{kl}^s также удовлетворяют тождеству Якоби (в том смысле, что они являются структурными константами алгебры $\mathcal{L}$), мы заключаем, что этот скаляр определяет 2-коцикл. Изучая порядки форм, участвующих в определении констант l_k^{nm}, $K_{m,l}^v$ и γ_{nv} в точках P_+ и P_-, и подсчитывая вычеты для вычисления интеграла, мы видим, что вообще говоря для произвольных n, m, v

$$\begin{aligned} K_{m,l}^v \neq 0 &\implies -3g \leqslant -v + l + m \leqslant 0, \\ l_k^{nm} \neq 0 &\implies -g \leqslant k - (n+m) \leqslant 0, \\ \gamma_{nv} \neq 0 &\implies -2g \leqslant n + v \leqslant 0. \end{aligned}$$

С учетом этого мы получаем $\alpha(k,l) \neq 0 \implies -6g \leqslant k + l \leqslant 0$. Для $g \neq 0$, $n = -g$ и $v = -g-1$ (или наоборот) $\gamma_{-g,-g-1}$ будет ненулевым. Но в этом случае другие коэффициенты создадут те же ограничения. В частности, коцикл оказывается локальным.

Он может быть задан формулой

$$\alpha(k,l) = -\frac{1}{2}c(c+\kappa)\dim\mathfrak{g}\sum_n\Biggl(\sum_{m,s}\sum_{v<n} l_k^{nm} l_l^{vs}\gamma_{sm}\gamma_{nv} + \\ + \sum_{m,s}\sum_{v>m} l_k^{nm} l_l^{vs}\gamma_{sn}\gamma_{vm}\Biggr).$$

В оставшейся части раздела мы даем доказательство утверждений о коцикле, сделанных в предложении 4.12.

Доказательство соотношений (4.26)–(4.28). Рассмотрим снова величины (4.50), причем без нормировочного множителя $(-1/2)c(c+\kappa)\dim\mathfrak{g}$, который пока будем держать в уме. Пусть N – фиксированное целое число. Начнем снова с C_ϵ и D_ϵ. Положим

$$E_\epsilon = \sum_{v,m}\sum_{n>N} l_k^{nm} K_{m,l}^{v}\gamma_{nv}\psi(\epsilon n), \quad F_\epsilon := \sum_{n,m}\sum_{v>N} l_k^{nm} K_{n,l}^{v}\gamma_{vm}\psi(\epsilon n).$$

В $C_\epsilon - E_\epsilon$ и $D_\epsilon - F_\epsilon$ встретится только конечное число членов. Следовательно, можно положить $\epsilon = 0$ и забыть о $\psi(\epsilon n)$. Если переименовать переменные в $D_\epsilon - F_\epsilon$ по схеме $(v \to n \to m \to v)$, то, применяя лемму 4.20, получим следующее выражение

$$\lim_{\epsilon\to 0}((C_\epsilon - E_\epsilon) + (D_\epsilon - F_\epsilon)) = \\ = \sum_v \sum_{n=v+1}^{N}\Bigl(\sum_m l_k^{nm}K_{m,l}^{v} + l_k^{mv}K_{ml}^{n}\Bigr)\gamma_{nv} = \\ = -\sum_v\sum_{n=v+1}^{N}\sum_s C_{kl}^{s} l_s^{nv}\gamma_{nv}. \tag{4.54}$$

Мы видим, что в противоположность случаю, рассмотренному при доказательстве предложения 4.10, это выражение не обращается в ноль. В частности это одна из причин того, что величина коцикла зависит от выбора нормального упорядочения.

Теперь рассмотрим $E_\epsilon + F_\epsilon$. Представим область суммирования для F_ϵ как $(n,v > N) = (v,n > N) + (v > N, n \leqslant N) - (n > N, v \leqslant N)$ и обозначим первую сумму $F_\epsilon^{(1)}$, а две других вместе $F_\epsilon^{(2)}$. Прежде всего, используя $\gamma_{vm} = -\gamma_{mv}$ и $K_{v,k}^{n} = \sum_m l_k^{nm}\gamma_{mv}$, получаем

$$E_\epsilon + F_\epsilon^{(1)} = \sum_v\sum_{n>N}\Biggl(\Bigl(\sum_m l_k^{nm}K_{m,l}^{v}\Bigr)\gamma_{nv} - K_{n,l}^{v}K_{v,k}^{n}\Biggr)\psi(\epsilon n).$$

Поскольку $F_\epsilon^{(2)}$ корректно определено при $\epsilon = 0$ (см. ниже) мы можем игнорировать здесь $\psi(\epsilon n)$ если не разбивать эту сумму на две частные суммы. Воспользовавшись интегральным представлением коэффициентов и выполнив суммирование по m, получаем дельта-распределение (как мы это уже несколько раз делали) и далее

$$\left(\sum_m l_k^{nm} K_{m,l}^v\right)\gamma_{nv} =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{C_\tau\, C_{\tau'}} w^v(Q)d'A_n(Q')e_l(Q)d\big(e_k(Q)\omega^n(Q)\big)A_v(Q'),$$
$$K_{n,l}^v K_{v,k}^n =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{C_\tau\, C_{\tau'}} w^v(Q')d'A_n(Q')e_l(Q')d(e_k(Q)\omega^n(Q))A_v(Q).$$

Суммирование по v и интегрирование по Q' показывают, что

$$E_\epsilon + F_\epsilon^{(1)} = 0.$$

Остается рассмотреть

$$F_\epsilon^{(2)} = \left(\sum_{n>N}\sum_{v\leqslant N} - \sum_{n\leqslant N}\sum_{v>N}\right)K_{v,k}^n K_{n,l}^v\,\psi(\epsilon n). \tag{4.55}$$

Рассмотрение структурных констант показывает, что каждая частичная сумма состоит только из конечного множества членов, следовательно, мы снова можем положить $\epsilon = 0$. Для $N = 0$ собираем соответствующие члены (4.54) и (4.55) и приходим к результату о структуре коцикла (4.26), сформулированному в предложении 4.12. Если бы мы выбрали другое нормальное упорядочение, мы получили бы другое правило суммирования в (4.54). Выражение (4.55) осталось бы прежним. Остается вывести формулу (4.28) для значения коцикла для специально выбранных базисных элементов. Прежде всего взглянем на $\widehat{\chi}_{k,-k}$. Здесь из $K_{v,k}^n \neq 0$ следует $k \leqslant n - v$ и из $K_{n,-k}^v \neq 0$ следует $-k \leqslant v - n$; следовательно, $v = n - k$. То есть мы получим в этом случае величину $n - k$ (соответственно, n). Предположим, что $k \geqslant 0$, тогда уцелеет только первая сумма. Это будет конечная сумма

$$\sum_{n=1}^{k}(n-k)n = -\frac{1}{6}(k^3 - k).$$

В выражении для $\psi_{k,-k}$ мы находим, что $C^s_{k,-k} l^{nv}_s \gamma_{nv} \neq 0$ только если $s \geqslant 0$, $s \leqslant n+v$ и $n+v \leqslant 0$. Это означает, что мы получаем ненулевые члены только для $s=0$ и $n=-v$. Но если мы посмотрим на суммирование по области $\sum_v \sum_{n=0}^{v+1}$, мы увидим, что $n=-v$ означает, что либо $v=0$ (с нулевым коэффициентом), либо область суммирования пуста. Следовательно $\psi_{k,-k}=0$. Собирая все вместе, получаем (4.28).

Для дальнейшего отметим

Следствие 4.21. *Пусть дано допустимое представление в пространстве V, $E \in \mathrm{End}(V)$ – такой оператор, что существует базисный элемент $e_l \in \mathcal{L}$, удовлетворяющий соотношению*

$$[E, x(r)] = -(c+\kappa)\, x(\nabla_{e_l} A_r), \tag{4.56}$$

для каждого $x \in \mathfrak{g}$ и каждого r. Тогда для любого k

$$[L_k, E] = [L_k, L_l],$$

где последний коммутатор задан соотношением (4.25).

Доказательство. В доказательстве предложения 4.12 мы пользовались соотношением $[L_l, x(r)] = -(c+\kappa)\, x \otimes (\nabla_{e_l} A_r)$ предложения 4.11. Поскольку с оператором E можно обращаться по тем же правилам, мы получим $[L_k(\epsilon), E] = [L_k(\epsilon), L_l]$ и, следовательно, в пределе $\epsilon \to 0$ $[L_k, E] = [L_k, L_l]$.

5. ПРОЕКТИВНО ПЛОСКИЕ СВЯЗНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВЕ МОДУЛЕЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА

Настоящая глава посвящена приложениям алгебр Кричевера–Новикова и их представлений к геометрии пространств модулей римановых поверхностей и двумерной конформной квантовой теории поля.

Основу этих приложений составляет предложение 5.3 и его следствия, которые в сумме дают описание касательных пространств к пространствам модулей римановых поверхностей в терминах алгебр векторных полей Кричевера–Новикова и их базисов. Касательное пространство к пространству модулей связано с алгеброй векторных полей отображением Кодаиры–Спенсера и обратным к нему отображением, восходящим к Шифферу–Спенсеру.

Как указано во введении, начиная с работы Фридана и Шенкера [10], двумерная конформная теория поля отождествляется с проективно плоской связностью на пространстве модулей, заданной тензором энергии-импульса. Мы даем здесь общее выражение (5.30) для этой связности через фундаментальные объекты – тензор энергии-импульса и отображение Кодаиры–Спенсера. Несмотря на то, что ингредиенты этой формулы в разных комбинациях и в разной степени общности возникали в ряде публикаций, в такой простоте и общности указанную формулу автору в математической литературе встречать не приходилось.

Далее, мы переходим к модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена. Исходя из сформулированных во введении задач, мы строим расслоение конформных блоков на пространстве модулей средствами теории представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова и задаем тензор энергии-импульса с помощью конструкции Сугавары. Перед нами встают две задачи: доказательство корректной определенности связности на конформных блоках и ее проективной плоскостности. Решение обеих задач опирается на важное техническое средство – формулы деформаций регулярных функций и векторных полей Кричевера–Новикова (предложения 5.8, 5.9).

В заключение мы явно выводим уравнения горизонтальных сечений полученной связности для родов 0 и 1 и показываем, что для рода 0 они совпадают с уравнениями Книжника–Замолодчикова.

Еще раз подчеркнем, что после работ Бернара [2], [3] произошло первое разветвление процесса обобщения уравнений Книжника–Замолодчикова на положительный род. Бернар ввел дополнительные параметры и соглашения, не предусмотренные основами теории (см. введение). Выведенные им уравнения корреляционных функций получили название уравнений Книжника–Замолодчикова–Бернара (KZB). К этому направлению относятся работы Д. Иванова, Дж. Фельдера и многих других. Мы следуем другому направлению, заданному работой Цучия, Уено и Ямады [66], работая, в отличие от последних, с настоящей алгеброй симметрий функционала действия – аффинной алгеброй Кричевера–Новикова.

Другим аналогом уравнений Книжника–Замолодчикова являются уравнения Н. Хитчина [16], которые имеют отличную от наших уравнений область применимости: они выведены для пространства модулей римановых поверхностей без отмеченных точек.

5.1. Алгебры типа Вирасоро и пространства модулей римановых поверхностей. Предметом настоящей главы являются связности на пространстве модулей римановых поверхностей с отмеченными точками. Введем пространства модулей, нужные нам в этой и следующей главах.

В [49], [50] мы описали пространства модулей кривых, обычно встречающиеся в 2-мерных конформных теориях поля. Обозначим через $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ пространство модулей римановых поверхностей рода g с $N+1$ различными упорядоченными отмеченными точками, фиксированными k-струями локальных координат в первых N точках и фиксированной p-струей локальной координаты в последней точке. Элементы пространства $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ задаются наборами вида

$$\tilde{b}^{(k,p)} = \big[\Sigma, P_1, \dots, P_N, P_\infty, z_1^{(k)} \dots, z_N^{(k)}, z_\infty^{(p)}\big], \tag{5.1}$$

где Σ – гладкая проективная кривая рода g, P_i $(i = 1, \dots, N, \infty)$ – различные точки на Σ, z_i – координата в точке P_i (где $z_i(P_i) = 0$), и $z_i^{(l)}$ – l-струя локальной координаты z_i $(l \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Здесь

$[\ldots]$ обозначает класс эквивалентности таких наборов в следующем смысле. Два набора, представляющие $\tilde{b}^{(k,p)}$ и $\tilde{b}^{(k,p)\prime}$ эквивалентны, если существует алгебраический изоморфизм $\phi\colon \Sigma \to \Sigma'$ с $\phi(P_i) = P_i'$ для $i = 1, \ldots, N, \infty$, такой, что после отождествления с помощью ϕ мы имеем

$$z_i' = z_i + O(z_i^{k+1}), \quad 1, \ldots, N \quad \text{и} \quad z_\infty' = z_\infty + O(z_\infty^{p+1}). \tag{5.2}$$

Для двух специальных случаев мы введем те же обозначения, что и в [50]: $\mathcal{M}_{g,N+1} = \mathcal{M}_{g,N+1}^{(0,0)}$, и $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)} = \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,0)}$. “Забывая” координаты, или струи высших порядков, мы получаем естественные проекции

$$\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,p)} \to \mathcal{M}_{g,N+1}, \qquad \mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)} \to \mathcal{M}_{g,N+1}^{(k',p')} \tag{5.3}$$

для любых $k' \leqslant k$ и $p' \leqslant p$. Мы имеем дело только с локальной ситуацией, в окрестности точки пространства модулей, отвечающей кривой и отмеченным точкам общего положения.

В точках общего положения пространство $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ является гладким. Мы приступаем к описанию касательных пространств к $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ в точках гладкости. Согласно теории Кодаиры–Спенсера (см., например, [34]) касательное пространство в такой точке можно отождествить с пространством когомологий с коэффициентами в пучке:

$$\mathrm{T}_{\tilde{b}^{(k,p)}} \mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)} \cong \mathrm{H}^1(\Sigma, T_\Sigma(-(k+1)S - (p+1)P_\infty)), \tag{5.4}$$

где $S = \sum_{i=1}^N P_i$ – дивизор на Σ. Для произвольного дивизора $D = \sum_{P\in\Sigma} n_P P$ ($n_P \in \mathbb{Z}$, причем $n_P \neq 0$ лишь для конечного числа точек) $T_\Sigma(D)$ обозначает пучок (локальных) мероморфных векторных полей e, удовлетворяющих условию $\operatorname{ord}_P e \geqslant -n_P$ для всех $P \in \Sigma$ (что, в частности, означает голоморфность e вне носителя дивизора). Изоморфизм (5.4) называют *изоморфизмом Кодаиры–Спенсера*, а группу когомологий в правой части соотношения (5.4) – *касательным пространством Курaниши*. Имеются естественные отображения алгебры Ли $\mathcal{L}$ векторных полей Кричевера–Новикова на оба пространства, участвующих в соотношении (5.4). Определим сначала отображение

$$\Theta\colon \mathcal{L} \to \mathrm{H}^1\big(\Sigma, T_\Sigma(-(k+1)S - (p+1)P_\infty)\big), \tag{5.5}$$

введенное в [49].

Пусть U_∞ – координатная окрестность точки P_∞, не содержащая точек $P_1, \dots, P_N$. Пусть $U_0 = \Sigma \setminus \{P_\infty\}$, $U = U_\infty \cap U_0 = U_\infty \setminus \{P_\infty\}$.

Для любого $e \in \mathcal{L}$ положим по определению

$$\theta(e) = e|_U, \tag{5.6}$$

то есть θ – это просто отображение ограничения векторного поля на проколотую окрестность точки P_∞. Рассмотрим $\theta(e)$ как 1-коцикл в смысле когомологий Чеха. Пусть

$$\Theta(e) = [\theta(e)], \tag{5.7}$$

– соответствующий класс когомологий.

Лемма 5.1. *Отображение Θ является сюръективным. Для его ядра справедливо соотношение*

$$\ker \Theta = \mathcal{L}^{(k+1)} \oplus \mathcal{L}^{\mathrm{reg}}, \tag{5.8}$$

где $\mathcal{L}^{(k+1)} = \mathcal{L}_k \oplus \mathcal{L}_{k+1} \oplus \dots$, а $\mathcal{L}^{\mathrm{reg}}$ – подпространство в $\mathcal{L}$, состоящее из векторных полей, регулярных в точке P_∞ и обращающихся в нуль в этой точке не менее чем с порядком $p+1$; оба этих подпространства являются подалгебрами Ли в $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть векторное поле e принадлежит ядру отображения Θ. Тогда оно задает кограницу, и, следовательно, в области U представимо в виде $e = e_\infty - e_0$, где e_∞ определено и голоморфно в U_∞ и имеет порядок не ниже $p+1$ в точке P_∞, а e_0 определено и голоморфно в U_0 и имеет порядок не ниже $k+1$ во всех точках $P_1, \dots, P_N$.

Поскольку $e_0 = e - e_\infty$, где e – глобально мероморфное векторное поле, а e_∞ голоморфно в точке P_∞, то e_0 имеет в P_∞ особенность того же типа, что и e. Поэтому e_0 – тоже глобально определенное мероморфное векторное поле. В силу тех же соображений и e_∞ – глобальное векторное поле. То, что мы знаем о порядках e_0 и e_∞ в отмеченных точках, позволяет заключить, что

$$e_0 \in \mathcal{L}^{(k+1)}, \quad e_\infty \in \mathcal{L}^{\mathrm{reg}}. \tag{5.9}$$

Мы показали, что $\ker \Theta \subseteq \mathcal{L}^{(k+1)} \oplus \mathcal{L}^{\mathrm{reg}}$. Из определения когомологий немедленно следует и обратное включение. Таким образом, соотношение (5.8) доказано.

Вычислим размерность факторпространства $\mathcal{L}/\ker\Theta$. Двойственное к нему канонически изоморфно аннулятору подпространства $\ker\Theta$. Аннулятор $\ker\Theta$ при двойственности Кричевера–Новикова (см. раздел 1.2) состоит из квадратичных дифференциалов, имеющих порядки не ниже $-(k+1)$ в точках $P_1,\dots,P_N$ и не ниже $-(p+1)$ в точке P_∞. Иначе говоря, он состоит из тех квадратичных дифференциалов Ω, для которых $(\Omega)\geqslant-((k+1)S+(p+1)P_\infty)$. Степень расслоения $\mathcal{K}^2$ (сечениями которого являются квадратичные дифференциалы) равна $2(2g-2)$. По теореме Римана–Роха находим

$$\begin{aligned}\dim\{\Omega\in\Gamma(\mathcal{K}^2)|(\Omega)\geqslant-((k+1)S+(p+1)P_\infty)\}=\\ &=2(2g-2)+(k+1)N+(p+1)-(g-1)=\\ &=3g-2+(k+1)N+p.\end{aligned}$$

Это совпадает с размерностью пространства $\mathcal{M}^{(k,p)}_{g,N+1}$ в точке общего положения. Действительно, общая точка пространства $\mathcal{M}^{(k,p)}_{g,N+1}$ задается $3g-3$ модулями римановой поверхности, $N+1$ точкой на ней, k параметрами в N из них и p параметрами в оставшейся одной, итого $3g-3+(N+1)+kN+p$ параметров. Итак,

$$\dim(\mathcal{L}/\ker\Theta)=\dim\mathrm{T}_{\tilde{b}^{(k,p)}}\mathcal{M}^{(k,p)}_{g,N+1}. \tag{5.10}$$

Ввиду (5.4) имеем

$$\dim(\mathcal{L}/\ker\Theta)=\dim\mathrm{H}^1\big(\Sigma,T_\Sigma(-(k+1)S-(p+1)P_\infty)\big). \tag{5.11}$$

Этим сюръективность отображения Θ доказана.

Лемма 5.1 для случая “фиксированной” точки P_∞ (это означает, что P_∞ аналитически зависит от остальных точек, данных в них и модулей непроколотой римановой поверхности) сформулирована и доказана в [49, предложение 4.4]. В полном объеме лемма сформулирована в [50]. Утверждение леммы восходит к работе [26], где связь между алгеброй Ли $\mathcal{L}$ и пространствами модулей указана в случае двух отмеченных точек.

Теперь определим отображение

$$\gamma\colon\mathcal{L}\to\mathrm{T}_{\tilde{b}^{(k,p)}}\mathcal{M}^{(k,p)}_{g,N+1}, \tag{5.12}$$

введенное в [14] для алгебры Вирасоро и восходящее к работам Шиффера и Спенсера.

На римановой поверхности Σ, отвечающей точке $\tilde{b}^{(k,p)} \in \mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$, выберем локальную координату w в окрестности точки P_∞. Будем предполагать, что w пробегает диск радиуса 2 с центром в точке $w = 0$. Пусть $U_\infty \subset \mathbb{C}$ – единичный диск с координатой z. При $z = w$ (тождественная функция перехода) мы можем представлять себе U_∞ как подмножество координатной карты в точке P_∞. Каждому элементу $e \in \mathcal{L}$ сопоставим однопараметрическое семейство функций перехода $w = d_t(z)$ $(t \geqslant 0)$ по формуле $d_t(z) = (\exp te)(z)$. Здесь $\exp te$ – локальный поток, соответствующий векторному полю e. Функция перехода d_t определена в некотором кольце U_t с центром в точке $z = 0$. Таким образом мы получим однопараметрическое семейство конформных структур, то есть кривую в пространстве $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$. Введем локальные координаты (*модули, модулярные параметры*) $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ в окрестности точки $\tilde{b}^{(k,p)} \in \mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$, где $m = 3g-2+(k+1)N+p$ (координаты самой точки $\tilde{b}^{(k,p)}$ обозначим через τ_0). С их помощью запишем построенную кривую в $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ в виде $\tau = \tau^e(t)$.

Определение 5.2. Отображение γ сопоставляет векторному полю e касательный вектор к кривой $\tau^e(t)$ при $t = 0$.

В терминах дифференцирований

$$\gamma(e) = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial \tau_i}\bigg|_{\tau_0}, \quad \text{где} \quad X_i = \frac{d\tau_i^e(t)}{dt}\bigg|_{t=0}. \tag{5.13}$$

В конце этого раздела мы покажем, что таким образом может быть получен любой касательный вектор к пространству модулей $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ в точках общего положения. В частности, отсюда будет следовать, что с помощью этой процедуры мы получаем все близкие к данной конформные структуры. Для этого нам понадобится более подробная информация об изоморфизме Кодаиры–Спенсера (5.4).

Введем для отображения, осуществляющего изоморфизм Кодаиры–Спенсера, обозначение ρ:

$$\rho\colon \mathrm{T}_{\tilde{b}^{(k,p)}}\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)} \to \mathrm{H}^1\big(\Sigma, T_\Sigma(-(k+1)S-(p+1)P_\infty)\big). \tag{5.14}$$

Пусть $X \in \mathrm{T}_{\tilde b^{(k,p)}}\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$. Как и выше, пусть τ_0 – набор локальных координат точки $\tilde b^{(k,p)}$. Рассмотрим семейство функций перехода $w = d_\tau(z)$, где τ пробегает диск с центром в точке τ_0 в пространстве модулярных параметров, а z пробегает кольцо в U_∞ с центром в точке 0. Ширина этого кольца зависит от τ.

Определение отображения ρ, вообще говоря, требует привлечения развитого аппарата теории когомологий. Однако, в точках гладкости пространства модулей его можно определить чисто аналитически. А именно, возьмем кривую $\tau_X(t)$ в пространстве $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$, выходящую из точки $\tilde b^{(k,p)}$ в направлении X, и выберем соответствующие функции перехода $d_t = d_{\tau_X(t)}$. Положим по определению

$$\rho(X) = d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau. \tag{5.15}$$

Мы рассматриваем $\rho(X)$ как локальное векторное поле на римановой поверхности Σ (отвечающей точке $\tilde b^{(k,p)}$ пространства модулей, то есть модулярным параметрам τ_0). Поясним это двумя способами. Первое объяснение заключается в том, что каждую из функций перехода d_τ можно рассматривать как локальный аналитический диффеоморфизм с кольцевой областью определения. Такие диффеоморфизмы образуют группу, если отождествлять два диффеоморфизма, совпадающие в некоторой области. Стандартным образом $\rho(X)$ является касательным вектором в единице этой группы, то есть локальным векторным полем. Соотношение (5.15) является инвариантным определением этого векторного поля. Дадим определение с привлечением локальных координат, заодно уточняющее смысл, который мы придаем выражению $\partial_X d_\tau$. Введем обозначение $d(z,\tau) = d_\tau(z)$. Мы полагаем

$$\partial_X d_\tau(z) = \sum_i X_i \left.\frac{\partial d(z,\tau)}{\partial \tau_i}\right|_{\tau_0}. \tag{5.16}$$

Тогда $\partial_X d_\tau$ – локальное отображение 1-мерного z-пространства в w-пространство. Оно задает касательный вектор к группе локальных диффеоморфизмов в точке d_τ. Этот касательный вектор получен следующим образом: мы вложили семейство локальных диффеоморфизмов d_τ в пространство локальных функций и взяли касательный вектор к нему в этом объемлющем пространстве.

Теперь положим

$$\rho_z(X) = d_\tau^{-1}(\partial_X d_\tau(z)) \quad \text{и} \quad \rho(X) = \rho_z(X)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.17}$$

Здесь $\rho_z(X)$ –локальная функция, а $\rho(X)$ – локальное векторное поле, записанное в координате z.

Локальное векторное поле, определенное в кольце вокруг точки P_∞, задает класс 1-когомологий по Чеху римановой поверхности Σ с коэффициентами в касательном пучке. Когомологический класс, представляемый векторным полем $\rho(X)$, называется *классом когомологий Кодаиры–Спенсера* 1-параметрического семейства τ_X деформаций структуры комплексной римановой поверхности с отмеченными точками. В такой форме класс Кодаиры–Спенсера применялся, например, в [67, лемма 1.3.8]. Допуская вольность обозначений, для класса когомологий Кодаиры–Спенсера мы сохраняем то же самое обозначение $\rho(X)$.

Предложение 5.3. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "\Theta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \mathrm{H}^1(\Sigma, T_\Sigma(-(k+1)S-(p+1)P_\infty)) \\ & \mathrm{T}_{\tilde{b}^{(k,p)}}\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)} \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd} \tag{5.18}$$

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{L}$, $X = \gamma(e)$. Тогда согласно (5.13) X определяется как касательный вектор в начальной точке кривой $\tau^e(t)$, которая отвечает однопараметрическому семейству функций перехода $d_t(z) = (\exp te)(z)$. Поскольку $\partial_X d_\tau(z)$ в (5.16) может быть вычислено как производная по t вдоль кривой, то $\partial_X d_\tau(z) = \frac{d}{dt}(\exp te)\big|_{t=0} = e$, где e рассматривается в локальной координате z. Поскольку $d_0(z)$ – тождественная подстановка, имеем $\rho(X) = e|_U$. Согласно (5.6) $\rho(X) = \theta(e)$. Переходя к классам когомологий Чеха, задаваемым обеими частями этого равенства, имеем в силу (5.7) $\rho(X) = \Theta(e)$. Это завершает доказательство коммутативности диаграммы (5.18).

Следствие 5.4. *Отображение γ является сюръективным.*

Утверждение вытекает из леммы 5.1 и того, что ρ – изоморфизм.

Следствие 5.5. *Пусть $\mathcal{L}_{(0)}$ – произвольное дополнение к* $\ker\Theta$ *в пространстве $\mathcal{L}$. Тогда*

$$\mathrm{T}_{\tilde{b}^{(k,p)}}\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)} \cong \mathcal{L}_{(0)}. \tag{5.19}$$

При любом выборе дополнения $\mathcal{L}_{(0)}$ для любого $X \in \mathrm{T}_{\tilde{b}^{(k,p)}}\mathcal{M}^{(k,p)}_{g,N+1}$ найдется $e \in \mathcal{L}_{(0)}$, такое, что $\rho(X) = \Theta(e)$.

Доказательство соотношения (5.19) очевидно. Второе утверждение в формулировке следствия непосредственно вытекает из коммутативности диаграммы (5.18).

Замечание. Ниже мы всегда предполагаем, что коцикл $\rho(X)$ представлен (глобальным) векторным полем Кричевера–Новикова в смысле настоящего следствия, и записываем это в виде

$$\rho(X) \in \mathcal{L}.$$

В конкретных ситуациях пространства $\mathcal{L}_{(0)}$ легко описываются в терминах базиса Кричевера–Новикова в векторных полях. Например, для родов 0 и 1 это сделано в разделе 5.5 при построении явного вида уравнений Книжника–Замолодчикова.

5.2. Пучок конформных блоков и другие пучки на пространстве модулей $\mathcal{M}^{(1,0)}_{g,N+1}$. Рассмотрим пространство модулей $\mathcal{M}^{(1,0)}_{g,N+1}$. Пусть $\tilde{b} \in \mathcal{M}^{(1,0)}_{g,N+1}$ – точка общего положения, а $\widetilde{W}$ – ее окрестность. Аналогично (5.1) запишем $\tilde{b}$ в виде

$$\tilde{b} = [\Sigma, P_1, \ldots, P_N, P_\infty, z_1^{(1)} \ldots, z_N^{(1)}]. \tag{5.20}$$

Напомним, что задание отмеченных точек и 1-струй локальных координат в них (за исключением P_∞) – это те данные, которые позволяют построить на римановой поверхности алгебры Кричевера–Новикова (глава 1) и определить их фермионные представления (глава 3).

Алгебры Кричевера–Новикова, соответствующие точке $\tilde{b}$, будем обозначать

$$\mathcal{A}_{\tilde{b}},\ \mathcal{L}_{\tilde{b}},\ \widehat{\mathcal{L}}_{\tilde{b}},\ \bar{\mathfrak{g}}_{\tilde{b}},\ \widehat{\mathfrak{g}}_{\tilde{b}}. \tag{5.21}$$

Рассмотрим над множеством $\widetilde{W}$ пучки соответствующих объектов, которые мы обозначим

$$\mathcal{A}_{\widetilde{W}},\ \mathcal{L}_{\widetilde{W}},\ \widehat{\mathcal{L}}_{\widetilde{W}},\ \bar{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}},\ \widehat{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}}. \tag{5.22}$$

Выше, в разделе 5.1 уже вводилась регулярная подалгебра $\mathcal{L}^{\mathrm{reg}}$ алгебры Ли $\mathcal{L}$. Для $p = 0$ (случай, который мы рассматриваем в этом разделе) это подалгебра векторных полей, обращающихся в ноль в точке P_∞. Введем аналогичную подалгебру для алгебры функций $\mathcal{A}$: пусть $\mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$ это подалгебра, состоящая из элементов, обращающихся в ноль в точке P_∞. Подалгебра $\mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$ называется *регулярной подалгеброй* в $\mathcal{A}$. Положим по определению $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} = \mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$. Для любых двух элементов пространства $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ центральная составляющая их коммутатора равна нулю, так как подынтегральное выражение в (1.33) регулярно. Поэтому $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ – подалгебра Ли как алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, так и $\widehat{\mathfrak{g}}$. Назовем ее *регулярной подалгеброй в* $\widehat{\mathfrak{g}}$. Обозначим через $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}_{\widetilde{W}}$, $\mathcal{L}^{\mathrm{reg}}_{\widetilde{W}}$ соответствующие пучки регулярных подалгебр.

Пусть V – неприводимый почти градуированный модуль над алгеброй Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$, порожденный вакуумом, то есть элементом, который аннулируется всеми элементами алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, регулярными (как мероморфные функции) в точках $P_1,\ldots,P_N$, кроме постоянных матриц, и постоянными матрицами, принадлежащими верхней нильпотентной подалгебре в $\mathfrak{g}$. Подчеркнем, что V, вообще говоря, зависит от модулярных параметров, как и сама алгебра. Мы будем предполагать, что модули V образуют локально свободный пучок над открытым подмножеством пространства модулей $\mathcal{M}^{(1,0)}_{g,N+1}$. Этот пучок мы обозначим $\mathcal{V}_{\widetilde{W}}$.

Определение 5.6. Пучок *конформных блоков*, ассоциированный с пучком $\mathcal{V}_{\widetilde{W}}$, определяется как фактор-пучок

$$C_{\widetilde{W}} = \mathcal{V}_{\widetilde{W}}/\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}_{\widetilde{W}}\mathcal{V}_{\widetilde{W}}. \tag{5.23}$$

Слои пучка $C_{\widetilde{W}}$ называются *коинвариантами* соответствующих регулярных подалгебр.

В настоящей главе в качестве $\mathcal{V}_{\widetilde{W}}$ рассматриваются пучки фермионных модулей и подрученных модулей Верма, однако, вообще говоря, это не является обязательным. Все сказанное ниже справедливо и в более широких предположениях, Достаточно, чтобы выполнялась сформулированная ниже лемма 5.11.

В нашем описании базисные фермионы не зависят от модулей, и только действие алгебр Ли зависит от них через свои структурные константы. Мы тривиализуем пучок $\mathcal{V}_{\widetilde{W}}$, пользуясь этими базисами, и получаем соответствующее тривиальное векторное расслоение $V\times\widetilde{W}$, где V – стандартное фермионное пространство (раздел 3.4). Над точкой общего положения пространства модулей пространство $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}_{\widetilde{W}}V$ также не зависит от модулей (зависимость от структурных констант исчезает при переходе к линейной оболочке образов базисных фермионов под действием $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$). Следовательно, пучок конформных блоков является локально свободным и определяет векторное расслоение. Относительно $\mathfrak{g}$ можно было бы предполагать, что это – произвольная редуктивная алгебра Ли. Для простоты мы возьмем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, и ее стандартное представление в n-мерном пространстве в качестве τ (стр. 45). При этом имеет место конечномерность коинвариантов, то есть векторное расслоение конформных блоков имеет конечный ранг.

Замечание. Определение конформных блоков на пространстве $\widetilde{W}^{(k,p)}$ точек общего положения в $\mathcal{M}^{(k,p)}_{g,N+1}$ можно дать следующим образом. Имеется естественная проекция $\mathcal{M}^{(k,p)}_{g,N+1} \to \mathcal{M}^{(1,0)}_{g,N+1}$, заключающаяся в "забывании лишней информации" о струях: составляющих порядка выше 1 в точках $P_1, \dots, P_N$, и всей струи в точке P_∞. В силу этой проекции поднимем пучок $\mathcal{V}$ с пространства $\widetilde{W}$ на $\widetilde{W}^{(k,p)}$. Полученный пучок обозначим $\mathcal{V}^{(k,p)}$. Регулярная подалгебра $\mathfrak{g}^{(k,p)} \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ теперь зависит от k и p. Ее описание в полной общности нам не потребуется. Теперь аналогично (5.23) полагаем по определению

$$C_{\widetilde{W}^{(k,p)}} = \mathcal{V}^{(k,p)}/\mathfrak{g}^{(k,p)}\mathcal{V}^{(k,p)}. \tag{5.24}$$

5.3. Дифференцирование объектов Кричевера–Новикова по модулярным переменным. Задача этого раздела – определить дифференцирование сечений пучков функций и векторных полей Кричевера–Новикова, а также операторов представления от них, по модулярным параметрам. Заметим, что это нетривиальная задача, допускающая несколько неэквивалентных подходов. Наш подход согласован с описанием Кодаиры–Спенсера касательного пространства к пространству модулей, данным в терминах алгебры векторных полей Кричевера–Новикова (предложение 5.3 и его следствия).

Как и в предыдущем разделе 5.2, мы рассматриваем множество $\widetilde{W}$ точек общего положения пространства модулей $\mathcal{M}^{(1,0)}_{g,N+1}$. Каждая такая точка представлена набором геометрических данных (см. (5.20))

$$\tilde{b} = [\Sigma, P_1, \dots, P_N, P_\infty, z_1^{(1)} \dots, z_N^{(1)}],$$

все компоненты которого зависят от набора модулярных параметров τ (краткая запись: $\tilde{b} = \tilde{b}(\tau)$). Как мы это делали в разделе 5.1, сопоставим набору τ функцию склейки $w = d_\tau(z)$, задающую конформную структуру на римановой поверхности $\Sigma(\tau)$. Введем необходимые обозначения.

Выберем точку в $\widetilde{W}$ с модулярными параметрами τ_0. Дадим определение дифференцирования сечений пучка функций Кричевера–Новикова в окрестности точки τ_0. Результат такого дифференцирования является сечением другого пучка – пучка функций на U, то есть *локальных функций.*

Объектом дифференцирования являются сечения пучков $\mathcal{A}_{\widetilde{W}}$, $\mathcal{L}_{\widetilde{W}}$ (см. (5.22)). Так как база $\widetilde{W}$ на протяжении этого раздела фиксирована, мы опустим указание на нее в обозначении пучков. Итак, пусть в этом разделе $\mathcal{A}$ обозначает пучок алгебр функций Кричевера–Новикова на $\widetilde{W}$ (а также соответствующее бесконечномерное векторное расслоение), $\mathcal{L}$ – пучок алгебр векторных полей Кричевера–Новикова. Каждая индивидуальная алгебра – слой над точкой $\tau \in \widetilde{W}$ – обозначается с этого момента через $\mathcal{A}_\tau$ или $\mathcal{L}_\tau$ соответственно. Пусть $\mathcal{A}^{\text{reg}}$, $\mathcal{L}^{\text{reg}}$, $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ обозначают пучки соответствующих регулярных алгебр.

Если A – сечение пучка $\mathcal{A}$, его значение в точке τ мы будем записывать как $A(\tau) = A_\tau$, где $A_\tau \in \mathcal{A}_\tau$. Таким образом, A_τ – функция Кричевера–Новикова. Ограничим ее на U. Полученную локальную функцию можно рассматривать как в локальной координате w, так и в локальной координате z. В первом случае будем записывать результат в виде $A_\tau(w)$ (допуская при этом вольность в обозначениях), а во втором – в виде $\tilde{A}_\tau(z)$. Мы имеем, таким образом $\tilde{A}_\tau(z) = A_\tau(d_\tau(z))$. Пусть $\tilde{\mathcal{A}}$ – пучок функций на U (рассматриваемых в z-координате). Соответствие $A_\tau \to \tilde{A}_\tau$ задает вложение $\mathcal{A}$ в $\tilde{\mathcal{A}}$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{reg}}$ подпучок сечений пучка $\tilde{\mathcal{A}}$, аналитически продолжимых в P_∞ и обращающихся в ноль в этой точке. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}^{\text{reg}}$ обозначает то же самое для алгебры $\mathcal{L}$.

Определение 5.7. Для данного локального векторного поля X в окрестности точки $\tau_0 \in \widetilde{W}$ под $(\partial_X A_\tau)(z)$, мы понимаем полную производную функции $\tilde{A}_\tau(d_\tau^{-1}(w))$ при постоянном w вдоль векторного поля X, где после дифференцирования произведена подстановка $w = d_\tau(z)$:

$$\partial_X A_\tau(z) = \partial_X \left(\tilde{A}_\tau(d_\tau^{-1}(w))\right)\big|_{w=d_\tau(z)}.$$

Таким образом $\partial_X A_\tau$ – это локальная функция переменной z. По существу мы дифференцируем по модулярным параметрам локальную функцию, полученную ограничением функции Кричевера–Новикова на проколотую окрестность точки P_∞, рассматриваемую как функция переменной z, с учетом как непосредственной зависимости от параметра τ, так и зависимости от τ функции перехода между локальной координатой z и фиксированной локальной координатой w. После подстановки $w = d_\tau(z)$ мы рассматриваем $\partial_X A_\tau$ как сечение пучка $\tilde{\mathcal{A}}$. Таким образом, мы определили дифференцирование по модулям сечений не только пучка функций Кричевера–Новикова, но и пучка локальных функций.

При фиксированном τ ограничение $A_\tau|_{U_\infty}$ можно рассматривать как локальную аналитическую функцию в с единственной особенностью в точке P_∞. Поставим вопрос о том как дифференцирование вдоль X меняет характер этой особенности. Ответ на этот вопрос мы даем в терминах коцикла Кодаиры–Спенсера $\rho(X)$, определенного в разделе 5.1. При этом ниже мы предполагаем, что $\rho(X) \in \mathcal{L}$ в смысле замечания к следствию 5.5; как показывает следствие 5.5, мы действительно можем это предполагать без ограничения общности. Более того, следствие 5.5 утверждает, что векторное поле $\rho(X)$, представляющее класс когомологий Кодаиры–Спенсера, может быть выбрано в любом наперед заданном дополнении $\mathcal{L}_{(0)}$ к ядру отображения Θ. Как показывает анализ доказательства предложения 5.3, эта свобода связана с возможностью выбора подходящего семейства функций перехода d_τ. Коль скоро мы зафиксируем $\mathcal{L}_{(0)}$ каким-либо образом, всякая неоднозначность в задании $\rho(X)$ исчезнет, и оно будет полностью определяться векторным полем X. Заметим, что и определение $\partial_X A_\tau$ зависит от выбора функций перехода. Здесь и ниже мы придерживаемся соглашения, что для определения $\rho(X)$ и $\partial_X A_\tau$ выбрано одно и то же семейство функций перехода.

Предложение 5.8. *Для любого сечения A пучка $\mathcal{A}$, и любого локального векторного поля X определим A^X соотношением*

$$\partial_X A = -\rho(X)A + A^X, \tag{5.25}$$

где $A^X \in \tilde{\mathcal{A}}$. Тогда если $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$, то $A^X \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{reg}}$. Утверждение остается справедливым, если A – сечение пучка $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{reg}}$.

Доказательство. Действуя согласно определению 5.7, вычислим сначала полную производную вдоль X от функции $(\tilde{A}_\tau \cdot d_\tau^{-1})(w)$ при постоянном w. Здесь символ $(\cdot)$ означает композицию отображений.

По формуле дифференцирования композиции отображений (сложной функции)

$$\partial_X(\tilde{A}_\tau \cdot d_\tau^{-1}) = \tilde{\partial}_X\tilde{A}_\tau + \partial_z\tilde{A}_\tau \cdot \partial_X d_\tau^{-1}, \tag{5.26}$$

где $\tilde{\partial}_X\tilde{A}_\tau$ – производная вдоль X в предположении независимости локальной координаты z от τ, $\partial_z\tilde{A}_\tau$ – дифференциал $\tilde{A}_\tau$ (вычисленный в переменной z). Далее, $\partial_X d_\tau^{-1} = -d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau \cdot d_\tau^{-1}$, следовательно $\partial_z\tilde{A}_\tau \cdot \partial_X d_\tau^{-1} = \partial_z\tilde{A}_\tau \cdot (-d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau) \cdot d_\tau^{-1}$. Выражение в скобках по определению равно $-\rho(X)$. Поскольку дифференциал, примененный к векторному полю, дает дифференциальный оператор первого порядка, соответствующий этому векторному полю, имеем

$$\partial_z\tilde{A}_\tau \cdot (-d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau) \cdot d_\tau^{-1} = \left(-\rho_z(X)\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot d_\tau^{-1}$$

(так как дифференциал брался в переменной z, то и дифференциальный оператор получился в этой переменной).

В этом выражении, согласно определению, надо сделать подстановку $w = d_\tau(z)$, то есть зачеркнуть d_τ^{-1} справа (первое слагаемое в (5.26) и так вычислено в переменной z). В итоге имеем

$$\partial_X A_\tau(z) = \tilde{\partial}_X\tilde{A}_\tau(z) - \rho_z(X)\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_\tau(z),$$

что в бескоординатной форме в области U можно записать в виде

$$\partial_X A_\tau = -\rho(X)A_\tau + \tilde{\partial}_X\tilde{A}_\tau. \tag{5.27}$$

Предположим, что $A_\tau \in \mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$ для любого τ, то есть $A_\tau(P_\infty) = 0$ для $P_\infty \in \Sigma(\tau)$. Так как $z(P_\infty) = 0$, то из $A_\tau(P_\infty) = 0$ вытекает, что $\tilde{A}_\tau(0) = 0$ для всех τ, и, следовательно $\tilde{\partial}_X\tilde{A}_\tau(0) = 0$. Положим $A_\tau^X = \tilde{\partial}_X\tilde{A}_\tau$. Тогда соотношение (5.27) даст требуемое соотношение (5.25), причем $A_\tau^X(0) = 0$ для всех τ, то есть $A^X \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{reg}}$, что завершает доказательство.

Последнее утверждение предложения 5.8 очевидно.

Теперь рассмотрим пучок $\mathcal{L}$ алгебр векторных полей Кричевера–Новикова. Пусть e – его мероморфное сечение. Мы могли бы определить $\partial_X e$, повторяя весь ход рассуждения с функциями, однако мы выбираем здесь более короткий путь – определение с помощью правила Лейбница. Для любых сечений $e \in \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{A}$ под eA мы понимаем сечение, полученное действием векторного поля на функцию над каждой точкой рассматриваемой области пространства модулей, и полагаем по определению

$$(\partial_X e)A = \partial_X(eA) - e\partial_X A.$$

Предложение 5.9. *Для каждого сечения e пучка $\mathcal{L}$, и каждого локального векторного поля X определим e^X соотношением*

$$\partial_X e = -[\rho(X), e] + e^X, \tag{5.28}$$

где $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}$. Тогда если $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}^{\mathrm{reg}}$, то $e \in \mathcal{L}^{\mathrm{reg}}$.

Доказательство. Ввиду предложения 5.8 имеем

$$\partial_X(eA) = -\rho(X)(eA) + (eA)^X,$$

где $(eA)^X = \tilde{\partial}_X(\widetilde{eA})$. Последнее следует из доказательства предложения 5.8. Аналогично $e(\partial_X A) = e(-\rho(X)A + \tilde{\partial}_X \tilde{A})$. Все вместе дает

$$(\partial_X e)A = -[\rho(X), e]A + \tilde{\partial}_X(\widetilde{eA}) - e\tilde{\partial}_X \tilde{A}. \tag{5.29}$$

Напомним, что $\tilde{\partial}_X$ здесь – это дифференцирование без учета зависимости локальной координаты z от τ. Иными словами это дифференцирование сечений свободных пучков (прямых произведений), слои которых – пространства либо локальных функций, либо локальных векторных полей.

Так как объекты e и A глобальны, имеем $\widetilde{eA} = \tilde{e}\tilde{A}$. Снова применяя правило Лейбница, мы получаем $\tilde{\partial}_X(\widetilde{eA}) - e\tilde{\partial}_X \tilde{A} = (\tilde{\partial}_X \tilde{e})\tilde{A}$. Следовательно, из (5.29) вытекает (5.28), где $e^X = \tilde{\partial}_X \tilde{e}$.

Пусть e – сечение пучка $\mathcal{L}^{\mathrm{reg}}$. Тогда $\tilde{\partial}_X \tilde{e}(0) = 0$ по той же причине, по которой $\tilde{\partial}_X \tilde{A}(0) = 0$ в доказательстве предложения 5.8. Следовательно $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}^{\mathrm{reg}}$, что завершает доказательство.

Нам остается придать смысл обозначению $\partial_X B$, где B – локальное сечение пучка операторов, действующих на сечениях пучка $\mathcal{V}$. Мы полагаем по определению $\partial_X B = [\partial_X, B]$, где в правой части ∂_X – оператор дифференцирования сечений свободного пучка (прямого произведения) $\mathcal{V}$, который в определении не нуждается.

5.4. Проективно плоская связность и обобщенные уравнения Книжника–Замолодчикова. В этом разделе мы введем связность в пучке конформных блоков (5.23), докажем ее проективную плоскостность и сформулируем наше обобщение уравнений Книжника–Замолодчикова на пространства модулей римановых поверхностей положительного рода (с отмеченными точками).

Для локального векторного поля X на $\widetilde{W}$ мы вводим следующий дифференциальный оператор первого порядка на сечениях свободного пучка $\mathcal{V}$:

$$\nabla_X = \partial_X + T(\rho(X)), \tag{5.30}$$

где $\partial_X = \sum_i X_i(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau_i}$ – дифференцирование сечений свободного пучка $\mathcal{V}$, T – представление Сугавары, $\rho(X)$ – коцикл Кодаиры–Спенсера, соответствующий векторному полю X, причем, как и выше, $\rho(X) \in \mathcal{L}$. Ниже, переходя к фактор-оператору ∇_X, мы определим аналог связности Книжника–Замолодчикова на пространстве $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,0)}$.

Замечание. Представление Сугавары T в связи с уравнением Книжника–Замолодчикова возникло в их работе [21], хотя полностью связность там не выписывалась. В [66] (см. также [67]) дано максимально общее выражение для связности в терминах алгебры Вирасоро. Если это выражение адаптировать к рациональному случаю, когда роль пространства $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,0)}$ играет прямое произведение N римановых сфер, получим $\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_i}} = \frac{\partial}{\partial z_i} + T(\frac{\partial}{\partial z_i})$, где z_i – координата на i-й сфере (см. [8, введение]). В этом случае $\frac{\partial}{\partial z_i}$ является касательным вектором к произведению сфер, но одновременно $\frac{\partial}{\partial z_i}$ является элементом алгебры Вирасоро, и как для такового, для него определено представление Сугавары. Для произвольного рода уже нет канонического способа сопоставить векторному полю X элемент алгебры Вирасоро. В этом случае в [66] берется некоторый элемент e алгебры Вирасоро, такой что $X = \gamma(e)$ (отображение γ определено в разделе 5.1), и связность определяется как $\nabla_X = \partial_X + T\big(\bigoplus_{i=1}^N e_i\big)$, где e_i – ряд Лорана векторного поля e в точке P_i. Это уже близко к нашей формуле (5.30), но последний шаг – замена $\bigoplus_{i=1}^N e_i$ на $\rho(X)$ –

не сделан, и причина этого в том, что векторные поля e_i – формальные, а векторное поле $\rho(X)$ – локальное, то есть это разные объекты. Для определения представления Сугавары локального векторного поля авторы [66] должны переходить к алгебре Вирасоро, то есть к формальным векторным полям. Базисы Кричевера–Новикова дают новую возможность. Согласно [27, теоремы 1.2, 1.3] каждое локальное голоморфное векторное поле раскладывается в ряд по базису Кричевера–Новикова. Поэтому имеет смысл его представление Сугавары. Это позволяет считать $\rho(X)$ аргументом в представлении Сугавары и записать ∇ в виде (5.30). Более того, из следствия 5.5 вытекает, что $\rho(X)$ можно вообще считать элементом алгебры Кричевера–Новикова.

Разумеется, продолжение по линейности операторов представления на локальные объекты, будь то функции или векторные поля, не вызывает затруднений. Вопрос возникает при рассмотрении различного рода мультипликативных структур, включая умножение функций, коммутатор векторных полей, действие векторных полей на функции и соответствующих операторов на элементы пространства представления. Поскольку мы рассматриваем только почти градуированные операции, этот вопрос легко разрешим. Рассмотрим, например, выражение eA, где e – локальное векторное поле, A – локальная функция. Если один из этих объектов принадлежит соответствующей алгебре Кричевера–Новикова, то есть раскладывается по конечному числу базисных векторов, или оба они бесконечны только в одну сторону (положительную или отрицательную по отношению к почти градуировке), то и результат действия корректно определен как бесконечный ряд по базисным функциям, поскольку только конечное число членов разложения как e, так и A дает вклад в компоненту заданной степени результата.

Предложение 5.10. *∇_X корректно определено на конформных блоках.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 5.11. *Если u – фермионное представление, то*

$$\partial_X u(A) = u(\partial_X A) \tag{5.31}$$

Доказательство. Для каждых $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$ и каждого базисного фермиона $\Psi = \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \dots$ имеем $u(A)\Psi = (uA)\psi_{i_1} \wedge$

$\psi_{i_2} \dots + \psi_{i_1} \wedge (uA)\psi_{i_2} \dots + \lambda_1 \cdot \Psi$, где последний член возникает ввиду регуляризации (стр. 48), и по той же причине в каждом из выражений $(uA)\psi_{i_k}$ член с ψ_{i_k} (если таковой имеется) игнорируется. По определению $\partial_X u(A) = \partial_X \cdot u(A) - u(A)\partial_X$. Поскольку базисные фермионы не зависят от модулей, то есть $\partial_X \Psi = 0$, имеем

$$
\begin{aligned}
(\partial_X u(A))\Psi = \partial_X(u(A)\Psi) = \\
&= (u\partial_X A)\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \ldots + \psi_{i_1} \wedge (u\partial_X A)\psi_{i_2} \ldots + (\partial_X \lambda_1) \cdot \Psi = \\
&= u(\partial_X A)\Psi + (\partial_X \lambda_1) \cdot \Psi - \lambda_2 \cdot \Psi,
\end{aligned}
$$

где $\lambda_2 \cdot \Psi$ появляется ввиду регуляризации $u(\partial_X A)$. Если необходимости в регуляризации не возникает, соотношение (5.31) получается немедленно. Регуляризация просто вычисляется в терминах матрицы оператора uA в пространстве сечений того голоморфного расслоения, с которым связано наше фермионное представление. Пусть $uA = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} a_{ij} E_{ij}$, где $\{E_{ij} | i, j \in \mathbb{Z}\}$ – естественный базис в пространстве матриц. Согласно процедуре регуляризации

$$
\lambda_1 = \sum_{i \in N_-} a_{ii} - \sum_{i \in N_+} a_{ii},
$$

где N_+ – множество не занятых позиций, или дырок, положительной степени монома Ψ, то есть $N_+ = \mathbb{N} \setminus \{i_1, i_2, \dots\}$, а N_- – множество занятых позиций отрицательной или нулевой степени. Аналогично, $\lambda_2 = \sum_{i \in N_-} \partial_X a_{ii} - \sum_{i \in N_+} \partial_X a_{ii}$. Следовательно, $\partial_X \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, и утверждение справедливо и в этом случае.

При рассмотрении других классов представлений мы рассматриваем соотношение (5.31) как дополнительное требование.

Доказательство предложения 5.10. Пусть A – сечение пучка $\tilde{\mathcal{A}}$. Используя леммы 5.11 и 4.8, находим

$$
\begin{aligned}
[\nabla_X, u(A)] &= [\partial_X + T(\rho(X)), u(A)] = \\
&= [\partial_X, u(A)] + [T(\rho(X)), u(A)] = \\
&= u(\partial_X A) + u(\rho(X)A).
\end{aligned}
$$

Здесь над каждой точкой пространства модулей A – локальная функция, но $\rho(X)$ – векторное поле Кричевера–Новикова, поэтому согласно замечанию на странице 99 все коммутаторы в этой цепочке равенств корректно определены.

Предположим, что $A \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{reg}}$. Тогда согласно предложению 5.8 мы имеем

$$u(\partial_X A) = -u(\rho(X)A) + u(A^X),$$

где $A^X \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{reg}}$. Следовательно, $[\nabla_X, u(A)] = u(A^X)$ и

$$[\nabla_X, u(A)] \in u(\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{reg}}),$$

откуда

$$[\nabla_X, u(\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{reg}})] \subseteq u(\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{reg}}). \tag{5.32}$$

Согласно (5.23) конформные блоки определялись как $C = \mathcal{V}/\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}\mathcal{V}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{V}}$ – пучок пополненных модулей, в том смысле что разрешаются бесконечные влево комбинации базисных фермионов. Понятно, что $\mathcal{V}/\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}\mathcal{V} = \widetilde{\mathcal{V}}/\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}\widetilde{\mathcal{V}}$ (и $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathrm{reg}}$, и $\widetilde{\mathcal{V}}$ состоят из рядов, бесконечных в одну и ту же сторону, так что действие корректно).

Соотношение (5.32) показывает, что $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}\mathcal{V}$ является ∇_X-инвариантным подпространством и следовательно ∇_X корректно определено на $\widetilde{\mathcal{V}}/\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}\widetilde{\mathcal{V}}$.

Лемма 5.12. *Пусть u – фермионное или неприводимое представление. Тогда для любого локального векторного поля X на пространстве модулей и сечения e пучка $\mathcal{L}$ мы имеем*

$$\partial_X T(e) = T(\partial_X e) + \lambda \cdot \mathrm{id},$$

где $\lambda = \lambda(X, e) \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Ввиду фундаментального соотношения леммы 4.8 для любых $e \in \mathcal{L}$, $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$

$$[T(e), u(A)] = u(eA). \tag{5.33}$$

Возьмем производную обеих частей соотношения (5.33) вдоль векторного поля X. По лемме 5.11 получаем

$$[\partial_X T(e), u(A)] + [T(e), \partial_X u(A)] = u((\partial_X e)A) + u(e(\partial_X A)). \tag{5.34}$$

Вновь по формуле (5.33) и лемме 5.11 вторые члены в обеих частях соотношения (5.34) равны. Следовательно,

$$[\partial_X T(e), u(A)] = u((\partial_X e)A).$$

Применяя (5.33) еще раз, заменим правую часть последнего соотношения выражением $[T(\partial_X e), u(A)]$ (см. замечание ниже). Следовательно,

$$[\partial_X T(e) - T(\partial_X e), u(A)] = 0 \tag{5.35}$$

для всех $X \in \mathrm{T}\widetilde{W}$, $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$.

Для перечисленных в условии леммы типов представления u из коммутативности оператора со всеми операторами представления вытекает скалярность оператора. Для неприводимого представления это лемма Шура, для фермионного это вытекает из единственности вакуумного вектора (разумеется, между этими классами представлений имеется пересечение).

Замечание. $\partial_X e$ является локальным векторным полем, точнее, сечением пучка $\tilde{\mathcal{L}}$. Следовательно, для доказательства (5.35) нам нужно соотношение (5.33) для локальных векторных полей. По определению, данному после формулировки предложения 5.10, представления $T(e)$ и $u(A)$ корректно определены также на локальных векторных полях и функциях соответственно, с сохранением соотношения (5.33). Действительно, для $A \in \mathcal{A}$, однородного элемента $v \in V$ и произвольного n существует частичная сумма $\tilde{e}$ разложения векторного поля $\partial_X e$, такая что $(u((\partial_X e)A)v)_n = (u(\tilde{e}A)v)_n$ и $([T(\partial_X e), u(A)]v)_n = ([T(\tilde{e}), u(A)]v)_n$ где $(\cdot)_n$ обозначает проекцию на компоненту степени n в $\widetilde{V}$. Ввиду (5.33) правые части двух последних соотношений равны, следовательно, их левые части также равны. Отсюда следует соотношение (5.33) с $\partial_X e$ вместо e.

Цель оставшейся части раздела – доказать проективную плоскостность связности (5.30) и ввести соответствующий аналог уравнений Книжника–Замолодчикова.

Теорема 5.13. *∇_X является проективно плоской связностью в расслоении конформных блоков.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}[\nabla_X, \nabla_Y] &= [\partial_X + T(\rho(X)), \partial_Y + T(\rho(Y))] = \\ &= [\partial_X, \partial_Y] + [\partial_X, T(\rho(Y))] - [\partial_Y, T(\rho(X))] + \\ &\quad + [T(\rho(X)), T(\rho(Y))]. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Так как T – проективное представление алгебры $\mathcal{L}$ и ввиду соотношений $[\partial_X, T(\rho(Y))] = \partial_X T(\rho(Y))$, $[\partial_Y, T(\rho(X))] = \partial_Y T(\rho(X))$, мы можем переписать (5.36) в следующей форме:

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \partial_{[X,Y]} + T(\partial_X \rho(Y) - \partial_Y \rho(X) + [\rho(X), \rho(Y)]) + \lambda \cdot \mathrm{id}\,. \tag{5.37}$$

Здесь мы пользовались также леммой 5.12. Согласно [66, лемма 1.3.8]

$$\partial_X \rho(Y) - \partial_Y \rho(X) + [\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X,Y]). \tag{5.38}$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned}[\nabla_X, \nabla_Y] = \partial_{[X,Y]} + T(\rho([X,Y])) + \lambda \cdot \mathrm{id} = \\ = \nabla_{[X,Y]} + \lambda \cdot \mathrm{id}\,.\end{aligned} \tag{5.39}$$

Следующие уравнения горизонтальных сечений связности ∇_X мы рассматриваем как обобщение уравнений Книжника–Замолодчикова:

$$\nabla_X \Psi = 0, \quad X \in H^0\big(\widetilde{W}, \mathrm{T}\mathcal{M}^{(1)}_{g,N+1}\big) \tag{5.40}$$

где Ψ – сечение пучка конформных блоков. Эти уравнения предложены в [50], где, в частности, оператор ∇_X был явно вычислен для $g = 0$, $g = 1$ и несколько другого выбора представлений аффинной алгебры (вычисление сохраняет силу и в рассматриваемом здесь случае).

Для того чтобы получить здесь конечное число уравнений, возьмем в качестве X образы базисных векторов подпространства $\mathcal{L}_{(0)}$, введенного в следствии 5.5.

5.5. Явный вид уравнений Книжника–Замолодчикова для родов 0 **и** 1**.** Применяя (4.12) и полагая

$$l_k^{(n,p)(m,s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\tau} \omega^{(n,p)}\omega^{(m,s)} v_k,$$

где $\{v_k\}$ – базис в $\mathcal{L}_{(0)}$ (см. конец предыдущего раздела), уравнения (5.40) можно переписать как

$$\left(\partial_k - \frac{1}{c+\kappa}\sum_{n,m,p,s} l_k^{(n,p)(m,s)} :u(n,p)u(m,s):\right)\Phi = 0. \tag{5.41}$$

Явный вид уравнений для $g = 0$. Покажем, как получить из (5.41) оригинальные уравнения Книжника–Замолодчикова [21, уравнение (3.21)]:

$$\left(\nu\frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{j\neq i}\frac{t_i^a t_j^a}{z_i - z_j}\right)\Phi = 0, \qquad i = 1,\dots,N, \tag{5.42}$$

где $\nu \in \mathbb{C}$.

Пусть z_i $(i = 1,\dots,N)$ – N отмеченных точек на римановой сфере; зафиксируем контрольную точку z_∞ в ∞. Мы полагаем $\alpha(i) := \prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}(z_i - z_l)^{-1}$ для $i = 1,\dots,N$. Для каждой точки z_i $(i = 1,\dots,N)$ элементы базиса Кричевера–Новикова степени (-1) для квадратичных дифференциалов и для векторных полей, даются соответственно формулами

$$\Omega^i(z) := \Omega^{-1,i} = \frac{dz^2}{z - z_i}, \qquad e_i(z) := e_{-1,i} = \left(\alpha(i)\prod_{j\neq i}(z - z_j)\right)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.43}$$

Векторное поле e_i равно $\frac{\partial}{\partial z}$ в точке z_i и обращается в 0 во всех других точках z_j, $j \neq i$. Следовательно, e_i соответствует базисному направлению ∂_i на конфигурационном пространстве, отвечающему за сдвиг точки z_i. С другой стороны, e_i – в точности дуальное по Кричеверу–Новикову векторное поле к квадратичному дифференциалу Ω^i. Это вытекает из подсчета вычетов.

Коэффициенты $l_k^{(m,i)(n,j)}$ даются формулой

$$l_k^{(m,i)(n,j)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \omega^{(m,i)}\omega^{(n,j)}e_k. \tag{5.44}$$

В рациональном случае выражение базисных тензоров очевидно:

$$f_{n,p}^{\lambda}(z) = (z - z_p)^{n-\lambda}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{N}(z - z_i)\right)^{n-\lambda+1}\left(\prod_{i=1 i\neq p}^{N}(z_p - z_i)\right)^{-n+\lambda-1} dz^{\lambda}. \tag{5.45}$$

Из (5.45)

$$\omega^{(m,i)} = \frac{\alpha(i)^{-m}\,dz}{(z - z_i)\prod_{s=1}^{N}(z - z_s)^m}. \tag{5.46}$$

Следовательно, подынтегральное выражение в (5.44) равно

$$\frac{\alpha(i)^{-m}\alpha(j)^{-n}\alpha(k)\,dz}{(z - z_i)(z - z_j)(z - z_k)\prod_{s=1}^{N}(z - z_s)^{m+n-1}}. \tag{5.47}$$

Коэффициенты (5.44) могут быть получены суммированием вычетов в точках $z_1, \dots, z_N$ (или путем взятия вычета в точке z_∞ с обратным знаком). Заметим, что если $m+n \leqslant -2$, или $m+n=-1$, но неверно, что $i=j=k$, то все вычеты в точках $z_1, \dots, z_N$ равны нулю. Если $m+n>0$, вычет обращается в ноль в z_∞. Здесь мы рассматриваем только случай когда Φ в (5.41) – это вектор, который аннулируется подалгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}_+$; заметим, что оригинальные уравнения KZ были получены при том же предположениив [21]. Но тогда если $m+n=0$ и $m, n \neq 0$, то либо m, либо n положительно, и следовательно $:u(m,i)u(n,j):\Phi=0$, так как благодаря нормальному упорядочению элементы положительной степени окажутся справа. Ненулевые коэффициенты в (5.41) для данного $i, k = 1, \dots, N$, $i \neq k$, таковы:

$$
\begin{aligned}
l_k^{(0,i)(0,i)} &= \frac{\alpha(i)^{-1}\alpha(k)}{z_i - z_k}, &\qquad l_k^{(0,i)(0,k)} &= l_k^{(0,k)(0,i)} = \frac{1}{z_k - z_i}, \\
l_k^{(0,k)(0,k)} &= \sum_{i\neq k} \frac{1}{z_k - z_i}, &\qquad l_k^{(-1,k)(0,k)} &= l_k^{(0,k)(-1,k)} = \alpha(k)^2.
\end{aligned} \tag{5.48}
$$

В оставшейся части этого раздела мы покажем, что модифицируя базисные векторные поля e_k с помощью добавления вертикальных векторных полей (то есть векторных полей, имеющих нули во всех точках z_i и, следовательно, не сдвигающих точек), применяя некоторый процесс факторизации, и вычисляя структурные постоянные по отношению к этому базису, можно обратить в ноль все коэффициенты, кроме тех, для которых $m=n=0$, а верхние индексы различны. Следовательно, уравнения (5.41) (выписанные уже в модифицированном базисе) будут иметь следующий вид:

$$
\left(\partial_i - \frac{1}{c+k}\sum_{j\neq i} \frac{:u(0,i)u(0,j): + :u(0,j)u(0,i):}{z_i - z_j}\right)\Phi = 0, \tag{5.49}
$$

где $i = 1, \dots, N$.

Заметим, что коэффициенты $l_k^{(0,i)(0,j)}$ $(i \neq j)$ могут быть также получены из разложения

$$
\begin{aligned}
\omega^{0,i}(z)\omega^{0,j}(z) &= \frac{dz^2}{(z-z_i)(z-z_j)} = \frac{1}{z_i - z_j}\left(\frac{dz^2}{z-z_i} - \frac{dz^2}{z-z_j}\right) \\
&= \frac{1}{z_i - z_j}(\Omega^i - \Omega^j) \quad (i \neq j),
\end{aligned}
$$

откуда следует

$$l_k^{(0,i)(0,j)} = \begin{cases} 0, & k \neq i \text{ и } k \neq j, \\ \frac{1}{z_k - z_j}, & k = i, \\ -\frac{1}{z_i - z_k}, & k = j. \end{cases} \tag{5.50}$$

Изменим векторные поля e_k, $k = 1, \dots, N$ так, чтобы обратить в ноль вклад членов с $i = j$, $m = n = 0$ (не меняя при этом коэффициентов с $i \neq j$). Положим $\widetilde{\Omega}^i := \omega^{0,i}\omega^{0,i} = \frac{dz^2}{(z-z_i)^2}$. Обозначим форму (1.6), задающую двойственность Кричевера–Новикова между 2-дифференциалами и векторными полями, угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда

$$\langle \widetilde{\Omega}^i, e_k \rangle = \frac{1}{z_k - z_i} \prod_{s \neq i,k} \frac{z_i - z_s}{z_k - z_s} \quad \text{при} \quad k \neq i \tag{5.51}$$

и

$$\langle \widetilde{\Omega}^k, e_k \rangle = \sum_{s \neq k} \frac{1}{z_k - z_s}. \tag{5.52}$$

Перейдем от набора векторных полей $\{e_k \,|\, k = 1, \dots, N\}$ к набору векторных полей $\{e'_k \,|\, k = 1, \dots, N\}$, где

$$e'_k := e_k + \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ki} E_i, \quad \lambda_{ki} \in \mathbb{C}, \tag{5.53}$$

и $\{E_s \,|\, s = 1, \dots, N\}$ – базисные элементы Кричевера–Новикова нулевой степени для векторных полей, то есть

$$E_i := e_{0,i} = (z - z_i) \prod_{s \neq i} \frac{(z - z_s)^2}{(z_i - z_s)^2} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.54}$$

Лемма 5.14. (a) E_i – *вертикальное векторное поле* ($i = 1, \dots, N$).

(b) $\langle \widetilde{\Omega}^i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, N)$.

(c) $\langle \Omega^i, E_j \rangle = 0$ $(i, j = 1, \dots, N)$

Доказательство. (a) следует из того, что векторные поля E_k имеют нули во всех точках $\{z_s \,|\, s = 1, \dots, N\}$.

(b) По определению

$$\langle \widetilde{\Omega}^i, E_j \rangle = \sum_{p=1}^{N} \operatorname{res}_{z_p} \frac{(z - z_j)}{(z - z_i)^2} \prod_{s \neq j} \frac{(z - z_s)^2}{(z_j - z_s)^2} \, dz.$$

Если $i \neq j$, то 1-форма в правой части последнего соотношения голоморфна и все ее вычеты равны нулю. Если $i = j$, то все вычеты равны нулю, кроме вычета в точке z_i, где он равен 1.

(c) Все 1-формы $\Omega^i E_j$, $i, j = 1, \ldots, N$, голоморфны, что доказывает утверждение, см. также (1.7).

По лемме 5.14 (a) векторные поля $\{e'_k \,|\, k = 1, \ldots, N\}$, так же как и векторные поля $\{e_k \,|\, k = 1, \ldots, N\}$, соответствуют базисным инфинитезимальным деформациям ∂_i. По лемме 5.14 (c) коэффициенты $l_k^{(m,i)(n,j)}$ $(i \neq j)$ не меняются при замене векторных полей $\{e_k \,|\, k = 1, \ldots, N\}$ полями $\{e'_k \,|\, k = 1, \ldots, N\}$.

Теперь найдем коэффициенты λ_{ki} в (5.53) так что

$$\langle e'_k, \widetilde{\Omega}^i \rangle = 0, \qquad i, k = 1, \ldots, N. \tag{5.55}$$

Это означает, что $l_k^{(0,i)(0,i)} = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$, если эти коэффициенты вычислены по отношению к векторным полям $\{e'_k \,|\, k = 1, \ldots, N\}$. Напомним, что $\widetilde{\Omega}^i = \omega^{0,i}\omega^{0,i}$.

Уравнение (5.55) означает

$$\langle e_k + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{ks} E_s, \widetilde{\Omega}^i \rangle = 0, \qquad i, k = 1, \ldots, N. \tag{5.56}$$

По лемме 5.14 (b) это эквивалентно $\langle e_k, \widetilde{\Omega}^i \rangle + \lambda_{ki} = 0$. Следовательно, (5.55) выполняется тогда, и только тогда, когда $\lambda_{ki} = -\langle e_k, \widetilde{\Omega}^i \rangle$.

С учетом (5.51), (5.52), это дает нам явные выражения для e'_k:

$$e'_k = e_k + \sum_{i \neq k} \frac{\prod_{s=1}^{N}(z - z_s)^2}{z_k - z_i} \cdot \alpha(k) \left(\frac{\alpha(i)}{z - z_i} - \frac{\alpha(k)}{z - z_k} \right) \frac{\partial}{\partial z},$$

где $i, k = 1, \ldots, N$. Заметим, что теперь могут встретиться ненулевые коэффициенты с $m + n = 1$. Но используя снова предположение, что $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ аннулирует Φ, и нормальное упорядочение, получим, что соответствующие операторные члены не войдут в окончательное уравнение.

Наконец, член $l_k^{(0,k)(-1,k)}(\,{:}u(0,k)u(-1,k){:} + {:}u(-1,k)u(0,k){:}\,)$ уравнения (5.41) может быть устранен либо оставлением в результирующем уравнении только элементов нулевой степени, либо переходом к фактор-пучку $V/\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}V$ конформных блоков (в рациональном случае $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ начинается со степени -1). Для этого надо предположить, что $:u(0,k)u(-1,k): \; = \; :u(-1,k)u(0,k): \; = u(-1,k)u(0,k)$. Стандартное нормальное упорядочение (4.10) обладает этим свойством.

Окончательно, пусть V – модуль Верма (3.27). Возьмем Φ из $\mathfrak{g}$-модуля $V_\lambda = V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}$ (см. раздел 3.6). Если предположить, что u_a – автодуальный базис алгебры $\mathfrak{g}$, взять стандартное нормальное упорядочение и положить $u_a(0,i)\Phi = t_i^a \Phi$, то

$$u_a(0,j)u_a(0,i)\Phi = t_j^a t_i^a \, \Phi = t_i^a t_j^a \, \Phi \quad \text{для} \quad j \neq i$$

(t_i^a и t_j^a коммутируют при $i \neq j$, так как они действуют в разных компонентах тензорного произведения). Следовательно, (5.49) приобретает вид (5.42) с $\nu = (c+\kappa)/2$.

Явный вид уравнений для $g = 1$. Цель этого раздела – получить явные выражения для коэффициентов уравнений Книжника–Замолодчикова через σ-функцию Вейерштрасса. Необходимые для этого выражения базисных элементов Кричевера–Новикова в эллиптическом случае собраны в нижеследующем разделе 5.5.

1. Возьмем следующее множество векторных полей, соответствующих движениям точек $z_1, \dots, z_N$: $e_k(z) = A_{0,k}(z)\frac{\partial}{\partial z}$, $k = 1, \dots, N$, (см. раздел 5.5), или, явно,

$$e_k(z) = \prod_{s\neq k} \frac{\sigma(z-z_s)}{\sigma(z_k-z_s)} \cdot \frac{\sigma(z_k-z_0)^N}{\sigma(z-z_0)^N} \cdot \frac{\sigma(z+\sum_{s\neq k} z_s - Nz_0)}{\sigma\left(\sum_{s=1}^N z_s - Nz_0\right)} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.57}$$

Здесь z_0 – фиксированная контрольная точка. Наша первая цель – найти вклад в уравнения членов вида $l_k^{(m,i)(n,j)} \times$ $:u(m,i)u(n,j):$. Заметим, что в силу соотношений двойственности $\omega^{m,i} = A_{-m-1,i}\, dz$. Рассмотрим несколько случаев. Как и для рода ноль, пусть Φ – элемент пространства представления, аннулируемый подалгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}_+$.

1.1. $m \neq 0$, $n \neq 0$. Определим $\widetilde{\omega}^{m,i}$, $\widetilde{\omega}^{n,j}$, $\tilde{e}_k$ соотношениями $\omega^{m,i} = \sigma(z-z_i)^{-1}\widetilde{\omega}^{m,i}$, $\omega^{n,j} = \sigma(z-z_j)^{-1}\widetilde{\omega}^{n,j}$, $e_k = \sigma(z-z_k)^{-1}\tilde{e}_k$. Тогда $\operatorname{ord}_{z_s} \widetilde{\omega}^{m,i} = -m$, $\operatorname{ord}_{z_s} \widetilde{\omega}^{n,j} = -n$, $\operatorname{ord}_{z_s} \tilde{e}_k = 1$ ($s = 1, \dots, N$), $\operatorname{ord}_{z_0} \widetilde{\omega}^{m,i} = Nm$, $\operatorname{ord}_{z_0} \widetilde{\omega}^{n,j} = Nn$, $\operatorname{ord}_{z_0} \tilde{e}_k = -N$. Положим $\widetilde{\omega}_k^{(m,i)(n,j)} := \widetilde{\omega}^{m,i}\widetilde{\omega}^{n,j}\tilde{e}_k$. Следовательно,

$$\omega^{m,i}\omega^{n,j}e_k = \frac{\widetilde{\omega}_k^{(m,i)(n,j)}}{\sigma(z-z_i)\sigma(z-z_j)\sigma(z-z_k)}. \tag{5.58}$$

и $\operatorname{ord}_{z_s} \widetilde{\omega}_k^{(m,i)(n,j)} = -m-n+1$ для всех $s = 1, \ldots, N$. Если $m+n \geqslant 1$, то (5.58) голоморфно в точке z_0. Если $m+n = 0$, то либо $m > 0$, либо $n > 0$. В обоих случаях $:u(m,i)u(n,j)\colon \Phi = 0$. По той же причине в случае $m+n = -1$ имеем $m = 0$, $n = -1$ (или наоборот). Но в этом разделе мы предполагаем $m \neq 0$, $n \neq 0$, таким образом, этот случай не возникает. Остается $m+n \leqslant -2$. Тогда для порядка числителя в (5.58) имеем $\operatorname{ord}_{z_s} \widetilde{\omega}_k^{(m,i)(n,j)} = -m-n+1 \geqslant 3$ $(s = 1, \ldots, N)$, следовательно, 1-форма голоморфна во всех отмеченных точках, даже если некоторые, или все точки z_i, z_j, z_k совпадают.

Следовательно, рассматриваемый случай не дает вклада в уравнения Книжника–Замолодчикова.

1.2. $m = 0$, $n \neq 0$ (или наоборот). Пусть $\omega^{0,i} = \widehat{\omega}^{0,i} - \sum_{s=1}^N \gamma_{i,s}\omega^{-1,s}$ где $\widehat{\omega}^{0,i} = A'_{-1,i}dz$, $A'_{-1,i}$ определены соотношениями (5.72), а $\gamma_{i,s}$ – соотношениями (5.73). Порядок суммы в правой части последнего соотношения в любой из движущихся точек определен порядком его первого слагаемого (другие члены имеют большие порядки). Если $n > 0$, то $:u(0,i)u(n,j)\colon \Phi = 0$. Используя определение e_k и соотношения $\omega^{m,i} = A_{-m-1,i}\, dz$ получаем $\widehat{\omega}^{0,i}\omega^{n,j}e_k = A'_{-1,i}A_{-1-n,j}A_{0,k}\, dz$. Из выражений (5.57), (5.75)–(5.77) получается следующее: если $n \leqslant -2$, то $-n+1 \geqslant 3$ и $\widehat{\omega}^{0,i}\omega^{n,j}e_k$ голоморфно в любой отмеченной точке. Так как $n \neq 0$, остается только рассмотреть случай $n = -1$. В этом случае $\widehat{\omega}^{0,i}\omega^{n,j}e_k$ имеет в отмеченных точках полюсы порядка не более 1. Так будет, только если $i = j = k$. В частности, члены с γ голоморфны и не дают вклада в результат. Простое вычисление вычетов дает

$$l_k^{(0,k)(-1,k)} = 1 \qquad (k = 1, \ldots, N). \tag{5.59}$$

Тем же путем мы получаем симметричное выражение $l_k^{(-1,k)(0,k)} = 1$.

1.3. $m = n = 0$. Чтобы найти $l_k^{(0,i)(0,j)}$, нужно рассмотреть 1-формы $\omega^{0,i}\omega^{0,j}e_k$, где $\omega^{0,i} = \widehat{\omega}^{0,i} - \sum_{s=1}^N \gamma_{is}\omega^{-1,s}$, $\omega^{0,j} = \widehat{\omega}^{0,j} - \sum_{r=1}^N \gamma_{jr}\omega^{-1,r}$. Члены $\omega^{-1,s}\omega^{-1,r}e_k$ голоморфны, так как таковы все их множители. Член вида $\omega^{-1,s}\widehat{\omega}^{0,j}e_k$ может иметь полюс (причем обязательно порядка 1) только если $s = j = k$ (и голоморфен в остальных случаях). Таким образом

$$l_k^{(0,i)(0,j)} = \langle \widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}, e_k\rangle - (\gamma_{jk}\delta_i^k + \gamma_{ik}\delta_j^k)\langle \omega^{-1,k}\widehat{\omega}^{0,k}, e_k\rangle.$$

Второе скалярное произведение уже было найдено и равно $l_k^{(0,k)(-1,k)}$, что есть просто 1. Для первого члена $\widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}e_k = A'_{-1,i}A'_{-1,j}A_{0,k}\,dz$. В случае $i \neq j$ эта 1-форма имеет вычет в точке z_i, если $i = k$, и в точке z_j если $j = k$ (если i, j, k попарно различны, то 1-форма голоморфна). Для $i = k \neq j$ имеем

$$l_k^{(0,k)(0,j)} = \frac{1}{\sigma(z_k - z_j)}\frac{\sigma(z_k - w_1)\sigma(z_k - w_2)\sigma(z_j - z_0)}{\sigma(z_j - w_1)\sigma(z_j - w_2)\sigma(z_k - z_0)} - \gamma_{jk} \quad (5.60)$$

и аналогичное выражение для $i \neq k = j$. В (5.60) $w_1 + w_2 = z_i + z_0$ и w_1 то же самое, что и в (5.77). Заметим, что в случае $i = k \neq j$ этот коэффициент стоит при операторнозначном множителе $:u(0,k)u(0,j):$, а в случае $i \neq k = j$ при множителе $:u(0,i)u(0,k):$.

Точно так же, как в случае $g = 0$, добавляя к e_k определенные векторные поля степени 0, мы можем обратить в ноль вклад от $\omega^{0,i}\omega^{0,i}$. Таким образом мы приходим к следующей форме уравнений Книжника–Замолодчикова, соответствующих движущимся точкам $(k = 1, \dots, N)$:

$$\partial_k\Phi - \frac{1}{c+k}\sum_{i\neq k} l_k^{(0,k)(0,i)}\big(:u(0,k)u(0,i): + :u(0,i)u(0,k):\big)\Phi - \\ - \frac{1}{c+k}\sum_{i=1}^{N}\big(:u(0,i)u(-1,i): + :u(-1,i)u(0,i):\big)\Phi = 0. \quad (5.61)$$

2. Теперь рассмотрим уравнения, соответствующие деформациям комплексной структуры (то есть изменению модулярных параметров). Рассмотрим следующее векторное поле:

$$e_0 = \sigma(z - E)^{N+1}\sigma(z - z_0)^{-1}\prod_{s=1}^{N}\sigma(z - z_s)^{-1}\frac{\partial}{\partial z},$$

где $E = (N+1)^{-1}(z_0 + z_1 + \dots + z_N)$.

Векторное поле e_0 имеет простые полюсы во всех точках $z_1, \dots, z_N, z_0$. Из следующей леммы вытекает, что соответствующий касательный вектор на пространстве модулей нетривиален и что он не зависит от касательных векторов, порожденных векторными полями $e_1, \ldots, e_N$. Следовательно, он соответствует деформации комплексной структуры. В лемме вертикальные векторные поля рассматриваются по отношению к пространству модулей $\mathcal{M}_{g,N}$.

Лемма 5.15. *Для точек $z_1, \ldots, z_n, z_0$ в общем положении векторное поле e_0 не может быть представлено как линейная комбинация векторных полей $e_1, \ldots, e_N$ и вертикальных векторных полей.*

Доказательство. Так как векторные поля $e_1, \ldots, e_N$ регулярны в точках $z_1, \ldots, z_N$, их вычеты в точке z_0 – нулевые (на эллиптической кривой можно говорить о вычетах векторных полей). Все вертикальные векторные поля также имеют нулевой вычет в z_0. Это очевидно для тех из них, которые регулярны в точке z_0. Но те, которые имеют нули в точках $z_1, \ldots, z_N$, также имеют нулевой вычет в точке z_0, поскольку сумма всех их вычетов обращается в ноль. Напротив, векторное поле e_0 имеет простой полюс в точке z_0 с ненулевым вычетом в общей точке рассматриваемого пространства модулей. Этим лемма доказана.

Рассмотрим несколько случаев, как и раньше.

2.1. $m, n \neq 0$. Определим $\widetilde{\omega}_0^{(m,i)(n,j)}$ из соотношения

$$\omega^{m,i}\omega^{n,j}e_0 = \frac{\widetilde{\omega}_0^{(m,i)(n,j)}}{\sigma(z-z_i)\sigma(z-z_j)}, \tag{5.62}$$

Тогда $\operatorname{ord}_{z_s} \tilde{\omega}_0^{(m,i)(n,j)} = -m-n-1$ $(s = 1, \ldots, N)$. Так как порядок знаменателя в (5.62) может равняться самое большее двум, 1-форма (5.62) голоморфна в точках $z_1, \ldots, z_N$, если только $-m-n-1 \geqslant 2$, то есть если $m+n \leqslant -3$. Если $m > 0$ или $n > 0$, то $:u(m,i)u(n,j)\colon \Phi = 0$. Таким образом, либо $m+n = -1$, либо $m+n = -2$. Так как $m, n \neq 0$, первый случай отпадает, а во втором случае остается только $m = n = -1$. В этом случае также $i = j$, поскольку в противном случае (5.62) голоморфно. Используя явные формулы, получим

$$l_0^{(-1,i)(-1,i)} = \sigma(z_i - E)^{N+1}\sigma(z_i - z_0)^{-1}\prod_{s\neq i}\sigma(z_i - z_s)^{-1} \tag{5.63}$$

для $i = 1, \ldots, N$.

2.2. $m = 0, n \neq 0$ (или наоборот). В этом случае в (5.62) следует положить $m = 0$. Тогда $\mathrm{ord}_{z_s} \widetilde{\omega}^{(0,i)(n,j)} = -(n+1)$ $(s = 1, \ldots, N)$. Если $n > 0$, то $:u(0,i)u(n,j):\Phi = 0$. Если $-(n+1) \geqslant 2$, то есть $n \leqslant -3$, 1-форма (5.62) голоморфна. Следовательно, остается только рассмотреть случаи $n = -1$ и $n = -2$.

Если $n = -1$, то

$$\omega^{0,i}\omega^{-1,j}e_0 = \widehat{\omega}^{0,i}\omega^{-1,j}e_0 - \sum_{s=1}^{N} \gamma_{i,s}\omega^{-1,s}\omega^{-1,j}e_0.$$

Если $s \neq j$, то 1-формы $\omega^{-1,s}\omega^{-1,j}e_0$ голоморфны во всех движущихся точках (см. выше). Если $s = j$, то вклад от этих 1-форм равен $l_0^{(-1,j)(-1,j)}$ (см. пункт 2.1). Более того,

$$\widehat{\omega}^{0,i}\omega^{-1,j}e_0 = \frac{F(z)}{\sigma(z - z_i)\sigma(z - z_j)}\,dz,$$

где

$$\begin{aligned} F(z) := A'_{-1,i}(z)A_{0,j}(z)\times \\ \times\,\sigma(z - z_0)^{-1}\sigma(z - E)^{N+1}\sigma(z - z_i)\prod_{s\neq j}\sigma(z - z_s)^{-1}, \end{aligned}$$

и $A'_{-1,i}(z)$, $A_{0,j}(z)$ введены на стр. 115. Как следует из раздела 5.5, $F(z)$ имеет порядок 0 в точках $z_1, \ldots, z_N$. Если $i \neq j$, то имеется два вычета: в точке z_i и в точке z_j. Таким образом, мы получаем

$$l_0^{(0,i)(-1,j)} = \frac{F(z_i) - F(z_j)}{\sigma(z_i - z_j)} - \gamma_{ij}l_0^{(-1,j)(-1,j)} \quad \text{для} \quad i \neq j. \tag{5.64}$$

Этот вычет входит в уравнения с операторнозначным коэффициентом $:u(0,i)u(-1,j):$. Более того, $l_0^{(-1,i)(0,j)} = l_0^{(0,j)(-1,i)}$, но он входит с операторнозначным коэффициентом $:u(-1,i)u(0,j):$. В случае $i = j$ возникают полюса второго порядка и

$$l_0^{(0,i)(-1,i)} = \frac{d}{dz}\big((z - z_i)^2F(z)\big)\Big|_{z=z_i} - \gamma_{ii}l_0^{(-1,i)(-1,i)}.$$

Рассмотрим теперь случай $n = -2$. Тогда порядок числителя в (5.62) равен 1 во всех отмеченных точках. Таким образом вычет может быть ненулевым только если $i = j$. Дополнительные члены

$\gamma_{is}\omega^{-1,s}\omega^{-2,i}e_0$ голоморфны и не дадут вклада в уравнение. Из явных формул имеем

$$l_0^{(0,i)(-2,i)} = \sigma(z_i - E)^{N+1}\sigma(z_i - z_0)^{-1}\prod_{s\neq i}\sigma(z_i - z_s)^{-1}. \qquad (5.65)$$

2.3. $m = n = 0$. Тогда

$$\omega^{0,i}\omega^{0,j}e_0 = \widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}e_0 - \sum_{s=1}^{N}\gamma_{is}\omega^{-1,s}\widehat{\omega}^{0,j}e_0 - \sum_{r=1}^{N}\gamma_{jr}\omega^{-1,r}\widehat{\omega}^{0,i}e_0 + \\ + \sum_{s,r=1}^{N}\gamma_{is}\gamma_{jr}\omega^{-1,s}\omega^{-1,r}e_0.$$

Вклады членов с γ могут быть выражены через коэффициенты, вычисленные в пунктах 2.1 и 2.2. Для первого члена рассматриваемой суммы имеем $\widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}e_0 = F_{ij}(z)\,dz$, где

$$F_{ij}(z) = C_{-1,i}^{-1}C_{-1,j}^{-1}\frac{\sigma(z-w_1)^2\sigma(z-w_2)^2}{\sigma(z-z_i)\sigma(z-z_j)}\times \\ \times\prod_{s=1}^{N}\sigma(z-z_s)^{-1}\sigma(z-E)^{N+1}\sigma(z-z_0)^{-3} \qquad (5.66)$$

и коэффициенты даются соотношениями (5.77). Он имеет полюсы второго порядка а если $i = j$, то даже третьего порядка, в точках z_i, z_j. Соответствующие коэффициенты выглядят так:

$$l_0^{(0,i)(0,j)} = \langle\widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}, e_0\rangle - \\ - \sum_{s=1}^{N}\big(\gamma_{is}l_0^{(0,j)(-1,s)} + \gamma_{js}l_0^{(0,i)(-1,s)} + \gamma_{is}\gamma_{js}l_0^{(-1,s)(-1,s)}\big), \qquad (5.67)$$

где $\langle\widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,j}, e_0\rangle = \frac{d}{dz}\big((z-z_i)^2F_{ij}(z)\big)\big|_{z=z_i} + \frac{d}{dz}\big((z-z_j)^2F_{ij}(z)\big)\big|_{z=z_j}$ $(i\neq j)$, $\langle\widehat{\omega}^{0,i}\widehat{\omega}^{0,i}, e_0\rangle = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\big((z-z_i)^3F_{ij}(z)\big)\big|_{z=z_i}$. Все члены уравнений, которые содержат $u(n,j)$, $n < -1$, могут быть уничтожены при помощи факторизации по $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$, как в разделе 5.5, и мы получим уравнения, соответствующие деформации комплексной структуры, в следующем виде:

$$\partial_0\Phi - \frac{1}{c+k}\sum_{i,j=1}^{N} l_0^{(0,i)(0,j)} :u(0,i)u(0,j):\Phi -$$

$$- \frac{1}{c+k} \sum_{i,j=1}^{N} l_0^{(0,i)(-1,j)} (:u(0,i)u(-1,j): + :u(-1,j)u(0,i):)\Phi -$$

$$- \frac{1}{c+k} \sum_{i=1}^{N} l_0^{(-1,i)(-1,i)} :u(-1,i)u(-1,i): \Phi = 0. \qquad (5.68)$$

Дополнение: Базис Кричевера–Новикова для эллиптического случая. В эллиптическом случае (то есть при $g = 1$) каноническое расслоение $\mathcal{K}$, и, следовательно, все его степени, тривиальны. Из этого следует, что для всех весов λ здесь необходимы другие условия на часть базисных элементов. В этом дополнении приведены измененные условия. Более того, для базисных элементов даны явные выражения в терминах σ-функции Вейерштрасса.

Из тривиальности канонического расслоения мы имеем следующее соотношение между базисными элементами пространства $\mathcal{F}^\lambda$:

$$f_{n,p}^{\lambda} = A_{n-\lambda,p}\, dz^{\lambda}. \qquad (5.69)$$

В частности, фиксация базиса в $\mathcal{F}^0$ дает базис в $\mathcal{F}^\lambda$. Стандартное условие в ситуации $(N, 1)$ с входящими точками $\{P_1, P_2, \ldots, P_N\}$ и выходящей точкой $\{P_\infty\}$ таково:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{P_p}(A_{n,p}) = n, \quad \mathrm{ord}_{P_i}(A_{n,p}) = n+1 \ \text{ для } \ i \neq p, \\ &\mathrm{ord}_{P_\infty}(A_{n,p}) = -N(n+1). \end{aligned}$$

Для ситуации $(1, 1)$ положим, как и выше, $A_0 = 1$ и $A'_{-1}\, dz = \rho = (\omega^0)'$. Чтобы выполнялись соотношения двойственности, следует модифицировать эти элементы. Положив

$$A_{-1} := A'_{-1} - \frac{c}{2} A_0, \qquad (5.70)$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi i} \oint_C {A'_{-1}}^2\, dz \qquad (5.71)$$

получим требуемые соотношения, именно, $\langle A_{-1}, \omega^0 \rangle = 0$. Заметим, что $\omega^0 = A_{-1}\, dz$ теперь не обязательно имеет чисто мнимые периоды.

В ситуации $(N,1)$ с $N>1$ мы накладываем стандартные условия на $A_{0,p}$ и, следовательно, на $\omega^{-1,p}$, и следующие модифицированные условия при $n=-1$

$$\begin{aligned} &\operatorname{ord}_{P_p}(A'_{-1,p})=-1, \quad \operatorname{ord}_{P_i}(A'_{-1,p})=0 \text{ для } i\neq p,\\ &\operatorname{ord}_{P_\infty}(A'_{-1,p})=-1. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Добавляя к $A'_{-1,p}$ определенные линейные комбинации функций $A_{0,s}$, мы снова получаем базис, удовлетворяющий условиям дуальности. Более подробно, положим

$$\gamma_{r,p} := \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint_C A'_{-1,r}A'_{-1,p}\,dz. \tag{5.73}$$

Модифицированные базисные элементы даются формулой

$$A_{-1,r} := A'_{-1,r} - \sum_{s=1}^{N}\gamma_{r,s}A_{0,s}. \tag{5.74}$$

Явные представления базисных элементов для $g=1$ в терминах σ-функции Вейерштрасса таковы [41]:

пусть тор задан как $T=\mathbb{C} \bmod L$ с нормализованной решеткой $L=\langle 1,\tau\rangle_{\mathbb{Z}}$. Пусть $z_i\in\mathbb{C}$, $i=1,\dots,N$, – фиксированные подъемы точек $P_i\in T$ в $\mathbb{C}$, то есть $z_i \bmod L = P_i$, а z_0 – фиксированный подъем точки $P_\infty\in T$. Пусть $n\in\mathbb{Z}$ фиксировано. Для $p=1,\dots,N$ положим

$$b_{n,p} := b_{n,p}(z_1,\dots,z_N,z_0) := -(n+1)\sum_{i=1}^{N} z_i + z_p + N(n+1)z_0.$$

Если $n\neq -1$ и $N>1$ или $n\neq 0,-1$ и $N=1$, то для точек z_i и z_0 в общем положении $b_{n,p}$ не сравнимо с ними $\operatorname{mod} L$ даже при малом шевелении последних. Однако, заметим, что точки $b_{n,p}$ меняются при изменении точек z_i и z_0. В точках P_i в качестве координаты мы выберем $z_i=(z-z_i)$, $i=0,1,\dots,N$.

Предложение 5.16 [43, стр. 53]. *Пусть точки P_i, $i=1,\dots,N$, и P_∞ – общего положения. Тогда базисные элементы $A_{n,p}$ при $n\neq 0,-1$ и $N=1$, и при $n\neq -1$ и $N>1$ задаются формулой:*

$$\begin{aligned} A_{n,p}(z) = C_{n,p}^{-1}&\left(\prod_{i=1}^{N}\sigma(z-z_i)\right)^{n+1}\times\\ &\times\sigma(z-z_p)^{-1}\sigma(z-z_0)^{-N(n+1)}\sigma(z-b_{n,p}), \end{aligned} \tag{5.75}$$

где

$$C_{n,p} := \left(\prod_{i\neq p}\sigma(z_p - z_i)\right)^{n+1}\sigma(z_p - z_0)^{-N(n+1)}\sigma(z_p - b_{n,p}).$$

В частности, это корректно определенные функции на торе.

Точка $b_{n,p} \bmod L$ – дополнительный нуль базисного элемента $A_{n,p}$. Заметим, что постоянные $C_{n,p}$ также зависят от точек $z_0, \ldots, z_N$.

Для исключительных степеней результаты таковы.

Для $n = 0$: Если $N = 1$ полагаем $A_0 := 1$. Для $N > 1$ вышеприведенная формула остается справедливой. Она превращается в

$$A_{0,p} = C_{0,p}^{-1}\left(\prod_{i\neq p}\sigma(z - z_i)\right)\sigma(z - z_0)^{-N}\sigma(z + \sum_{i\neq p} z_i - Nz_0), \quad (5.76)$$

где

$$C_{0,p} := \left(\prod_{i\neq p}\sigma(z_p - z_i)\right)\sigma(z_p - z_0)^{-N}\sigma(z_p + \sum_{i\neq p} z_i - Nz_0).$$

Для $n = -1$: В этом случае порядок в точке P_∞ равен -1. Нужно найти элементы $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, такие что $w_1 + w_2 = z_p + z_0$ но $w_1, w_2 \neq z_i \bmod L$, $i = 0, \ldots, N$. Можно выбрать w_1 произвольно и этим зафиксировать w_2.

Предложение 5.17 [43]. *Для общего выбора точек*

$$A_{-1,p} = C_{-1,p}^{-1}\sigma(z - z_p)^{-1}\sigma(z - z_0)^{-1}\sigma(z - w_1)\sigma(z - (z_p + z_0 - \omega_1)), \quad (5.77)$$

где

$$C_{-1,p} := \sigma(z_p - z_0)^{-1}\sigma(z_p - w_1)\sigma(\omega_1 - z_0).$$

Произвольность выбора w_1 происходит из того, что функция определяется своими порядками в P_i и P_∞ с точностью до добавления произвольной постоянной.

Теперь $(\omega^{0,p})' = A'_{-1,p}\,dz$ и $\omega^{-1,p} = A_{0,p}\,dz$. Однако, заметим, что соотношения двойственности еще не выполнены. В частности, не выполняется условие $\langle \omega^{0,p}, A'_{-1,s}\rangle = 0$. Чтобы выполнить это условие, следует добавить к $A'_{-1,s}$ комбинацию элементов $A_{0,r}$, такую же, как в (5.73), (5.74).

6. КАЗИМИРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Описание операторов Казимира (казимиров, лапласианов) – один из центральных вопросов теории представлений алгебр Ли. Трудно перечислить все приложения казимиров. Теория специальных функций, конструкции гамильтонианов и исследование свойств квантовых систем, обладающих симметриями, теория вполне интегрируемых систем – далеко не полный список их приложений.

Во всех этих вопросах особый интерес представляют казимиры второго порядка. Ниже под словом "казимир" мы всегда имеем ввиду казимир второго порядка.

В самом общем виде казимиры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ могут быть охарактеризованы как операторы, которые

1. коммутируют с операторами $\rho(X)$ для всех (в некотором разумном смысле) представлений ρ алгебры $\mathfrak{g}$ и $X \in \mathfrak{g}$,
2. могут быть определенным и универсальным образом выражены через операторы $\rho(X)$.

Казимиры принадлежат более широкому классу *сплетающих операторов*, который получится, если опустить второе требование (то есть сохранить только требование коммутативности).

Для конечномерных полупростых алгебр Ли описание казимиров основано, главным образом, на теореме И. М. Гельфанда о центре универсальной обертывающей алгебры [12]. В бесконечномерном случае элементы этого "центра" принадлежат не самой универсальной обертывающей алгебре, а ее пополнению, состоящему из бесконечных сумм. Построение оператора в пространстве представления по такой сумме требует дополнительных мер, обеспечивающих сходимость. Поэтому в теории бесконечномерных алгебр Ли постановка задачи о казимирах видоизменяется: о казимирах имеет смысл говорить главным образом *в заданном представлении алгебры.*

С развитием теории алгебр Каца–Муди возник новый подход к построению казимиров [17], [18]. Он тесно связан с конструкцией Сугавары. Обозначим через $\mathcal{D}^1$ сумму Vir и $\widehat{\mathfrak{g}}$, центры которых отождествлены. В допустимом представлении алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ каждый элемент e алгебры Vir действует, во-первых, в силу этого представления, а во-вторых – в силу представления Сугавары. Для полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ и ее алгебры петель $\widehat{\mathfrak{g}}$, разность Δ_e этих двух действий всегда дает сплетающий оператор. Один из них называется *казимиром*, именно, тот, который соответствует векторному полю нулевой степени (мы не рассматриваем здесь вырожденный случай так называемого критического уровня, когда имеется бесконечное число казимиров).

Настоящая глава посвящена описанию казимиров второго порядка (и некоторых их обобщений) для аффинных алгебр Кричевера–Новикова.

Мы ограничиваемся алгебрами Кричевера–Новикова, которые соответствуют алгебрам $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$, представляющим простой и редуктивный случаи соответственно. В этих случаях для $\widehat{\mathfrak{g}}$ мы используем более подробные обозначения: $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ для первой из них, и $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ для второй. Здесь g обозначает род римановой поверхности, а индекс 2 отвечает числу отмеченных точек.

Наше описание казимиров основано на упомянутой выше конструкции операторов Δ_e, где Vir и аффинная алгебра Каца–Муди заменены соответствующими алгебрами Кричевера–Новикова $\widehat{\mathcal{L}}$ и $\widehat{\mathfrak{g}}$. Немедленно возникают следующие вопросы: сколько существует независимых казимиров? Почему только один сплетающий оператор из описанных выше рассматривается как казимир алгебры Кричевера–Новикова? Обычное объяснение состоит в том, что один из элементов алгебры Vir является выделенным, поскольку задает градуировку на аффинной алгебре. Это объяснение не работает в случае алгебр Кричевера–Новикова, поскольку там нет выделенных векторных полей (в частности, алгебры Кричевера–Новикова не являются градуированными). Ниже мы исследуем вопрос о числе независимых казимиров в заданном представлении алгебры Ли $\mathcal{D}^1$. Мы связываем этот вопрос с некоторым коциклом γ на $\mathcal{D}^1$. Оказывается, что только один элемент $e \in \mathcal{L}$ задает казимир, а именно тот, для которого $\gamma(e, A) = 0$ при всех $A \in \mathcal{A}$.

В заключение мы рассматриваем более слабые условия по сравнению с теми, которые определяют казимиры, а именно коммутирование не со всеми $A \in \mathcal{A}$, а только с элементами регулярной подалгебры в $\mathcal{A}$ (введенной в разделе 5.2). Операторы вида Δ_e, обладающие этим свойством, мы называем *полуказимирами*. Мы даем описание полуказимиров и устанавливаем следующую связь между ними и пространствами модулей римановых поверхностей. Пусть $\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ – пространство модулей римановых поверхностей рода g с 2 отмеченными точками $P_\pm$ и фиксированными струями локальных координат (порядка 1 в P_+ и порядка p в P_-).

Для $\Sigma \in \mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ пусть $T_\Sigma \mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ обозначает касательное пространство к этому пространству модулей в точке Σ. Рассмотрим, также, пространство коинвариантов (или *конформных блоков*) *регулярной подалгебры* $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ (определение дано в разделе 5.2) в некотором представлении алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$. Оказывается, полуказимиры корректно опрелены на конформных блоках и (по теореме 6.18) *для некоторого p существует естественное отображение пространства $T_\Sigma \mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ на пространство операторов, индуцированных полуказимирами на конформных блоках над Σ.*

6.1. Описание казимиров второго порядка. В этом разделе мы даем описание казимиров второго порядка для алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$. Пусть C_2 обозначает образованное ими пространство.

Для любой аффинной алгебры Каца–Муди существует только один казимир второго порядка – разность некоторого элемента алгебры Вирасоро и его оператора Сугавары [18]. Основное свойство этого оператора состоит в том, что он коммутирует со всеми операторами представления рассматриваемой аффинной алгебры.

Основываясь на этой идее, мы будем строить казимиры второго порядка для $\widehat{\mathfrak{g}}$ как операторы вида $\Delta_e = \hat{e} - T(e)$, где $e \in \mathcal{L}$, $\hat{e}$ – оператор представления векторного поля e, а $T(e)$ – его оператор Сугавары. Слова “второго порядка” означают, что рассматриваемые операторы квадратично зависят от операторов представления алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Рассмотрим на римановой поверхности Σ алгебру Ли $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ дифференциальных операторов вида $e + X$, $e \in \mathcal{L}$, $X \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть алгебру дифференциальных операторов Кричевера–Новикова порядка не выше 1). Как линейное пространство $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}} = \mathcal{L} \oplus \bar{\mathfrak{g}}$. В частности, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1)$ имеем $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}} = \mathcal{D}^1$. Коммутационные соотношения между векторными полями и токами в $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ хорошо известны (ср. (1.4)):

$$[e, x \otimes A] = x \otimes (eA),$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$. Ниже мы будем рассматривать проективные представления $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ (проективные $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$-модули). Такое представление определяется как представление *некоторого* центрального расширения $\widehat{\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}}$ алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$. Предполагая, что действие центрального элемента дается тождественным оператором, назовем коцикл этого центрального расширения *коциклом проективного $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$-модуля (представления)*. Как установлено в разделе 3.4, коцикл фермионного представления, будучи ограничен на $\bar{\mathfrak{g}}$, становится кратным коциклу (1.38). Мы называем проективный $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$-модуль, обладающий этим свойством, *нормализованным*, так же как и его коцикл. Мы называем проективное представление алгебры $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ *допустимым* если его ограничения на $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathcal{L}$ допустимы.

Лемма 6.1. *Для полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ и допустимого нормализованного проективного $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$-модуля V имеем*

1°. $[\hat{e}, x(A)] = x(eA)$ *для всех* $A \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{L}$.

2°. $[\Delta_e, x(A)] = 0$ *для всех* $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. 1°. Из (1.4) и определения $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$-модуля вытекает, что

$$[\hat{e}, x(A)] = x(eA) + \gamma(e, xA) \circ \mathrm{id}, \tag{6.1}$$

где γ – коцикл на $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$.

Для полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ каждый коцикл на $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ удовлетворяет условию

$$\gamma(e, xA) = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathcal{L}, \quad A \in \mathcal{A}, \quad x \in \mathfrak{g}. \tag{6.2}$$

Действительно, по определению коцикла

$$\gamma(e, [xA, yB]) + \gamma(yB, [e, xA]]) + \gamma(xA, [yB, e]) = 0$$

для всех $e \in \mathcal{L}$, $A, B \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Последнее эквивалентно соотношению

$$\gamma(e, [x, y]AB) + \gamma(yB, x(eA)]) + \gamma(xA, -y(eB)) = 0. \tag{6.3}$$

Возьмем в последнем равенстве $B \equiv 1$. Тогда

$$\gamma(yB, x(eA)]) = \gamma(y, x(eA)]) = 0,$$

так как по условию леммы γ кратно коциклу (1.38), а последний равен нулю, если один из аргументов равен константе. Далее, $eB \equiv 0$, следовательно $\gamma(xA, -y(eB)) = 0$. Первое слагаемое в (6.3) равно $\gamma(e, [x, y]A)$. Следовательно, $\gamma(e, [x, y]A) = 0$ для всех $e \in \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, она совпадает со своим коммутатором. Следовательно, (6.2) следует из последнего равенства.

Соотношения (6.1) и (6.2) доказывают пункт 1° леммы.

Пункт 2° немедленно следует из пункта 1° и теоремы 4.6 (ii).

Теперь рассмотрим на примере $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$, что происходит в случае редуктивной алгебры.

Лемма 6.2. *Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ и таких же V, e, как в лемме 6.1, выполняются следующие коммутационные соотношения*:

$$[\hat{e}, x(A)] = x(eA) + \lambda(x)\gamma(e, A) \circ \mathrm{id}, \tag{6.4}$$

где γ – коцикл на $\mathcal{D}^1$ и $\lambda(x) = l^{-1} \operatorname{tr} x$.

Доказательство. Вновь пользуемся соотношением (6.1). Произвольное $x \in \mathfrak{g}$ можно представить в виде $x = x_0 + \lambda(x)1_l$, где $x_0 \in \mathfrak{sl}(l)$, $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, а 1_l означает единичную матрицу ранга l. Очевидно, $\lambda(x) = l^{-1} \operatorname{tr} x$. Как и в доказательстве леммы 6.1, $\gamma(e, x_0A) = 0$. Следовательно, $\gamma(e, xA) = \lambda(x)\gamma(e, 1_lA)$. Очевидно, соответствие $e+A \mapsto e+1_lA$ является гомоморфизмом алгебр Ли: $\mathcal{D}^1 \to \mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$. Следовательно, $\gamma(e, 1_lA)$ определяет коцикл на $\mathcal{D}^1$, для которого мы сохраним то же обозначение γ. С этим последним коциклом и выполняется соотношение (6.4).

Лемма 6.3. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ и выполнены условия леммы 6.2. Тогда для произвольных $e \in \mathcal{L}$, $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$*

$$[\Delta_e, xA] = \lambda(x)\gamma(e, A) \circ \mathrm{id},$$

где γ – коцикл на $\mathcal{D}^1$, а $\lambda(x) = l^{-1} \operatorname{tr} x$.

Доказательство. По теореме 4.6 имеем $[T(e), x(A)] = x(eA)$. Теперь лемма следует из сравнения последнего соотношения с леммой 6.2.

В дальнейшем мы предполагаем, что V является $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{gl}(l)}$-модулем.

Определение 6.4. Те из операторов Δ_e, которые коммутируют со всеми операторами представления алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ в V называются *казимирами* (второго порядка) алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в представлении V (как для $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$, так и для $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$).

Замечание. Для $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ требование перестановочности Δ_e с $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ имеет следующий смысл. Рассмотрим фермионные представления как типичный пример. Пространство мономов данного заряда вообще говоря неприводимо относительно $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ (см. [18] для случая рода 0), но приводимо относительно $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$. Элементы подалгебры $\mathcal{A}$, вложенные в $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ как скалярные матрицы, коммутируют со всеми операторами подалгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ и следовательно, приводят фермионное представление последней. В этом случае требование перестановочности оператора Δ_e с $\mathcal{A}$ означает, что Δ_e корректно определен на $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$-подмодулях фермионного представления.

Следующая лемма представляет собой простое следствие определения 6.4 и леммы 6.3.

Лемма 6.5. *Δ_e является казимиром для $\widehat{\mathfrak{g}}$ (в некотором представлении) тогда, и только тогда, когда $\gamma(e, A) = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$, где γ – коцикл на $\mathcal{D}^1$, соответствующий рассматриваемому представлению в силу леммы* 6.3.

Замечание. Следующее утверждение показывает, что условия, налагаемые на казимиры, весьма ограничительны: *при заданном коцикле γ на $\mathcal{D}^1$ векторные поля, удовлетворяющие условию леммы* 6.5, *образуют подалгебру Ли в $\mathcal{L}$.* Чтобы доказать это, предположим, что $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$ – такие векторные поля, что $\gamma(e_1, A) = \gamma(e_2, A) = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$. По определению коцикла $\gamma([e_1, e_2], A) + \gamma(e_2, [e_1, A]) - \gamma(e_1, [e_2, A]) = 0$ для любых двух таких векторных полей и произвольного A. Два члена последнего соотношения равны 0, так как $[e_1, A]$, $[e_2, A]$ – функции. Следовательно, $\gamma([e_1, e_2], A) = 0$.

6.2. Казимиры в фермионных представлениях. В разделе 3.4 показано, что фермионное представление является нормализованным допустимым проективным модулем над $\mathcal{D}^1$ и $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$ (теорема 3.5). Как таковое, оно удовлетворяет условиям леммы 6.1, следовательно для него справедливо описание казимиров в терминах коциклов на $\mathcal{D}^1$, данное в предыдущем разделе.

Рассмотрим подробнее коциклы на $\mathcal{D}^1$, возникающие из фермионных представлений. Возьмем вакуум в виде $|0\rangle = \psi_M \wedge \psi_{M+1} \wedge \ldots$. Пусть ∇ – логарифмическая связность, имеющая в точке P_+ вид

$$\nabla = \partial + \omega \frac{dz}{z} + O(1)\, dz, \tag{6.5}$$

где ω – постоянная матрица. Для произвольного $N \in \mathbb{Z}$ пусть $n(N)$ и $j(N)$ обозначают первые две компоненты тройки (n, j, i), такие что $N = N(n, j, i)$ (раздел 3.4). Пусть ω_j – j-й диагональный элемент матрицы ω. Наше главное наблюдение здесь – следующая лемма:

Лемма 6.6. *Предположим, что мы имеем фермионное представление алгебры* $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$, *такое, что* $M<0$, ∇ *– логарифмическая связность с локальным поведением* (6.5) *в точке* P_+ *и* $\sum_{N=M}^{-1}\omega_{j(N)}\notin\mathbb{Z}$. *Тогда коцикл* γ *этого представления обладает следующими свойствами*:

1°. $\gamma(A_{-k},e_k)\neq 0$, *для всех* $k\in\mathbb{Z}$, $\kappa\neq 0$;
2°. $\gamma(A_{-k},e_m)=0$, *для всех* $m>k$;
3°. $\gamma(A_0,e_m)=0$, *для всех* $m\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. $\gamma(A_{-k},e_m)=A_{-k}\circ\nabla_{e_m}-\nabla_{e_m}\circ A_{-k}-e_mA_{-k}$. Поскольку γ – скаляр, достаточно вычислить это выражение на вауумном векторе представления.

1°. Для $m=k\neq 0$ одно из слагаемых $A_{-k}\circ\nabla_{e_k}$ или $\nabla_{e_k}\circ A_{-k}$ аннулирует вакуум. Например, для $k>0$ это будет первое слагаемое. В предположениях леммы $-\nabla_{e_k}\circ A_{-k}-e_kA_{-k}$ отлично от нуля на вакуумном векторе. Покажем это с помощью прямых вычислений с формальными рядами, например, в точке P_+.

Локально $A_{-k}=z^{-k}(1+O(z))$, $e_k=z^{k+1}(1+O(z))\frac{\partial}{\partial z}$. Подействуем этими объектами на вектор-функцию Кричевера–Новикова ψ_N степени n. Рассматривая порядки в точке $P_\pm$, можно забыть для простоты о сопряжении матрицей Ψ. Ввиду (6.5) имеем

$$\nabla_{e_k}\circ A_{-k}\psi_N=\left(z^{k+1}\frac{\partial}{\partial z}+z^k\omega_{-1}\right)(z^{-k}z^n(1+O(z))=$$
$$=(n-k+\omega_{-1})z^n(1+O(z)).$$

Для другого члена имеем $e_kA_{-k}=(-k)(1+O(z))$. Следовательно,

$$(-\nabla_{e_k}\circ A_{-k}-e_kA_{-k})\psi_N=(2k-n+\omega_j)\psi_N+\cdots,$$

где $n=n(N)$, $j=j(N)$, а многоточие обозначает члены высшей степени. Ввиду регуляризации

$$(-\nabla_{e_k}\circ A_{-k}-e_kA_{-k})\,|0\rangle=\left(\sum_{N=M}^{-1}(2k-n(N))+\omega_{j(N)}\right)|0\rangle. \quad (6.6)$$

Для $k<0$ в игру вместо $\nabla_{e_k}\circ A_{-k}$ вступает член $A_{-k}\circ\nabla_{e_k}$. Это приводит к соотношению

$$(A_{-k}\circ\nabla_{e_k}-e_kA_{-k})\,|0\rangle=\left(\sum_{N=M}^{-1}(k+n(N))+\omega_{j(N)}\right)|0\rangle. \quad (6.7)$$

Если $\sum_{N=M}^{-1}\omega_{j(N)}\notin\mathbb{Z}$, то и правая, и левая части (6.6), (6.7) отличны от нуля для любого $k\in\mathbb{Z}$. Таким образом, пункт 1° доказан.

Доказательство пунктов 2°, 3° аналогично.

По определению 6.4 и лемме 6.5 $\Delta(e)$ является казимиром тогда, и только тогда, когда

$$\gamma(A_k,e)=0,\quad \text{для всех}\quad k\in\mathbb{Z}. \quad (6.8)$$

Несложно видеть, что соотношения (6.8) образуют (бесконечную) систему линейных уравнений на векторное поле e, и мы немедленно дадим явный вид этой системы уравнений. Для этого будем искать решения (6.8) в виде

$$e=\sum_{m\geqslant m_0}a_me_m, \quad (6.9)$$

где $m_0\in\mathbb{Z}$.

Лемма 6.7. *Для каждого фермионного представления, удовлетворяющего условиям леммы* 6.6, *система уравнений* (6.8) *имеет* 1*-мерное пространство решений вида* (6.9). *Для образующей этого пространства имеем* $m_0=0$.

Доказательство. Для векторных полей вида (6.9) соотношения (6.8) выглядят следующим образом

$$\sum_{m\geqslant m_0}a_m\gamma(A_{-k},e_m)=0,\quad \text{для всех}\quad k\in\mathbb{Z},\quad k\neq 0. \quad (6.10)$$

Это бесконечная система линейных уравнений на неизвестные a_m. По лемме 6.6(1°, 2°) она имеет треугольную матрицу, следовательно для каждого $k\neq 0$ из k-го уравнения a_k можно выразить через значения a_m с $m<k$. Для $k=0$, напротив, $\gamma(A_0,e_m)=0$ для всех $m\in\mathbb{Z}$ – по лемме 6.6.3°. Таким образом, a_0 – независимая константа. Для $m<0$ $a_m=0$ поскольку последнее справедливо для достаточно больших по модулю отрицательных значений m (в соотношении (6.9) $m\geqslant m_0$). Для $m>0$ значения a_m можно выразить через a_0. Этим предложение доказано.

Объединяя леммы 6.5, 6.7, получим следующую теорему.

Теорема 6.8. *Для любого фермионного представления и связности* ∇, *удовлетворяющих условиям леммы* 6.6, *существует ровно один, с точностью до пропорциональности, казимир. Соответствующее векторное поле имеет простой ноль в* P_+.

Нормализуем казимир, существование которого утверждается в теореме 1.7, условием $a_0 = 1$. Тогда его собственное значение совпадает с собственным значением оператора $\Delta(e_0)$, поскольку по леммам 4.2, 4.9 $\Delta(\mathcal{L}_+^{(2)})$ аннулирует вакуум.

6.3. Теорема единственности в терминах аффинной связности. В предыдущих разделах описание казимиров дано в терминах коциклов на $\mathcal{D}^1$. Коциклы, в свою очередь, могут задаваться с помощью аффинной и проективной связностей, как это описано в разделах 1.5–1.8 настоящей книги. В этом разделе мы ставим задачу получить описание казимиров в терминах этих связностей (существенной оказывается только аффинная связность). В частности, это дает новое доказательство теоремы единственности предыдущего раздела.

Суммируем описание коциклов алгебры $\mathcal{D}^1$, данное в разделах 1.5–1.8 (мы имеем ввиду главным образом теорему 1.7) в виде следующей леммы:

Лемма 6.9. 1°. *Каждый локальный коцикл на* $\mathcal{D}^1$ *когомологичен коциклу вида*

$$\begin{aligned}\gamma(f_1\partial + g_1, f_2\partial + g_2) &= \\ &= \operatorname{res}_{P_+}\big(a_1[(f_1f_2''' - f_1'''f_2) + R(f_1f_2' - f_1'f_2)] + \\ &\qquad + a_2[(f_1g_2'' - f_2g_1'') + T(f_1g_2' - f_2g_1')] + a_3g_1dg_2]\big), \quad (6.11)\end{aligned}$$

где $f_1\partial$, $f_2\partial$ – *элементы алгебры Ли* $\mathcal{L}$, *записанные в локальных координатах в окрестности точки* P_+, $g_1, g_2 \in \mathcal{A}$, R *и* T – *проективная и аффинная связности соответственно*, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ (∂ – *сокращенное обозначение для* $\frac{\partial}{\partial z}$).

2°. *Если коцикл* γ *когомологичен коциклу вида* (6.11) *с* $a_1, a_2 \neq 0$, *то он равен коциклу такого вида (при, возможно, других* R *и* T).

Для нулевого рода лемма доказана в [1] (упоминание аффинных и проективных связностей в этом случае излишне), а для положительного – в [46], [47] (см. также формулировку в [50, теорема 2.5]).

Лемма 6.10. *Для коцикла γ, заданного соотношением* (6.11), *при любых $e = f\partial \in \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{A}$ выполняется следующее соотношение*:

$$\gamma(e, A) = \mathrm{res}_{P_+}\, a(fA'' + TfA'),$$

где $a = a_2$ (см. (6.11)), а T – аффинная связность, то есть поведение T при замене локальных координат может быть описано одним из трех следующих соотношений:

1°. $T(u) = T(z)u_z^{-1} + u_{zz}u_z^{-2}$;
2°. $T(u)\,du = T(z)\,dz + d\ln u_z$;
3°. *существует v, такое что* $T(z) = a\frac{\partial}{\partial z}\ln v(z)$,

где u, z – локальные параметры, $u_z = u'(z)$, $v\partial \in \mathcal{L}$ – локальное представление векторного поля.

Доказательство. Выражение для γ получается немедленно, если в лемме 6.9 положить $f_1 = f$, $g_1 = 0$, $f_2 = 0$, $g_2 = A$.

Теперь найдем закон преобразования, которому должно удовлетворять T чтобы выражение $fA''+TfA'$ было корректно определенной 1-формой. Это, очевидно, эквивалентно требованию, чтобы $\Omega_T(A) := A'' + TA'$ было квадратичным дифференциалом для каждого $A \in \mathcal{A}$. Находя с помощью простого дифференцирования закон преобразования величины A': $A_u = A_z u_z$, и величины A'': $A_{uu} = A_{zz}u_z^{-2} - A_z u_z^{-3}u_{zz}$, легко показать, что искомый закон преобразования для T может быть записан в трех вышеприведенных эквивалентных формах (эквивалентных определению аффинной связности, данному на стр. 23). Наметим, например, как из 2° вывести 3°. Путем интегрирования обеих частей равенства 2° от какой-то фиксированной точки до текущей точки P получаем $\int^P T(u)\,du = \int^P T(z)\,dz + \ln u_z$. После экспоненцирования последнее равенство дает $\exp\bigl(\int^P T(u)\,du\bigr) = \exp\bigl(\int^P T(z)\,dz\bigr)u_z$. Теперь несложно заметить, что

$$v(z) = \exp\biggl(\int^P T(z)\,dz\biggr)$$

преобразуется как векторное поле.

Замечание. Утверждение 3° леммы 6.10 обеспечивает существование величины T с требуемым законом преобразования. Можно взять произвольное векторное поле из $\mathcal{L}$ и построить T как предписано соотношением леммы 6.10 3°.

Используя лемму 6.10, можно следующим образом уточнить лемму 6.3.

Лемма 6.11. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ и представление соответствующей алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ допустимо. Тогда для произвольных $e \in \mathcal{L}$, $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$ имеем*

$$[\Delta_e, xA] = a\lambda(x)\gamma(e, A) \circ \mathrm{id},$$

где $a \in \mathbb{C}$, в локальных координатах для $e = f\partial$ выполняется следующее соотношение: $\gamma(e, A) = \mathrm{res}_{P_+}(fA'' + TfA')$ и T удовлетворяет условиям леммы 6.10.

Из лемм 6.9, 6.11 можно видеть, что только коциклы вида

$$\gamma_T(f_1\partial+g_1, f_2\partial+g_2) = \mathrm{res}_{P_+}[(f_1g_2''-f_2g_1'')+T(f_1g_2'-f_2g_1')], \quad a \in \mathbb{C}^\times$$

ответственны за перестановочность операторов Δ_e и $x(A)$.

Лемма 6.11 и лемма 6.5 позволяют дать описание казимиров в терминах квадатичных дифференциалов на римановой поверхности. Пусть γ, T, a отвечают представлению V и $\gamma(e, A) = \mathrm{res}_{P_+}(fA''+TfA')$. Тогда $A''+TA'$ – квадратичный дифференциал для каждого $A \in \mathcal{A}$. Пусть Ω_V обозначает линейное пространство всех квадратичных дифференциалов этого вида для данного T. Введем, также, обозначение $\Omega^{(2)}$ для пространства всех квадратичных дифференциалов Кричевера–Новикова и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ для спаривания между векторными полями и квадратичными дифференциалами по Кричеверу–Новикову: $\langle e, \Omega\rangle := \mathrm{res}_{P_+}(e\Omega)$ ($e \in \mathcal{L}$, $\Omega \in \Omega^{(2)}$).

Лемма 6.12. *Δ_e является казимиром алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в представлении V тогда, и только тогда, когда $\langle e, \Omega\rangle = 0$ для каждого $\Omega \in \Omega_V$.*

Доказательство. По определению формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ лемму 6.11 можно записать в виде

$$[\Delta_e, xA] = \lambda(x)\langle e, \Omega\rangle \circ \mathrm{id},$$

где $\Omega = a(A'' + TA')$. Поскольку $\lambda(x) = l^{-1}\operatorname{tr} x$, то $\lambda(1_l) = 1$, и следовательно
$$[\Delta_e, A] = \langle e, \Omega\rangle \circ \mathrm{id}\,.$$

Это соотношение означает, что Δ_e коммутирует со всеми элементами вида A и xA ($x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$) тогда и только тогда, когда $\langle e, \Omega\rangle = 0$ для всех $\Omega = a(A''+TA')$. Если A пробегает алгебру $\mathcal{A}$, то Ω пробегает пространство Ω_V. Этим лемма доказана.

Пусть $\Omega_V^{\perp} := \{e \in \mathcal{L}\colon \langle e, \Omega\rangle = 0\ \forall \Omega \in \Omega_V\}$. Мы показали, что векторные поля, принадлежащие пространству $\Omega_V^{\perp}$, порождают казимиры. Следует учесть, что те из этих векторных полей, которые лежат в подалгебре $\mathcal{L}_+^{(2)}$, порождают тривиальные казимиры, так как для них, как отмечалось в конце предыдущего раздела $\Delta(e)|0\rangle = 0$, где $|0\rangle$ – вакуум. Поскольку (по крайней мере в неприводимых представлениях) операторы вида $\hat{e}-T(e)$ скалярны, то для $e \in \mathcal{L}_+$ они попросту нулевые. Поэтому на самом деле казимиры отвечают элементам пространства $\Omega_V^{\perp}/(\Omega_V^{\perp} \cap \mathcal{L}_+^{(2)})$.

В локальных координатах z на Σ векторное поле e можно представить в виде $e = E\partial$, где $E = E(z)$ – локальная функция, $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$.

По лемме 6.12 условие того, что Δ_e является казимиром, таково:
$$\oint_{c_0} E(A'' + TA')dz = 0 \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}. \tag{6.12}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание тот факт, что A произвольно, получаем дифференциальное уравнение
$$E'' - (ET)' = 0. \tag{6.13}$$

Мы ищем его решения вида
$$E = \sum_{n\geqslant N} a_n E_n, \tag{6.14}$$

где $e_n = E_n\frac{\partial}{\partial z}$ в окрестности точки P_+.

Лемма 6.13. *Для аффинной связности T общего положения, такой, что $T(z) = O(z^{-1})$ в точке P_+, уравнение (6.13) имеет одномерное пространство решений вида (6.14), соответствующее векторному полю с поведением $e(z) = z(1 + O(z))\frac{\partial}{\partial z}$ в окрестности этой точки.*

Доказательство. Доказательство сводится к решению уравнения (6.13) в формальных степенных рядах в окрестности точки P_+. Предположим сначала для простоты что $\mathrm{ord}_{P_+} e = -1$. По предположению $E = \epsilon_{-1}z^{-1} + \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \cdots$, $T = \tau_{-1}z^{-1} + \tau_0 + \tau_1 z + \cdots$. Следовательно, для степенных рядов соотношение (6.13) выглядит так:

$$\begin{aligned} -2\epsilon_{-1}(1+\tau_{-1}) &= 0, \\ \epsilon_0\tau_{-1} + \epsilon_{-1}\tau_0 &= 0, \\ \epsilon_1\tau_0 - (2-\tau_{-1})\epsilon_2 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \tag{6.15}$$

Для аффинной связности T общего положения имеем $1+\tau_{-1} \neq 0$, следовательно, первое соотношение дает $\epsilon_{-1} = 0$. Аналогично $\epsilon_0 = 0$. Из третьего соотношения мы получаем $\epsilon_2 = \frac{\tau_0}{2-\tau_{-1}}\epsilon_1$. Таким образом, мы имеем ровно одну независимую константу ϵ_1. Остальные соотношения позволяют выразить константы ϵ_k's $(k > 1)$ через ϵ с меньшими номерами. Это остается верным и если $\mathrm{ord}_{P_+} e < -1$, просто возникающие в этом случае соотношения сразу обратят в ноль коэффициенты ϵ_{-k} с $k > 1$.

Замечание. Если $\mathrm{ord}_{P_+} T \neq -1$, пространство решений остается одномерным, причем для порядка решения имеем

$$e(z) = z^{-k}(1 + O(z))\frac{\partial}{\partial z},$$

где $k = \mathrm{ord}_{P_+} T$. Это проверяется точно такими же вычислениями, что и при доказательстве леммы.

Заметим, также, что неотрицательный порядок T не имеет смысла, так как по лемме 6.10 при преобразовании координат добавляется логарифмическая производная, имеющая, вообще говоря, полюс первого порядка.

Теорема 6.14. *Для аффинной связности T общего положения, такой, что $T(z) = O(z^{-k})$, $k > 0$ в точке P_+, пространство казимиров второго порядка одномерно при $k = 1$ и нульмерно при $k > 1$.*

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из леммы 6.13 и последующего замечания. Следует пояснить нульмерность пространства казимиров при $k > 1$. В этом случае, согласно замечанию, $\mathrm{ord}_{P_+} e > 1$, и следовательно $e \in \mathcal{L}_+$. Но, как отмечалось на стр. 128, казимиры, соответствующие подалгебре $\mathcal{L}_+$, тривиальны.

Из результатов предыдущего раздела вытекает, что пространство казимиров фермионных представлений в общем положении одномерно. Отсюда мы делаем вывод, что соответствующие аффинные связности имеют простые полюсы в точке P_+.

6.4. Описание полуказимиров. Из предыдущих разделов можно заключить, что перестановочность Δ_e со всеми элементами алгебры $\mathcal{A}$ накладывает очень сильные ограничения на векторное поле e. Здесь мы рассмотрим более слабые условия.

Определение 6.15. Назовем оператор вида Δ_e *полуказимиром*, если $[\Delta_e, A] = 0$ для любого $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$.

Здесь $\mathcal{A}^{\mathrm{reg}}$ – регулярная подалгебра, введенная в разделе 5.2, ее базисные элементы – A_k, $k < -g$.

Как и для казимиров, мы дадим два описания полуказимиров: в терминах коцикла и в терминах задающей его аффинной связности. Начнем с описания в терминах коцикла.

Для векторного поля e, определяющего полуказимир, выполнена только часть условий (6.8):

$$\gamma(A_{-k}, e) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > g. \tag{6.16}$$

Эти условия приводят к системе уравнений, аналогичной (6.10), но лишь для $k > g$. Таким образом, коэффициенты a_m с $m \leqslant g$ оказываются независимыми, а все остальные выражаются через них. Пусть $\widetilde{\mathcal{L}}_- \subset \mathcal{L}$ – подпространство, порожденное $\{e_k : k \leqslant g\}$. Введем отображение $\Gamma\colon \widetilde{\mathcal{L}}_- \mapsto \mathcal{L}$ следующим образом: возьмем $e \in \widetilde{\mathcal{L}}_-$ и представим его в виде (6.9). Затем подставим соответствующие значения a_m $(m \leqslant g)$ в (6.10) и вычислим a_m, $m > g$. Обозначим через $\Gamma(e)$ векторное поле, которое соответствует всему множеству коэффициентов a_m. Под Δ будем понимать отображение, сопоставляющее векторному полю e оператор $\Delta e = \hat{e} - T(e)$. Из определений немедленно следует

Лемма 6.16. *Пространство полуказимиров совпадает с $\Delta(\Gamma(\widetilde{\mathcal{L}}_-))$. Оно порождено элементами $\Delta(\Gamma(e_k))$, где $k \leqslant g$.*

Теперь дадим описание полуказимиров в терминах аффиной связности. По аналогии с леммой 6.12 и соотношением (6.16) для векторного поля, определяющего полуказимир, имеем

$$\operatorname{res}_{P_+}(E'' - (ET)')A\,dz = 0 \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}^{\text{reg}}. \tag{6.17}$$

Мы работаем здесь только с локальными разложениями в точке P_+. Возьмем

$$E'' - (ET)' = \sum \beta_i z^i \tag{6.18}$$

в точке P_+ (сумма конечна слева). Для элемента $A_{-g-1} = \alpha_{-g-1}z^{-g-1} + \alpha_{-g}z^{-g} + \cdots$, имеющего старшую степень в $\mathcal{A}^{\text{reg}}$, соотношение (6.16) дает $\alpha_{-g-1}\beta_g + \alpha_{-g}\beta_{g-1} + \cdots = 0$, что позволяет выразить β_g через β_i с меньшими номерами. Аналогично, для следующего базисного элемента $A_{-g-2} \in \mathcal{A}^{\text{reg}}$ соотношение (6.16) выражает β_{g+1} через коэффициенты β_i с меньшими номерами. Таким образом, коэффициенты β_i, $i < g$, независимы, а все остальные можно выразить через них.

Соотношение (6.18) устанавливает связь между коэффициентами ϵ_i разложения (6.14) и коэффициентами β_k разложения (6.18):

$$i(i+1)\epsilon_{i+1} - i \sum_{k+l=i} \epsilon_k \tau_l = \beta_{i-1}. \tag{6.19}$$

Из этих соотношений ϵ_{i+1} можно выразить через ϵ_k с $k \leqslant i$, и через β_l с $l \leqslant i-1$. В конечном счете ϵ_{i+1} зависит от β_l с $l \leqslant i-1$. Поскольку, как показано выше, β_l являются независимыми параметрами при $l \leqslant g-1$, то ϵ_i независимы при $i \leqslant g+1$. Порядок $g+1$ в точке P_+ имеет векторное поле e_g. Из этого мы делаем вывод, что в разложении (6.9) независимыми являются коэффициенты при $\ldots, e_{g-1}, e_g$. Отсюда снова следует лемма 6.16.

В качестве примера выпишем соотношения (6.19) для i, близких к 0, чтобы увидеть их аналогию с соотношениями (6.15) для казимиров:

$$\begin{aligned}
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-2\epsilon_{-1}(1+\tau_{-1}) = -\beta_{-3},\\
&\epsilon_0\tau_{-1} + \epsilon_{-1}\tau_0 = -\beta_{-2},\\
&\epsilon_{-1}\tau_2 + \epsilon_0\tau_1 + \epsilon_1\tau_0 + \epsilon_2(\tau_{-1}-2) = -\beta_0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{6.20}$$

6.5. Полуказимиры и пространства модулей $\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$. Пусть $\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ – пространство модулей кривых рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$, фиксированной 1-струей локальной координаты в P_+ и фиксированной p-струей локальной координаты в P_-.

Из определения 6.15 следует, что полуказимиры коммутируют с действием элементов вида λA, где $A \in \mathcal{A}^{\text{reg}}$, λ – скалярная матрица. По лемме 6.3 полуказимиры, также, коммутируют с элементами вида xA, где $\operatorname{tr} x = 0$, а $A \in \mathcal{A}$ произвольно. Из этого следует, что полуказимиры коммутируют со всеми элементами регулярной подалгебры $\mathfrak{g}^{\text{reg}} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}^{\text{reg}}$ алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$. Из этого мы делаем вывод, что полуказимиры корректно определены на пространствах коинвариантов регулярной подалгебры, то есть конформных блоков (определение которых дано в разделе 5.2).

Для $e \in \widetilde{\mathcal{L}}_-$ пусть $\overline{\Delta}(e)$ – оператор, индуцированный $\Delta(\Gamma(e))$ на коинвариантах. Отображение $\overline{\Delta}$ определено на $\widetilde{\mathcal{L}}_-$ и по лемме 6.16 его образ – это пространство C_2^s полуказимиров, рассматриваемых как операторы на коинвариантах.

Цель этого раздела – показать, что только конечное число базисных полуказимиров задает нетривиальные операторы на коинвариантах и для подходящего натурального p установить соответствие между касательным пространством к $\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ и пространством полуказимиров, рассматриваемых на коинвариантах.

Напомним, что $\mathcal{L}_-^{(p)}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, обозначает подалгебру Ли векторных полей в $\mathcal{L}$, имеющих в точке P_- ноль порядка не менее p.

Лемма 6.17. *Для фермионного представления V существует такое $p \in \mathbb{Z}_+$, что $\mathcal{L}_-^{(p)} \subseteq \ker \overline{\Delta}$.*

Идея нижеследующего доказательства в том, что ввиду почти градуированности всех рассматриваемых действий при достаточно больших по модулю отрицательных k оператор $\Delta(e_k)$ во-первых отображает все пространство V в образ регулярной подалгебры (факторизацией по которому получаются коинварианты), а во вторых совпадает с полуказимиром, отвечающим векторному полю e_k.

Доказательство. Для фермионного представления определенного заряда пространство коинвариантов алгебры $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ конечномерно. Это – известный факт для аффинных алгебр Каца–Муди. Несложно свести доказательство утверждения в рассматриваемом почти-градуированном случае к известному, рассматривая ассоциированные градуированные объекты.

Рассмотрим разложение

$$V = \bigoplus_{n\leqslant 0} V_n,$$

определяющее структуру почти градуированного $\mathcal{D}^1_{\mathfrak{g}}$-модуля на V. Ввиду конечномерности коинвариантов существует такое s, что

$$\bigoplus_{n<s} V_n \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}})V,$$

где $\mathcal{U}$ обозначает универсальную обертывающую алгебру. Так как V – почти градуированный $\mathcal{L}$-модуль, существует такое $\nu \in \mathbb{Z}_+$, что для всех k, n имеем $\hat{e}_k V_n \subseteq \bigoplus_{m\leqslant k+n+\nu} V_m$. Если взять $k < s-\nu$, то $k+n+\nu < s$ для всех $n \leqslant 0$. Следовательно, $\hat{e}_k V \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}})V$ для всех $k < s-\nu$.

Найдем такое $k' \in \mathbb{Z}$, что $T(e_k)V \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}})V$ для всех $k < k'$. Так как V – почти градуированный $(\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A})$-модуль, существует такое $\nu' \in \mathbb{Z}_+$, что $u(i)V_n \subseteq \bigoplus_{m\leqslant i+n+\nu'} V_m$ для всех $u \in \mathfrak{g}$, $i \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $u^\mu(i)u_\mu(j)V_n \subseteq \bigoplus_{m\leqslant i+j+n+2\nu'} V_m$. Ряд для $T(e_k)$ содержит член $:u^\mu(i)u_\mu(j):$ если $l_k^{ij} \neq 0$. Последнее выполняется для

$$i + j \leqslant k + g. \tag{6.21}$$

Чтобы получить это, заметим, что в предположении $g > 1$ имеем для базисных элементов A_m (в алгебре функций), ω_m (в пространстве 1-форм), e_m (в алгебре векторных полей) следующее поведение в точке P_-: $A_m = O(z^{-m-g})$, $\omega_m = O(z^{m+g-1})\,dz$, $e_m = O(z^{-m-3g+1})\frac{\partial}{\partial z}$. Эти соотношения выполняются, также, для $g = 1$ если положить $\omega_m = A_{1-m}\,dz$, $e_m = A_{m+1}\frac{\partial}{\partial z}$, а также для $g = 0$. Ввиду (4.12) $l_k^{ij} = -\operatorname{res}_{P_-} e_k\omega^i\omega^j$. В точке P_- имеем $e_k\omega^i\omega^j = O(z^{-k+i+j-g-1})\,dz$. Если $l_k^{ij} \neq 0$, то $-k+i+j-g-1 \leqslant -1$, откуда следует (6.21). Следовательно,

$$T(e_k)V_n \subseteq \bigoplus_{m\leqslant n+k+g+2\nu'} V_m.$$

Возьмем $k' = s - g - 2\nu'$. Тогда при $k < k'$ из последнего соотношения вытекает

$$T(e_k)V_n \subseteq \bigoplus_{m<s} V_m,$$

то есть $T(e_k)V_n \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}})V$.

Ясно, что для $p \leqslant \max(\nu - s, |k'|)$ и $e \in \mathcal{L}_-^{(p)}$ имеем

$$\Delta(e)V \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}})V. \tag{6.22}$$

Но ввиду локальности коцикла γ существует такое $K < 0$, что

$$\Delta(\Gamma(e)) = \Delta(e) \quad \text{при} \quad k < -K \tag{6.23}$$

(то есть $\Delta(e)$ является полуказимиром). Действительно, из локальности следует существование такого $K' > 0$, что $\gamma(A_{-k}, e_m) = 0$ при $k > m + K'$. Это означает, что матрица системы (6.16) имеет вид полосы ширины K, расположенной над главной диагональю. Поэтому если $K = g - K'$ и $k < K$, то все a_m при $m > k$ – нулевые, то есть $\Gamma(e) = e$.

Следовательно, если мы возьмем $p = \min\{\max(\nu - s, |k'|), K\}$, то выполняется и соотношение (6.22), и соотношение (6.23), таким образом, $e \in \ker \overline{\Delta}$.

Пусть, как и выше, $\mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$ – пространство модулей кривых рода g с двумя отмеченными точками $P_\pm$, фиксированной 1-струей локальной координаты в P_+ и фиксированной p-струей локальной координаты в P_-. Имеется каноническое отображение $\gamma\colon \mathcal{L} \mapsto T_\Sigma \mathcal{M}_{g,2}^{(p)}$, подробно рассмотренное в разделе 5.1. Пусть γ_- обозначает ограничение отображения γ на подпространство $\mathcal{L}_-$ (порожденное элементами e_k с $k < 0$). Пусть V – фермионное представление алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$, $C_2^s = C_2^s(V)$ – пространство полуказимиров алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространстве V, а $\overline{C_2^s}$ – пространство их фактор-операторов, действующих на коинвариантах представления V.

Теорема 6.18. 1°. *Для фермионных представлений V, удовлетворяющих условиям леммы 6.6, отображение $\overline{\Delta}\colon \widetilde{\mathcal{L}}_- \mapsto \overline{C_2^s}$ сюръективно.*

2°. *Возьмем p как в лемме 6.17. Тогда корректно определено отображение*

$$\overline{\Delta} \circ \gamma_-^{-1}\colon T_\Sigma \mathcal{M}_{g,2}^{(p-1)} \to \overline{C_2^s}. \tag{6.24}$$

Доказательство. 1°. По лемме 6.16 имеем $(\Delta \circ \Gamma)(\widetilde{\mathcal{L}}_-) = C_2^s(V)$. Факторизуя обе части по $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}})V$, получим $\overline{\Delta}(\widetilde{\mathcal{L}}_-) = \overline{C_2^s}$.

2°. Согласно предложению 5.3 и лемме 5.1 отображение $\gamma\colon \mathcal{L} \mapsto T_\Sigma \mathcal{M}_{g,2}^{(p-1)}$ сюръективно и $\ker \gamma = \mathcal{L}_+^{(2)} \oplus \mathcal{L}_-^{(p)}$. Из этого, а также из определения отображения γ_- следует, что $\gamma_- : \widetilde{\mathcal{L}}_- \to T_\Sigma\mathcal{M}_{g,2}^{(p-1)}$ сюръективно и $\ker\gamma_- = \mathcal{L}_-^{(p)}$.

При том выборе p, который сделан в условии теоремы, $\mathcal{L}_-^{(p)} \subseteq \ker\overline{\Delta}$. Поэтому отображение $\overline{\Delta}\circ\gamma_-^{-1}$ корректно определено.

Отображение (6.24) в следующем смысле не зависит от выбора p такого, что $\mathcal{L}_-^{(p)} \subseteq \ker\overline{\Delta}$. Возьмем минимальное положительное p, обладающее указанным свойством, и пусть $p' > p$. Так как $\mathcal{L}_-^{(p')} \subset \mathcal{L}_-^{(p)}$, отображение (6.24) определено и для p', и равно композиции отображения для p и касательного отображения к естественной проекции $\mathcal{M}_{g,2}^{(p'-1)} \to \mathcal{M}_{g,2}^{(p-1)}$ (заключающейся в "забывании" $p'-p$ струй старших порядков в точке P_+).

Каждому фермионному представлению отвечает, таким образом, определенное число p. Это число, как вытекает из доказательства леммы 6.17, зависит от степени размытости почти градуировки представления и границ его локального коцикла. Для соответствующего пространства модулей $\mathcal{M}_{g,2}^{(p-1)}$ теорема 6.18.2° устанавливает соответствие между касательными векторами этого пространства и операторами в пространстве коинвариантов – полуказимирами.

Список литературы

[1] E. Arbarello, C. De Concini, V. G. Kac, C. Procesi, "Moduli spaces of curves and representation theory", *Comm. Math. Phys.*, **1 (117)** (1988), 1–36 doi 10.1007/BF01228409, MR 946992, Zbl 0647.17010, ADS 1988CMaPh.117....1A.

[2] D. Bernard, "On the Wess–Zumino–Witten models on the torus", *Nucl. Phys. B*, **303** (1988), 77–93. doi 10.1016/0550-3213(88)90217-9, ADS 1988NuPhB.303...77B, MR 952765.

[3] D. Bernard, "On the Wess–Zumino–Witten models on Riemann surfaces", *Nucl. Phys. B*, **309** (1988), 145–174. doi 10.1016/0550-3213(88)90236-2, ADS 1988NuPhB.309..145B, MR 968348.

[4] L. Bonora, M. Rinaldi, J. Russo, K. Wu, "The Sugawara construction on genus g Riemann surfaces", *Phys. Lett. B*, **208** (1988), 440–446 doi 10.1016/0370-2693(88)90644-2, MR 953254, ADS 1988PhLB..208..440B.

[5] B. Enriquez, G. Felder, *Solutions of the KZB equations in genus* $\geqslant 1$, math.QA/9912198.

[6] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М., 1979 MR 0566582.

[7] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, "Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро", *Функц. анализ и его прилож.*, **16**:2 (1982), 47–63 Mi faa1619, MR 659165, Zbl 0505.58031.

[8] G. Felder, Ch. Wieczerkowski, "Conformal blocks on elliptic curves and the Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equation", *Commun. Math. Phys.*, **176** (1996), 133–161 doi 10.1007/BF02099366, MR 1372821, Zbl 0972.32012, ADS 1996CMaPh.176..133F.

[9] I. Frenkel, "Orbital theory of the affine Lie algebras", *Invent. Math.*, **77**:2 (1984), 301–352 doi 10.1007/BF01388449, MR 752823, Zbl 0548.17007, ADS 1984InMat..77..301F.

[10] D. Friedan, S. Shenker, "The analitic geometry of the two-dimensional conformal field theory", *Nucl. Phys. B*, **281** (1987), 509–545 doi 10.1016/0550-3213(87)90418-4, MR 869564, ADS 1987NuPhB.281..509F.

[11] V. Guillemin, S. Sternberg, "The Gelfand–Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds", *J. Func. Anal.*, **52** (1983), 106–128 doi 10.1016/0022-1236(83)90092-7, MR 705993, Zbl 0522.58021.

[12] И. М. Гельфанд, "Центр инфинитезимального группового кольца", *Матем. сб.*, **26** (1950), 103–112 MR 0033831.

[13] W. M. Goldman, "Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surgace group representations", *Invent. Math.*, **85** (1986), 263–302 doi 10.1007/BF01389091, MR 846929, Zbl 0619.58021, ADS 1986InMat..85..263G.

[14] П. Г. Гриневич, А. Ю. Орлов, "Вариации комплексной структуры римановых поверхностей векторными полями на окружности и объекты теории КП. Проблема Кричевера–Новикова действия на функции Бейкера–Ахиезера", *Функц. анализ и его прилож.*, **24**:1 (1990), 72–73 Mi faa922, MR 1052273, Zbl 0719.30037.

[15] J. Harris, I. Morrison, *Moduli of Curves*, Graduate Texts in Math., **187**, Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 1998 MR 1631825.

[16] N. Hitchin, "Flat connections and geometric quantization", *Commun. Math. Phys.*, **131** (1990), 347–380 doi 10.1007/BF02161419, MR 1065677, Zbl 0718.53021, ADS 1990CMaPh.131..347H.

[17] В. Г. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993 MR 1288524.

[18] V. G. Kac, A. K. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Adv. Ser. in Math. Phys., **2**, World Scientific, 1987 MR 1021978, Zbl 0668.17012.

[19] V. G. Kac, D. H. Peterson, "Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups", *Proc. Natl. Acad.*

Sci. USA, 1981, 3308–3312 doi 10.1073/pnas.78.6.3308, MR 0619827, Zbl 0469.22016, ADS 1981PNAS...78.3308K.

[20] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972 MR 0407202.

[21] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247** (1984), 83–103 MR 853258, Zbl 0661.17020.

[22] М. Л. Концевич, "Алгебра Вирасоро и пространство Тейхмюллера", *Функц. анализ и его прилож.*, **21**:2 (1987), 78–79 Mi faa1198, MR 902301, Zbl 0647.58012.

[23] И. М. Кричевер, "Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения", *УМН*, **33**:4 (1978), 215–216 Mi rm3502, MR 510681, Zbl 0382.39003.

[24] I. M. Krichever, *Vector bundles and Lax equations on algebraic curves*, hep-th/0108110 MR 1923174.

[25] I. M. Krichever, *Isomonodromy equation on algebraic curves*, *canonical transformations and Witham equations*, hep-th/0112096.

[26] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов", *Функц. анализ и его прилож.*, **21**:2 (1987), 46–63 Mi faa1190, MR 902293, Zbl 0634.17010.

[27] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского", *Функц. анализ и его прилож.*, **21**:4 (1987), 47–61 Mi faa1228, MR 925072, Zbl 0659.17012.

[28] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях", *Функц. анализ и его прилож.*, **23**:1 (1989), 24–40 Mi faa993, MR 998426, Zbl 0684.17012.

[29] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП). I", *Функц. анализ и его прилож.*, **12**:4 (1978), 41–52 Mi faa2026, MR 515628, Zbl 0393.35061.

[30] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения", *УМН*, **35**:6 (1980), 47–68 Mi rm3879, MR 601756, Zbl 0501.35071.

[31] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Голоморфные расслоения и скалярные разностные операторы. Одноточечные конструкции", *УМН*, **55**:1 (2000), 187–188 Mi rm258, MR 1751828, Zbl 1101.14315.

[32] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции", *УМН*, **55**:3 (2000), 181–182 Mi rm302, MR 1777362, Zbl 0978.35066.

[33] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, "Двумерная цепочка Тода, коммутирующие разностные операторы и голоморфные векторные расслоения", *УМН*, **58**:3 (2003), 51–88 Mi rm628, MR 1998774, Zbl 1060.37068.

[34] K. Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, Springer-Verlag, 1985 MR 0815922.

[35] A. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **103** (1981), 207 MR 0623209, ADS 1981PhLB..103..207P.

[36] Э. Прессли, Г. Сегал, *Группы петель*, Мир, М., 1990 MR 1071737.

[37] A. Ruffing, Th. Deck, M. Schlichenmaier, "String branchings on complex tori and algebraic representations of generalized Krichever–Novikov algebras", *Lett. Math. Phys.*, **26** (1992), 23–32 doi 10.1007/BF00420515, MR 1193623, Zbl 0774.17027.

[38] V. A. Sadov, "Bases on multipunctured Riemann surfaces and interacting strings amplitudes", *Commun. Math. Phys.*, **136** (1991), 585–597 doi 10.1007/BF02099075, MR 1099697, Zbl 0725.30033, ADS 1991CMaPh.136..585S.

[39] M. Schlichenmaier, *An introduction to Riemann surfaces, algebraic curves and moduli spaces*, Lect. Notes Phys., **322**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1989 MR 981595, Zbl 0683.14007.

[40] M. Schlichenmaier, "Krichever–Novikov algebras for more than two points", *Lett. Math. Phys.*, **19** (1990), 151–165 doi 10.1007/BF01045886, MR 1039524, Zbl 0691.30037.

[41] M. Schlichenmaier, "Krichever–Novikov algebras for more than two points: explicit generators", *Lett. Math. Phys.*, **19** (1990), 327–336 doi 10.1007/BF00429952, MR 1051815, Zbl 0703.30038.

[42] M. Schlichenmaier, "Central extensions and semi-infinite wedge representations of Krichever–Novikov algebras for more than two points", *Lett. Math. Phys.*, **20** (1990), 33–46 doi 10.1007/BF00417227, MR 1058993, Zbl 0703.30039.

[43] M. Schlichenmaier, *Verallgemeinerte Krichever–Novikov Algebren und deren Darstellungen*, Ph.D. thesis, Universität Mannheim, 1990.

[44] M. Schlichenmaier, "Degenerations of generalized Krichever–Novikov algebras on tori", *J. Math. Phys.*, **34** (1993), 3809–3824 doi 10.1063/1.530008, MR 1230553, Zbl 0806.17024, ADS 1993JMP....34.3809S.

[45] M. Schlichenmaier, "Differential operator algebras on compact Riemann surfaces", *Generalized Symmetries in Physics* (Clausthal 1993, Germany), eds. H.-D. Doebner, V. K. Dobrev, and A. G. Ushveridze, World Scientific, 1994, 425–434 MR 1473758.

[46] M. Schlichenmaier, "Local cocycles and central extensions for multi-point algebras of Krichever–Novikov type", *J. Reine und Angew. Math.*, **559** (2003), 53–94 MR 1989644.

[47] M. Schlichenmaier, “Higher genus affine algebras of Krichever–Novikov type”, *Moscow Math. J.*, **4**:3 (2003), 1395–1427 MR 2058804, Zbl 1115.17010; math.QA/0210360 Zbl 1109.17301.

[48] M. Schlichenmaier, O. K. Sheinman, “Sugawara construction and Casimir operators for Krichever–Novikov algebras”, *J. Math. Science*, **92** (1998), 3807–3834 doi 10.1007/BF02434007, MR 1666274, Zbl 1006.17503; math.QA/9512016 Zbl 1109.17301.

[49] М. Шлихенмайер, О. К. Шейнман, “Теория Весса–Зумино–Виттена–Новикова, уравнения Книжника–Замолодчикова и алгебры Кричевера–Новикова”, *УМН*, **54**:1 (1999), 213–250 Mi rm122, MR 1706819.

[50] М. Шлихенмайер, О. К. Шейнман, “Уравнения Книжника–Замолодчикова для положительного рода и алгебры Кричевера–Новикова”, *УМН*, **59**:4 (2004), 147–180 Mi rm760, MR 2106647.

[51] О. К. Шейнман, “Эллиптические аффинные алгебры Ли”, *Функц. анализ и его прилож.*, **24**:3 (1990), 51–61 Mi faa955, MR 1082031.

[52] О. К. Шейнман, “Модули старшего веса над некоторыми квазиградуированными алгебрами Ли на эллиптических кривых”, *Функц. анализ и его прилож.*, **26**:3 (1992), 65–71 Mi faa801, MR 1189025, Zbl 0820.17037.

[53] О. К. Шейнман, “Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях”, *Функц. анализ и его прилож.*, **27**:4 (1993), 54–62 Mi faa727, MR 1264318, Zbl 0820.17036.

[54] О. К. Шейнман, “Модули со старшим весом для аффинных алгебр Ли на римановых поверхностях”, *Функц. анализ и его прилож.*, **29**:1 (1995), 56–71 Mi faa566, MR 1328538, Zbl 0848.17023.

[55] O. K. Sheinman, “Representations of Krichever–Novikov algebras”, *Topics in topology and mathematical physics*, ed. S. P. Novikov, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995, 185–197 MR 1355555.

[56] О. К. Шейнман, “Фермионная модель представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова”, *Функц. анализ и его прилож.*, **35**:3 (2001), 60–72 Mi faa259, MR 1864989, Zbl 1013.17020.

[57] О. К. Шейнман Алгебры Кричевера–Новикова и уравнения автодуальности на римановых поверхностях, *УМН*, **56**:1 (2001), 185–186 Mi rm376, MR 1846788, Zbl 1106.17307.

[58] O. K. Sheinman, “Second order casimirs for the affine Krichever–Novikov algebras $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ and $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$”, *Moscow Math. J.*, **1**:4 (2001), 605–628 MR 1901079; math.RT/0109001.

[59] О. К. Шейнман, “Казимиры второго порядка аффинных алгебр Кричевера–Новикова $\widehat{\mathfrak{gl}_{g,2}}$ и $\widehat{\mathfrak{sl}_{g,2}}$”, *Фундаментальная математика сегодня (к десятилетию Независимого московского университета)*, ред. С. К. Ландо, О. К. Шейнман, МЦНМО, М., 2003, 372–404 MR 2072650.

[60] О. К. Шейнман, “Казимиры второго порядка для аффинных алгебр Кричевера–Новикова $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ и $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$”, *УМН*, **56**:5 (2001), 189–190 Mi rm447, MR 1892570.

[61] O. K. Sheinman, “Krichever–Novikov algebras, their representations and applications”, *Geometry, Topology and Mathematical Physics. S. P. Novikov's seminar* 2002–2003, AMS translations, Ser. 2, **212**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, 2004, 297–316 MR 2070060, Zbl 1081.17014; math.RT/0304020.

[62] О. К. Шейнман, “Проективно-плоские связности на пространстве модулей римановых поверхностей и уравнения Книжника–Замолодчикова”, *Нелинейная динамика*, Тр. МИАН,, **251**, 2005, 307–319 Mi tm55, MR 2234387, Zbl 1119.32007.

[63] O. K. Sheinman, “Krichever–Novikov algebras and their representations”, *Contemp. Math.*, **391** (2005), 313–321 MR 2184032, Zbl 1104.17015.

[64] H. Sugawara, “A field theory of currents”, *Phys. Rev.*, **176** (1968), 2019–2025 doi 10.1103/PhysRev.176.2019, ADS 1968PhRv..176.2019S.

[65] А. Н. Тюрин, “Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода”, *Изв. АН СССР*, **29** (1965), 657–688 Zbl 0207.51603.

[66] A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada, “Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries”, *Adv. Stud. Pure Math.*, **19** (1989), 459–566 MR 1048605, Zbl 0696.17010.

[67] K. Ueno, “Introduction to conformal field theory with gauge symmetries”, *Geometry and Physics*, Proc. Aarhus conference 1995, eds. J. E. Andersen et.al., Marcel Dekker, 1997, 603–745 MR 1423195.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 10

Олег Карлович Шейнман

Алгебры Кричевера–Новикова, их представления и приложения в геометрии и математической физике

Компьютерная верстка: *А. М. Малокостов*

Сдано в набор 15.03.2007. Подписано в печать 25.12.2007.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 8.875. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/spm/` e-mail: `spm@mi.ras.ru`