Функциональный анализ и его приложения,
1990, т. 24, вып. 3, 51—61

УДК 517.9

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

О. К. Шейнман

В работе [1] И. М. Кричевер и С. П. Новиков ввели естественное обобщение алгебр токов Каца — Муди и рассмотрели их центральные расширения. Именно, пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная комплексная алгебра Ли, Γ — компактная алгебраическая кривая над $\mathbf{C}$ с двумя отмеченными точками $P_\pm$, $\mathcal{A}^\Gamma$ — алгебра мероморфных функций на Γ, голоморфных вне точек $P_\pm$. Назовем алгеброй мероморфных токов на кривой Γ следующую алгебру Ли G:

$$G = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}^\Gamma. \tag{0.1}$$

Если Γ — кривая рода 0, то $\mathcal{A}^\Gamma$ есть алгебра лорановских полиномов одной переменной, и G изоморфна одной из алгебр токов Каца — Муди. Мы рассматриваем в этой работе случай рода 1. Следуя традиционной канве построения аффинных алгебр Ли [3, 4], мы в § 1 изучаем 2-мерные расширения алгебр (0.1), из которых одна размерность отвечает центру, а другая — некоторому векторному полю e на Γ. Рассматриваются некоторые выделенные расширения, обозначаемые ниже $\widehat{G} = \widehat{G}(e)$.

В § 2 мы рассматриваем инвариантные билинейные симметрические формы на G. На аффинной алгебре Ли каноническая инвариантная форма выделяется условием ортогональности лорановских мономов, сумма степеней которых отлична от 0. Для алгебр типа (0.1) это условие не имеет непосредственного обобщения ввиду отсутствия градуировки (имеется лишь структура квазиградуированной алгебры Ли [1]). Мы показываем в § 2, что его можно заменить условием продолжимости инвариантной формы на 2-мерное расширение $\widehat{G}(e)$. Если e имеет m нулей в области $\Gamma \setminus P_\pm$, на $\widehat{G}(e)$ существует $m+1$ независимых инвариантных билинейных симметрических форм.

В § 3 устанавливается соответствие между алгебрами токов вида (0.1) и комплексными кокстеровскими кристаллографическими группами (CCC-группами), введенными и классифицированными в [5, 6]. Задание CCC-группы и точек $P_\pm$ определяет алгебру (0.1) однозначно с точностью до изоморфизма квазиградуированных алгебр (теорема 3.1). Можно предполагать, что CCC-группа связана с группой Вейля алгебры $\widehat{G}(e)$.

В § 4 рассматриваются орбиты присоединенного действия группы токов. Мы развиваем здесь идеи работ [4, 7] и связываем орбиты присоединенного действия с уравнением монодромии на эллиптической кривой Γ. Получено достаточное условие принадлежности двух элементов одной орбите в терминах группы монодромий этого уравнения (теорема 4.1). Рассмотрена связь орбит и CCC-группы.

Автор благодарит И. М. Кричевера за многочисленные плодотворные обсуждения.

§ 1. Алгебры мероморфных токов и их расширения

Пусть Γ — эллиптическая кривая с периодами 2ω и $2\omega'$. Тогда $\mathcal{A}^\Gamma$ можно представить как пространство эллиптических функций, голоморфных вне точек $z_\pm = \pm z_0$, и ввести в нем базис $\{A_i\}$, где i пробегает все полуцелые

© О. К. Шейнман, 1990

значения [1]:

$$A_i(z) = \frac{\sigma^{i-1/2}(z-z_0)\,\sigma(z+2iz_0)}{\sigma^{i+1/2}(z+z_0)\,\sigma((2i+1)z_0)}\,\sigma^{i+1/2}(2z_0), \quad i \neq -\frac{1}{2}. \tag{1.1}$$

Здесь $\sigma(z)$ — σ-функции Вейерштрасса. Функция $A_{-1/2}$ может быть выбрана в виде

$$A_{-1/2}(z) = \frac{\sigma^2(z)\,\sigma^2(2z_0)}{\sigma(z+z_0)\,\sigma(z-z_0)\,\sigma^2(z_0)}. \tag{1.2}$$

Центральные расширения алгебры $\mathcal{A}^\Gamma$ описываются с помощью коциклов вида [1]

$$\gamma(A_i, A_j) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C A_i dA_j. \tag{1.3}$$

Выделим класс контуров, гомологичных малому контуру, охватывающему одну (любую) из точек $z_\pm$. Обозначим этот класс C_0 и назовем его классом разделяющих контуров. Разделяющие контуры, и только они, обладают тем свойством, что отвечающий им коцикл γ локален, т. е. $\gamma(A_i, A_j) = 0$ при $|i+j| > 1$ [1]. В дальнейшем в (1.3) будем рассматривать только этот коцикл, т. е. положим $C = C_0$.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ обозначает форму Киллинга — Картана конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда на алгебре Ли G можно определить коцикл $\hat\gamma$:

$$\hat\gamma(xA_i, yA_j) = (x, y)\,\gamma(A_i, A_j) \tag{1.4}$$

(где $x, y \in \mathfrak{g}$), а с его помощью — центральное расширение

$$\hat G = G \oplus \mathbf{C}c \tag{1.5}$$

алгебры Ли G, где коммутатор определяется соотношениями

$$[xA_i, yA_j] = [x, y]\,A_iA_j + \hat\gamma(xA_i, yA_j)\,c, \ [xA_i, c] = 0 \text{ для всех } i. \tag{1.6}$$

В теории Каца — Муди рассматривают расширение алгебры $\hat G$ с помощью оператора $z\,\partial/\partial z$. Аналогом этого является следующее предложение.

Предложение 1.1. *Пусть e — мероморфное векторное поле на* Γ, *голоморфное вне точек $z_\pm$. Тогда пространство*

$$\tilde G = G \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{C}e \tag{1.7}$$

с операцией $[\cdot, \cdot]$, *задаваемой соотношениями* (1.6) *и соотношениями*

$$[e, xA_i] = -[xA_i, e] = x\,(eA_i), \ [e, c] = 0 \tag{1.8}$$

является $(m+4)$-градуированной алгеброй Ли, где m — число нулей поля e в области $\Gamma \setminus \{z_\pm\}$ (под eA_i понимается стандартное действие векторного поля на функцию).

Доказательство. Проверим тождество Якоби. Прямое вычисление показывает, что

$$[e, [xA_i, yA_j]] = [x, y]\,(e\,(A_iA_j)),$$

$$[[e, xA_i], yA_j] + [xA_i, [e, yA_j]] = [x, y]((eA_i)\,A_j + A_i\,(eA_j)) +$$
$$+ (x, y)(\gamma(eA_i, A_j) + \gamma(A_i, eA_j))\,c$$

для любых i и j.

Поэтому необходимым и достаточным условием выполнения тождества Якоби является условие

$$\gamma(eA_i, A_j) + \gamma(A_i, eA_j) = 0, \quad i, j = -\infty, \infty. \tag{1.9}$$

Покажем, что оно действительно выполняется. Общий вид мероморфного векторного поля e на Γ, голоморфного вне точек $z_\pm$, дается формулой [1]

$$e(z) = E(z)\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.10}$$

где $E(z) \in \mathcal{A}^{\Gamma}$. Используя (1.10) и определение (1.3), мы получаем соотношение (1.9) простым интегрированием по частям на замкнутом контуре.

Припишем элементу e алгебры Ли $\widetilde{G}$ степень 0. Пусть e имеет p-кратный нуль в точке z_+ и q-кратный полюс в точке z_-. Подсчет нулей и полюсов показывает, что eA_j раскладывается в линейную комбинацию функций A_k с $k = j + p - 1 + n, \ldots, j + q + 1$, где $n = 0, 1$ (см. [1, § 3]). Разброс индексов в указанной линейной комбинации равен $q - p + 3 + n$. Но по теореме о числе нулей и полюсов мероморфной функции $q - p = m$. Предложение доказано.

Рассмотрим несколько подробнее структуру $\widetilde{G}$. Пусть $e_1, \ldots, e_{n-1}, h_1, \ldots, h_{n-1}, f_1, \ldots, f_{n-1}$ — канонические образующие алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $A = (A_{ij})$ — матрица Картана аффинной алгебры Ли, отвечающей алгебре $\mathfrak{g}$ и тождественному автоморфизму ее схемы Дынкина [3]. Положим $e_n = f_\theta A_{3/2}$, $f_n = e_\theta A_{-3/2}$, где, как обычно в теории аффинных алгебр Ли, θ — старший корень алгебры $\mathfrak{g}$, e_θ — его корневой вектор, $f_\theta = e_{-\theta}$, $2h_\theta = [e_\theta, f_\theta]$, $\gamma = \gamma(A_{3/2}, A_{-3/2})$ — значение коцикла (1.3). Положим также $h_{\pm 1/2} = h_\theta A_{\pm 1/2}(z)$.

П р е д л о ж е н и е 1.2. 1°. *Элементы* e_i, f_i, h_i $(i = 1, \ldots, n)$, $h_{\pm 1/2}$, e, c *порождают алгебру Ли* $\widetilde{G}$.

2°. *Имеют место следующие соотношения*:

$$[h_i, h_j] = [h_i, h_{\pm 1/2}] = [h_{1/2}, h_{-1/2}] = 0,$$

$$[h_i, e_j] = A_{ij} e_j, \ [h_i, f_j] = -A_{ij} f_j,$$

$$(\operatorname{ad} e_i)^{-A_{ij}+1} e_j = (\operatorname{ad} f_i)^{-A_{ij}+1} f_j = 0$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$, *где* $h_n = h_{1/2}$.

$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j$ *за исключением случая* $i = j = n$; $[e_n, f_n] = -\alpha h_{1/2} - \beta h_{-1/2} + \gamma c$, *где* α *и* β *определяются из соотношений в алгебре* $\mathcal{A}^{\Gamma}$ [1] $A_{3/2} A_{-3/2} = \alpha + \beta A_{-1/2}$.

Далее,

$$[e, e_i] = [e, f_i] = [e, h_i] = [e, h_{1/2}] = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

И наконец,

$$[h_{-1/2} [h_{-1/2}, e_j^{(\pm)}]] = \frac{1}{2} A_{nj} (\pm \varkappa [e_j^{(\pm)} f_1^{l_1} \ldots f_{n-1}^{l_{n-1}} f_n] \pm 2\lambda [h_{-1/2}, e_j^{(\pm)}] \mp$$

$$\mp \nu [e_j^{(\pm)} e_1^{l_1} \ldots e_{n-1}^{l_{n-1}} e_n]) + A_{nj}^2 \mu e_j^{(\pm)}, \ j = 1, \ldots, n-1,$$

где $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ *определяются из соотношения* [1] $A_{-1/2}^2 = \varkappa A_{-3/2} + \lambda A_{-1/2} + \mu + \nu A_{3/2}$; $e_j^{(+)} = e_j$, $e_j^{(-)} = f_j$, $\theta = l_1 \alpha_1 + \ldots + l_{n-1} \alpha_{n-1}$ — *разложение старшего корня* θ *по простым корням*, $[\ldots]$ *обозначает цепочку коммутаторов вида* $[\cdot, [\cdot, [\cdot [\cdot \ \cdot] \ldots \cdot] \cdot] \cdot]$.

Кроме перечисленных имеется еще два соотношения, определяющие действие e на e_n, f_n и $h_{-1/2}$, которые мы явно не выписываем. Они вытекают из структурных разложений вида

$$eA_j = \sum_s r_j^s A_{j+s} + r_j, \tag{1.11}$$

точно сформулированных в [1, § 3].

Вопрос о полноте системы перечисленных соотношений в настоящий момент остается открытым.

Доказательство 1.2.1° сводится к тому, что функции $A_{\pm 1/2}$, $A_{\pm 3/2}$ порождают алгебру $\mathcal{A}^{\Gamma}$, последнее же очевидно. Предложение 1.2.2° вытекает из картановских соотношений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и структурных формул алгебры $\mathcal{A}^{\Gamma}$ [1].

Назовем *картановской подалгеброй* в $\widetilde{G}$ подалгебру

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus Z \oplus \mathbf{C}e, \tag{1.12}$$

где $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$. Заметим, что в $\widetilde{G}$ существует другая, не сопряженная ей, максимальная коммутативная подалгебра — это подалгебра $\mathfrak{h}_{-1/2} = \mathfrak{h} \oplus A_{-1/2}\mathfrak{h} \oplus Z$.

При специальном выборе векторного поля e алгебра $\widetilde{G}$ имеет аналог борелевской подалгебры. Пусть $e = A_{3/2}(z)\dfrac{\partial}{\partial z}$, где $A_{3/2}(z)$ определено формулой (1.1) (тогда в окрестности точки z_+ $e(z) = z(1 + O(z))\,\partial/\partial z$). Обозначим $\mathcal{A}_\pm^\Gamma$ подкольца в $\mathcal{A}^\Gamma$, порожденные функциями A_j, $\pm j \geqslant 3/2$.

Предложение 1.3. 1°. *Присоединенное представление подалгебры* $\tilde{\mathfrak{h}}$ *на* $\widetilde{G}$ *в случае векторного поля* e *имеет инвариантное подпространство* $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_+^\Gamma$, *его матрица в базисе* $\{x_\alpha A_j \mid \alpha \in R(\mathfrak{g}),\ j \geqslant 3/2\}$ *этого подпространства является треугольной* (*здесь* $R(\mathfrak{g})$ — *система корней алгебры Ли* $\mathfrak{g}$).

2°. *На главной диагонали матрицы присоединенного действия подалгебры* $\tilde{\mathfrak{h}}$ *стоят аффинные корни* $\alpha + n$, *где* $\alpha \in R(\mathfrak{g})$ (*включая* $\alpha = 0$).

3°. *Матрица присоединенного действия элемента* $e = A_{3/2}\partial/\partial z$ *имеет минимальное число диагоналей вне главной диагонали среди матриц всех полей, удовлетворяющих свойству* 1°.

Доказательство. 1° вытекает из формул (1.11) действия векторных полей на функции [1], согласно которым

$$eA_i = (i - 1/2)\,A_i + \ldots,\quad i \geqslant 3/2,$$

где многоточие означает сумму конечного числа членов с $j > i$.

2°. Пусть $x_\alpha \in \mathfrak{g}$ — корневой вектор корня $\alpha \in R(\mathfrak{g})$. Тогда при $i = n + 1/2$ $x_\alpha A_i$ — весовой вектор подалгебры $\tilde{\mathfrak{h}}$ веса $\alpha + n$ по модулю суммы конечного числа токов, содержащих A_j с $j > i$ (при $\alpha = 0$ $x_\alpha \in \mathfrak{h}$).

3°. В силу предложения (1.1) сводится к тому, что поле e имеет один нуль в области $\Gamma \setminus \{z_\pm\}$ (единственное поле $\partial/\partial z$ без нулей в этой области не оставляет подпространство $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_+^\Gamma$ инвариантным). Предложение доказано.

Замечание 1. Несложно показать, что векторное поле $e = A_{3/2}(z)\,\partial/\partial z$ — единственное (с точностью до пропорциональности), на котором реализуется минимум числа диагоналей матрицы присоединенного действия подалгебры $\tilde{\mathfrak{h}}$. Действительно, пусть p — порядок поля e в точке z_+, а q — порядок поля e в точке z_-. Если полю e отвечает минимум числа диагоналей, то в силу доказательства предложения (1.3.3°) поле e имеет один нуль в области $\Gamma \setminus \{z_\pm\}$, и следовательно, $p + q + 1 = 0$. Пусть $j \geqslant 3/2$. Порядки функции eA_j в точках $z_\pm$ равны соответственно $p_+ = j + p - 3/2$, $p_- = -j + q - 3/2 = -j - p - 5/2$. При достаточно больших j $p_+ > 0 > p_-$ и $|p_-| > |p_+|$. Следовательно, $|p_\pm|$ — это порядки в точке z_+ членов с соответственно минимальным и максимальным номерами в разложении $eA_j = \sum \lambda_i A_i$. Номер k минимального члена найдем из соотношения $p_+ = k - 1/2$, т. е. $k = j + p - 1$. Из условия треугольного действия поля e имеем $k = j$, т. е. $p = 1$. Наконец, $q = -p - 1 = -2$. Векторное поле e с порядками $p = 1$, $q = -2$ в точках $z_\pm$ определено однозначно и совпадает с полем $A_{3/2}\dfrac{\partial}{\partial z}$ [1].

§ 2. Инвариантные симметрические формы

На алгебре Ли G имеется бесконечное множество независимых билинейных инвариантных симметрических форм. Действительно, любому мероморфному дифференциалу $d\omega$ на Γ, голоморфному вне точек $z_\pm$, отвечает билинейная симметрическая форма

$$B_\omega(xA_i, yA_j) = \frac{(x, y)}{2\pi i} \oint\limits_{C_0} A_i A_j d\omega. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Билинейная симметрическая форма B_ω является G-инвариантной.*

Доказательство. По определению

$$B_\omega([xA_i, zA_k], yA_j) = B_\omega([x, z] A_i A_k, yA_j) = \frac{([x, z], y)}{2\pi i} \oint A_i A_j A_k d\omega,$$

$$B_\omega(xA_i, [zA_k, yA_j]) = B_\omega(xA_i, [z, y] A_k A_j) = \frac{(x, [z, y])}{2\pi i} \oint A_i A_j A_k d\omega.$$

Таким образом, G-инвариантность формы B_ω вытекает из $\mathfrak{g}$-инвариантности формы $(\cdot, \cdot)$. Лемма доказана.

В этом параграфе мы покажем, что условие продолжимости на алгебру $\widetilde{G}$ позволяет выделить единственную форму или конечное число инвариантных форм в зависимости от числа нулей поля e в области $\Gamma \setminus \{z_\pm\}$.

Предложение 2.1. *Для любого мероморфного на Γ векторного поля $e = e(z)$, голоморфного и не имеющего нулей вне точек $z_\pm$, имеется ровно одна инвариантная билинейная симметрическая форма $\langle\cdot, \cdot\rangle$ на $\widetilde{G}$, обладающая следующими свойствами:*

1) $\langle xA, c\rangle = \langle xA, e\rangle = 0$ *для любых* $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}^\Gamma$;

2) $\langle c, e\rangle = 1$;

3) *Форма* $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *на алгебре* G *представима в виде* $\langle xA, yB\rangle = (x, y)\langle A, B\rangle_\Gamma$, *где* $x, y \in \mathfrak{g}$, $A, B \in \mathcal{A}^\Gamma$, *а* $\langle\cdot, \cdot\rangle_\Gamma$ — *билинейная симметрическая форма на* $\mathcal{A}^\Gamma$, *обладающая следующими свойствами*:

4) $\langle AB, C\rangle_\Gamma = \langle A, BC\rangle_\Gamma$ *для любых* $A, B, C \in \mathcal{A}^\Gamma$;

5) $\langle eA, C\rangle = -\langle A, eC\rangle$ *для любых* $A, C \in \mathcal{A}^\Gamma$.

При этом форма $\langle\cdot, \cdot\rangle_\Gamma$ *с необходимостью имеет вид*

$$\langle A, B\rangle_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_0} A(z) B(z) \frac{dz}{E(z)}, \tag{2.2}$$

где $E(z)$ *определяется из соотношения* (1.10).

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.2. *При условиях* 1)—5) *предложения* 2.1 *для* $\widetilde{G}$-*инвариантности формы* $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *необходимо и достаточно, чтобы для любых* $A, B \in \mathcal{A}^\Gamma$ *выполнялось соотношение*

$$\langle eA, B\rangle_\Gamma = \gamma(A, B),$$

где γ *определено формулой* (1.3).

Доказательство. Возьмем произвольные $x, y, z \in \mathcal{A}^\Gamma$, $a_i, b_i \in \mathbf{C}$ $(i = 1, 2, 3)$. Обозначим $X = xA + a_1 c + b_1 e$, $Y = yB + a_2 c + b_2 e$, $Z = zC + a_3 c + b_3 e$. Вычисление показывает, что

$$\langle [X, Y], Z\rangle = ([x, y], z)\langle AB, C\rangle_\Gamma + b_1 (y, z)\langle eB, C\rangle_\Gamma - \\ - b_2 (x, z)\langle eA, C\rangle_\Gamma + b_3 (x, y)\gamma(A, B), \tag{2.3}$$

$$\langle X, [Y, Z]\rangle = (x, [y, z])\langle A, BC\rangle_\Gamma + b_2 (x, z)\langle A, eC\rangle_\Gamma - \\ - b_3 (x, y)\langle A, eB\rangle_\Gamma + b_1 (y, z)\gamma(B, C). \tag{2.4}$$

Инвариантность формы $\langle\cdot, \cdot\rangle$ означает совпадение левых частей равенств (2.3) и (2.4). Ввиду $\mathfrak{g}$-инвариантности формы $(\cdot, \cdot)$ и свойств 1)—5) правые части равенств (2.3) и (2.4) совпадают тогда и только тогда, когда для любых $A, B \in \mathcal{A}^\Gamma$ выполнено соотношение леммы 2.2. Лемма доказана.

Доказательство предложения 2.1 немедленно вытекает из леммы 2.2, если заметить, что в силу определения (1.3) коцикла γ существует единственная билинейная симметрическая форма на $\mathscr{A}^{\Gamma}$, удовлетворяющая условию леммы 2.2,— это форма (2.4).

Единственным векторным полем без нулей в области $\Gamma \setminus \{z_{\pm}\}$ является

$$e(z) = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.5}$$

В силу предложения (2.3) ему отвечает единственная инвариантная симметрическая форма на $\widehat{G}$

$$\langle xA + a_1c + b_1e,\ yB + a_2c + b_2e\rangle = a_1b_2 + b_1a_2 + \frac{(x, y)}{2\pi i}\oint\limits_{C_0} AB\,dz. \tag{2.6}$$

В общем случае, когда поле e имеет вид $e = E(z)\frac{\partial}{\partial z}$ и функция $E(z)$ имеет m нулей в области $\Gamma \setminus \{z_{\pm}\}$, имеется $m + 1$ инвариантная билинейная симметрическая форма

$$\langle xA + a_1c + b_1e,\ yB + a_2c + b_2e\rangle = a_1b_2 + b_1a_2 + \frac{(x, y)}{2\pi i}\oint\limits_{C} AB\,\frac{dz}{E(z)}, \tag{2.7}$$

где C пробегает классы гомологий разделяющих циклов на кривой Γ с выколотыми точками $z_{\pm}$ и нулями функции E.

§ 3. Эллиптические аффинные алгебры Ли и кристаллографические группы

Переходя к изложению связей, существующих между эллиптическими аффинными алгебрами Ли и кристаллографическими группами, введем понятия системы Бернштейна — Шварцмана и комплексной кокстеровской кристаллографической группы (CCC-группы [5, 6]).

Пусть $R(\mathfrak{g})$ — система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$, W — ее группа Вейля, $l = \operatorname{rank}\mathfrak{g}$.

Определение 3.1. Назовем *системой Бернштейна — Шварцмана* набор, состоящий из двух l-мерных W-модулей M_1 и M_2, двух решеток полного ранга $T_1 \subset M_1$ и $T_2 \subset M_2$, оператора A: $M_2 \to M_1$ и комплексного числа τ, $\operatorname{Im}\tau > 0$, таких, что:

1°. представление W в пространстве M_i $(i = 1, 2)$ эквивалентно стандартному представлению W в $\mathbf{C}^l$;

2°. полупрямое произведение $W_i = WT_i$ — аффинная группа Вейля в пространстве M_i $(i = 1, 2)$;

3°. A является изоморфизмом W-модулей и $AT_2 \subset T_1$;

4°. $\tau x = A^{-1}x$ для любого $x \in M_1$.

Оператор A условием 3° определен однозначно с точностью до постоянного целого множителя. Условимся, что A — «минимальный» оператор с этими свойствами.

Системы Бернштейна — Шварцмана введены в [5, 6] под названием баз; см. также [10]. Согласно классификации, полученной в [5, 6], пара решеток T_1 и T_2 может иметь два типа: $T_1 \cong T_2 \cong L(S)$ и $T_1 \cong L(S)$, $T_2 \cong L(S^{\vee})$, где S — конечная система корней, $S^{\vee}$ — дуальная система корней, $L(S)$, $L(S^{\vee})$ — порожденные ими решетки. Мы будем рассматривать только системы первого типа:

$$T_1 \cong T_2 \cong L(S). \tag{3.1}$$

При заданных A и τ в пространстве $M_1 \oplus M_2$ существует единственная комплексная структура, при которой выполняется условие 4° определения (3.1) [10]. Будем рассматривать $M_1 \oplus M_2$ с этой комплексной структурой.

Определение 3.2 [5]. *CCC-группой, отвечающей системе Бернштейна — Шварцмана, удовлетворяющей условию* (3.1), называется группа, порожденная отражениями в гиперплоскостях $\tau\alpha(x) = m$, где $x \in M_1 \oplus$

$\oplus M_2$, α — произвольный аффинный корень вида $\alpha = \bar{\alpha} + n$ ($\bar{\alpha} \in S$), $m, n \in \mathbf{Z}$.

Как абстрактная группа CCC-группа равна полупрямому произведению W и решетки $T_1 \oplus T_2$ [6]. Как кристаллографическая группа CCC-группа определяется классом систем Бернштейна — Шварцмана с модулярно эквивалентными числами τ (при совпадении прочих параметров) [5, 6].

Сопоставим алгебре токов G систему Бернштейна — Шварцмана и ее CCC-группу.

Как вытекает из результатов [2], двойственное пространство G^* к алгебре токов G образовано мероморфными дифференциалами на Γ со значениями в пространстве $\mathfrak{g}^*$, голоморфными вне точек $z_{\pm}$. Пусть H — подпространство голоморфных всюду на Γ дифференциалов со значениями в сопряженном пространстве $\mathfrak{h}^*$ к картановской подалгебре алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через Q решетку, порожденную корнями алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{h}^*$. Рассмотрим решетку, порожденную периодами дифференциалов вида $\lambda\, dz \in H$ ($\lambda \in Q$) (она изоморфна $Q \otimes L$, где L — решетка периодов эллиптической кривой Γ), и порожденное ею пространство (оно изоморфно $\mathfrak{h}^* \otimes_{\mathbf{Z}} L$). Положим $L = L_1 \oplus L_2$, где L_1 — решетка a-периодов, L_2 — решетка b-периодов эллиптической кривой Γ.

В качестве модулей M_1 и M_2 возьмем $M_i = \mathfrak{h}^* \otimes_{\mathbf{Z}} L_i$ ($i = 1, 2$). Действие аффинных групп Вейля переносится на M_1 и M_2 с пространства $\mathfrak{h}^*$. Положим $\tau = \omega'/\omega$, где ω и ω' — полупериоды кривой Γ. Оператор A: $M_2 \to M_1$ определим условием

$$A^{-1}\colon \lambda \otimes l \to \lambda \otimes (\tau l) \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad l \in L_1).$$

Легко видеть, что A коммутирует с действием W, т. е. мы действительно получили систему Бернштейна — Шварцмана. Модулярному преобразованию параметра τ отвечает замена канонического базиса циклов на кривой Γ, поэтому наша конструкция однозначно сопоставляет алгебре Ли G CCC-группу.

Теорема 3.1. *Имеется взаимно однозначное соответствие между алгебрами токов вида* (0.1) *на эллиптических кривых, заданными с точностью до изоморфизма квазиградуированных алгебр Ли, и наборами, состоящими из CCC-группы, удовлетворяющей условию* (3.1), *и комплексного числа z_0, заданного по модулю чисел* 1, τ (τ *отвечает CCC-группе*).

Доказательство. Выше было показано, что алгебре токов G однозначно соответствует CCC-группа, удовлетворяющая условию (3.1).

Обратно: класс эквивалентных CCC-групп, удовлетворяющих условию (3.1), задается конечной системой корней и комплексным числом τ, $\operatorname{Im}\tau > 0$, заданным с точностью до модулярного преобразования. По этим данным однозначно восстанавливается эллиптическая кривая с периодами 1, τ. По заданному z_0 однозначно восстанавливается пара отмеченных точек $z_{\pm} = \pm z_0$ на Γ. Эллиптическая кривая с парой отмеченных точек и система корней однозначно задают алгебру токов G вида (0.1). Теорема доказана.

§ 4. Орбиты

Элементы $X = X(z)$ алгебры G ниже будем называть эллиптическими токами в алгебре $\mathfrak{g}$.

Определение 4.1. *Групповым током* (током в группе $\exp \mathfrak{g}$) называется отображение g: $\Gamma \to \exp \mathfrak{g}$, голоморфное всюду, за исключением, быть может, точек $\pm z_0$ и нулей векторного поля e.

Групповые токи образуют группу, которую мы обозначим T_G. Очевидно, T_G содержит все функции вида $\exp X$, $X \in G$.

В этом параграфе мы развиваем идеи работ [4, 7], где присоединенное действие группы токов аффинной алгебры Ли связывалось с калибровочными преобразованиями уравнений монодромии, отвечающих токам в алгебре. При этом орбита элемента задавалась оператором монодромии соответствующего уравнения, рассматриваемым с точностью до сопряжения.

Пусть $g \in T_G$. Определим оператор присоединенного действия $A\,dg$.

Определение 4.2. Если векторное поле e не имеет нулей вне точек $\pm z_0$, положим

$$(Adg)\,(ac + be + X) = ac + be + gXg^{-1} - bEg'g^{-1} + \\ + (\langle Eg^{-1}g', X\rangle - \frac{b}{2}\langle Eg'g^{-1}, Eg'g^{-1}\rangle)\,c, \quad (4.1)$$

где $X \in G$, a, $b \in \mathbf{C}$, $e = E\,(z)\,\partial/\partial z$. Подчеркнем, что в случае отсутствия у векторного поля e нулей вне точек $\pm z_0$ на алгебре $\widehat{G}$ существует лишь одна инвариантная билинейная симметрическая форма $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Мотивировка определения 4.2 следует из теоремы 3.1.5 [4], где формула (4.1) является следствием определения $Ad\exp X = \exp \operatorname{ad} X$.

Рассмотрим теперь случай, когда поле e имеет m нулей $z_1, \ldots, z_m$ ($m > 0$) вне точек $\pm z_0$. Тогда, как показано в § 2, существует $m + 1$ независимых инвариантных билинейных симметрических форм $\langle\cdot, \cdot\rangle_l$ ($l = 1, \ldots, m$) на $\widehat{G}$, отвечающих классам гомологий разделяющих циклов на $\Gamma \setminus \{\pm z_0, z_1, \ldots, z_m\}$. Правая часть (4.1) существенно зависит от выбора одной из форм $\langle\cdot, \cdot\rangle_l$. Для того чтобы корректно определить присоединенное действие, введем независимые центральные элементы $c_1, \ldots, c_{m+1}$, отвечающие одному и тому же коциклу $\hat{\gamma}$ (§ 1).

Определение 4.3. Если векторное поле e имеет m нулей вне точек $\pm z_0$, положим

$$(\mathrm{Ad}\,g)\,(a^l c_l + be + X) = a^l c_l + be + gXg^{-1} - bEg'g^{-1} + \\ + (\langle Eg^{-1}g', X\rangle_l - \frac{b}{2}\langle Eg'g^{-1}, Eg'g^{-1}\rangle_l)c_l,$$

где X, a, b, e имеют тот же смысл, что и в определении 4.2, а по повторяющемуся индексу l происходит суммирование. Все дальнейшие рассуждения будем проводить на основе определения 4.2, имея в виду, что все они очевидным образом обобщаются на случай $m > 0$. Здесь же отметим, что групповой ток g, который строится ниже при доказательстве теоремы 4.1, является аналитическим вне точек $\pm z_0$ при $m = 0$ и имеет особенности в точках $z_1, \ldots, z_m$ при $m > 0$, т. е. рассмотрение таких токов существенно.

Элементу $X = X\,(z) + ac + be$ сопоставим соответствующее уравнение монодромии на кривой Γ:

$$bE\,(z)\,u'\,(z) = u\,(z)\,X\,(z). \quad (4.2)$$

Точка $z = 0$ является регулярной точкой тока $X\,(z)$, и поэтому мы можем рассматривать росток решения уравнения (4.2) с начальным условием $u\,(0) = I$ (I — единичная матрица). Назовем это решение фундаментальным.

Рассмотрим любой замкнутый контур $z = z\,(\tau)$ на кривой Γ, имеющий начало и конец в точке $z = 0$, и рассмотрим аналитическое продолжение фундаментального решения вдоль этого контура. В результате мы получим решение того же уравнения с другим начальным условием

$$u_1\,(0) = g_{z(\tau)}, \text{ где } g_{z(\tau)} \in \exp \mathfrak{g}.$$

Определение 4.4. Элемент $g_{z(\tau)} \in \exp \mathfrak{g}$ называется *оператором монодромии* уравнения (4.2) вдоль контура $z = z\,(\tau)$.

Определение 4.5. Группа, порожденная операторами монодромии всех замкнутых контуров с отмеченной точкой $z = 0$ на кривой Γ, называется *группой монодромии* уравнения (4.2) на кривой Γ.

Из общей теории уравнения монодромии [8, 9] известно, что оператор монодромии зависит лишь от гомотопического класса контура $z = z(\tau)$ на эллиптической кривой Γ с выкинутыми особенностями уравнения (4.2), к числу которых относятся полюса эллиптического тока $X(z)$, нули векторного поля $e = E(z)\,\partial/\partial z$ и, в том числе, точки $\pm z_0$. Группа монодромии, как легко показать, является конечнопорожденной с образующими M_ω, $M_{\omega'}$, $M_\pm$, $M_1, \ldots, M_m$ и соотношением

$$M_\omega M_{\omega'} M_\omega^{-1} M_{\omega'}^{-1} = M_+ M_- M_1 \cdot \ldots \cdot M_m, \tag{4.3}$$

где M_ω, $M_{\omega'}$ — операторы монодромии вдоль базисных циклов кривой Γ, $M_\pm$ — операторы монодромии в точках $\pm z_0$, $M_1, \ldots, M_m$ — операторы монодромии в нулях поля e. По очевидным гомотопическим соображениям порядок сомножителей в правой части соотношения (4.3) несуществен, следовательно, операторы $M_\pm$, $M_1, \ldots, M_m$ попарно коммутируют. Эффективное построение монодромий в особых точках см. в [9].

Нижеследующая теорема 4.1 позволяет задать орбиту присоединенного действия в алгебре Ли $\widetilde{G}$ конечным числом параметров и является обобщением теоремы 3.2.10 (ii) [4]. Предварительно заметим, что для элемента $X = X(z) + a^l c_l + be$ выражения

$$\langle X, X\rangle_l = 2a^l b + \langle X(z), X(z)\rangle_l$$

для всех $l = 1, \ldots, m + 1$ и значение b являются инвариантами присоединенного действия. Это следует из инвариантности форм $\langle\cdot, \cdot\rangle_l$ и определения 4.3. Пусть $X = X(z) + a_1^l c_l + b_1 e$, $Y = Y(z) + a_2^l c_l + b_2 e$, где $X(z)$, $Y(z)$ — эллиптические токи в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть G_X, G_Y — группы монодромий уравнения (4.2) соответственно для токов $X(z)$ и $Y(z)$.

Теорема 4.1. *Если группы G_X и G_Y сопряжены относительно группы* $\exp\mathfrak{g}$ *и выполнены соотношения*

$$2a_1^l b_1 + \langle X(z), X(z)\rangle_l = 2a_2^l b_2 + \langle Y(z), Y(z)\rangle_l \tag{4.4}$$

для всех $l = 1, \ldots, m + 1$ и

$$b_1 = b_2 \neq 0, \tag{4.5}$$

то элементы X и Y принадлежат одной орбите присоединенного действия в алгебре Ли G.

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.1.5 [4] показано, что при условии выполнения соотношений (4.4), (4.5) сопряженность элементов X и Y эквивалентна тому, что токи $X(z)$ и $Y(z)$ связаны так называемым калибровочным преобразованием

$$Y(z) = g(z)\, X(z)\, g(x)^{-1} - bE(z)\, g'(z)\, g(z)^{-1}. \tag{4.6}$$

Действительно, пусть $X(z)$ и $Y(z)$ связаны преобразованием (4.6). Тогда из (4.4), (4.5) находим

$$a_2^l = a_1^l + \langle X, g^{-1}Eg'\rangle_l - \frac{b_1}{2}\langle Eg'g^{-1}, Eg'g^{-1}\rangle_l. \tag{4.7}$$

В силу определения (4.3) $Y = (\operatorname{Ad} g)\, X$. Обратно: из определения (4.3) и (4.4), (4.5) следует (4.7).

Итак, докажем, что из сопряженности G_X и G_Y вытекает (4.6).

Предположим, что существует $g_0 \in \exp\mathfrak{g}$ такое, что $g_0 G_X g_0^{-1} = G_Y$. Пусть u_X, u_Y — аналитические продолжения фундаментальных решений уравнений монодромии для токов $X(z)$ и $Y(z)$ соответственно. Аналогично тому, как это сделано при доказательстве предложения 3.2.5 [4], положим $g(z) = u_Y^{-1}(z)\, g_0 u_X(z)$. В то время как $u_X(z)$ и $u_Y(z)$ определены неоднозначно, $g(z)$ — однозначная функция. Докажем последнее, например, для обхода по малому контуру вокруг точки z_0 (обозначим его γ). Соответствующие операторы монодромии для токов $X(z)$ и $Y(z)$ обозначим $M_+(X)$ и $M_+(Y)$. Параметризуем контур γ отрезком $[0, T]$, положим $g(\tau) = g(\gamma(\tau))$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T)$. Тогда

$$g(\tau + T) = u_Y^{-1}(\tau + T)\, g_0 u_X(\tau + T) = u_Y^{-1}(\tau)\, M_+(Y)^{-1}\, g_0 M_+(X)\, u_X(\tau).$$

В силу того, что $M_+(Y) = g_0 M_+(X)\, g_0^{-1}$, имеем

$$g(\tau + T) = u_Y^{-1}(\tau)\,(g_0 M_+(X)^{-1} g_0^{-1})\, g_0 M_+(X)\, u_X(\tau) = u_Y^{-1}(\tau)\, g_0 u_X(\tau) = g(\tau),$$

т. е. $g(\tau)$ периодична на контуре γ и, аналогично, на любом другом замкнутом контуре на кривой Γ. Отсюда почти стандартным образом вытекает независимость $g(z)$ от пути. Действительно, пусть γ_1, γ_2 — два пути из точки 0 в точку z. При фиксированном z обозначим значения $g(z)$, $u(z)$, отвечающие пути γ из 0 в z через $g(\gamma)$, $u(\gamma)$. По доказанному выше

$$g(\gamma_1\gamma_2^{-1}) = g(0). \tag{4.8}$$

Так как $u_X(0) = u_Y(0) = I$, то $g(0) = g_0$. С другой стороны, $g(\gamma_1\gamma_2^{-1}) = u_Y(\gamma_1\gamma_2^{-1})^{-1}\, g_0 u_X(\gamma_1\gamma_2^{-1})$. Пользуясь известными мультипликативными свойствами решений уравнения монодромии по отношению к произведению путей, имеем $g(\gamma_1\gamma_2^{-1}) = u_Y(\gamma_1\gamma_2^{-1})\, g_0 u_X(\gamma_1\gamma_2^{-1}) = u_Y(\gamma_2)\, u_Y(\gamma_1^{-1})\, g_0 u_X(\gamma_1)\, u_X(\gamma_2)^{-1}$. Принимая во внимание (4.8), получим $u_Y(\gamma_1)^{-1}\, g_0 u_X(\gamma_1) = u_Y(\gamma_2)^{-1}\, g_0 u_X(\gamma_2)$, т. е. $g(\gamma_1) = g(\gamma_2)$. Однозначность функции $g(z)$ доказана.

Из сопряженности операторов монодромии по периодам следует двоякопериодичность $g(z)$.

Далее, аналогично теореме 3.2.5 (iii) [4] получаем

$$gX(z)\, g^{-1} - bEg'g^{-1} = u_Y^{-1} g_0\, (u_X X(z))\, u_X^{-1} g_0^{-1} u_Y + bEu_Y^{-1} u_Y' u_Y^{-1} g_0 u_X u_X^{-1} g_0^{-1} u_Y - bEu_Y^{-1} g_0 u_X' u_X^{-1} g_0^{-1} u_Y.$$

Заменяя в силу уравнения (4.2) в первом слагаемом $u_X X(z)$ на bEu_X', а во втором $bEu_Y^{-1} u_Y'$ на $Y(z)$, получим $gX(z)\, g^{-1} - bEg'g^{-1} = Y(z)$, что и требовалось. Доказательство закончено.

Рассмотрим связь CCC-группы, построенной в § 3, с орбитами. CCC-группу обозначим W_C. Определим действие этой группы на пространстве пар $\{\ln M_\omega, \ln M_{\omega'}\}$, где M_ω и $M_{\omega'}$ — полупростые элементы. Для этого представим M_ω и $M_{\omega'}$ в виде $M_\omega = g_\omega h_\omega g_\omega^{-1}$, $M_{\omega'} = g_{\omega'} h_{\omega'} g_{\omega'}^{-1}$, где h_ω, $h_{\omega'} \in \mathfrak{h}$. По определению имеем $\ln M_\omega = g_\omega \ln h_\omega \cdot g_\omega^{-1}$, $\ln M_{\omega'} = g_{\omega'} \ln h_{\omega'} \cdot g_{\omega'}^{-1}$, где элементы $\ln h_\omega$, $\ln h_{\omega'} \in \mathfrak{h}$ определены с точностью до сдвига на элементы решетки Q, порожденной системой корней в картановской подалгебре $\mathfrak{h}$. На пространстве пар $\{\ln h_\omega, \ln h_{\omega'}\}$ имеется стандартное действие группы W_C, определенное в § 3: если $w_C \in W_C$, то элемент w_C представим в виде $w_C = wT_{q_1 \oplus q_2}$, где $w \in W$, $q_1 \oplus q_2 \in Q \oplus Q$, а $T_{q_1 \oplus q_2}$ — оператор сдвига на элемент $q_1 \oplus q_2$, и

$$w_C(\ln h_\omega \oplus \ln h_{\omega'}) = w((\ln h_\omega + q_1) \oplus (\ln h_{\omega'} + q_2)). \tag{4.9}$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. 1°. *Две пары полупростых элементов вида $\{M_\omega, M_{\omega'}\}$ сопряжены относительно группы* $\exp \mathfrak{g}$ *тогда и только тогда, когда отвечающие им пары $\{\ln h_\omega, \ln h_{\omega'}\}$ принадлежат одной W_C-орбите в пространстве $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$.*

2°. *Множество пар $\{\ln h_\omega, \ln h_{\omega'}\}$, отвечающих орбите присоединенного действия группы токов, является W_C-орбитой в пространстве $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду теоремы 4.1 1° и 2° эквивалентны. Пары полупростых элементов $\{\ln h_\omega^{(i)}, \ln h_{\omega'}^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ W_C-сопряжены тогда и только тогда, когда существует элемент $w \in \exp \mathfrak{g}$ такой, что $(\mathrm{Ad}\, w)\, \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, и при некотором выборе значений логарифма $(\mathrm{Ad}\, w) \ln h_{\omega}^{(1)} = \ln h_{\omega}^{(2)}$, $(\mathrm{Ad}\, w) \ln h_{\omega'}^{(1)} = \ln h_{\omega'}^{(2)}$. Тогда $w h_{\omega}^{(1)} w^{-1} = h_{\omega}^{(2)}$ и $w h_{\omega'}^{(1)} w^{-1} = h_{\omega'}^{(2)}$, что очевидным образом влечет за собой сопряженность пар $\{M_{\omega}^{(i)}, M_{\omega'}^{(i)}\}$ относительно $\exp \mathfrak{g}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов. // Функцион. анализ и его прил.— 1987.— Т. 21, вып. 2.— С. 46—63.
2. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского // Функцион. анализ и его прил.— 1987.— Т. 21, вып. 4.— С. 47—61.
3. *Кац В. Г.* Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста // Известия АН СССР, сер. мат.— 1968.— Т. 32, № 6.— С. 1323—1367.
4. *Frenkel I. B.*, Orbital Theory of Affine Lie Algebras // Inv. Math.— 1984.— V. 77, N 2.— P. 301—352.
5. *Бернштейн И. Н., Шварцман О. В.* Теорема Шевалле для комплексных кристаллографических групп // Функцион. анализ и его прил.— 1978.— Т. 12, вып. 4.— С. 79—80.
6. *Бернштейн И. Н., Шварцман О. В.* Комплексные кристаллографические группы, порожденные отражениями, и тождества Макдональда. // Деп. 4Е122, РЖ Физика твердого тела.— 1977.— Т. 18Е, № 4.
7. *Segal G.* Unitary Representations of some Infinite Dimensional Groups // Comm. Math. Phys. 1981.— V. 80, № 3.— P. 301—342.
8. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. New York.— London, 1964.
9. *Jimbo M., Miwa T.* Deformation of Linear Ordinary Differential Equations. I // Proc. Japan Acad., Ser. A.— 1980.— V. 56, № 4.— P. 143—148.
10. *Шейнман О. К.* Гамильтонов формализм струны и дискретные группы // Функцион. анализ и его прил.— 1989.— Т. 23, вып. 2.— С. 49—54.

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступило в редакцию
29 декабря 1989 г.