Введение в вычислительную теорию доказательств
Часть II: категориальные грамматики

С. Л. Кузнецов

Кафедра математической логики и теории алгоритмов, мехмат МГУ

25 сентября 2013 г.

Литература

- B. Carpenter. Type-logical semantics.
- M. Sørensen, P. Urzyczyn. Lectures on the Curry-Howard isomorphism.

Исчисление Ламбека

$p_i \to p_i$

$$\frac{A\,\Pi \to B}{\Pi \to A \backslash B}\ (\to \backslash),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda; \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, \Pi\, (A \backslash B)\, \Delta \to C}\ (\backslash \to);$$

$$\frac{\Pi\, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda; \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (B \,/\, A)\, \Pi\, \Delta \to C}\ (/ \to);$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\, \Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot); \qquad \frac{\Gamma\, A\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (A \cdot B)\, \Delta \to C}\ (\cdot \to);$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, A\, \Delta \to C}{\Gamma\, \Pi\, \Delta \to C}\ (\mathrm{cut}).$$

Категориальная грамматика Ламбека

$\mathcal{G} = \langle \Sigma, \rhd, H \rangle$.
$\rhd \subset \mathrm{Tp} \times \Sigma$ — категориальный словарь.
H — выделенный тип, обычно базовый.

Категориальная грамматика Ламбека

$\mathcal{G} = \langle \Sigma, \triangleright, H \rangle$.
$\triangleright \subset \mathrm{Tp} \times \Sigma$ — категориальный словарь.
H — выделенный тип, обычно базовый.

Слово $w = a_1 a_2 \dots a_n$ принимается грамматикой, если существуют такие типы A_1, A_2, ..., A_n, что $A_i \triangleright a_i$ и $\mathrm{L} \vdash A_1 A_2 \dots A_n \to H$.

Исчисление Ламбека в формате естественного вывода

$$A \to A$$

$$\frac{A\Gamma \to B}{\Gamma \to A \setminus B} \qquad \frac{\Gamma A \to B}{\Gamma \to B \,/\, A}$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to A \setminus B}{\Gamma\Delta \to B} \qquad \frac{\Delta \to B \,/\, A \quad \Gamma \to A}{\Delta\Gamma \to B}$$

Соответствие Карри – Говарда для L

Если $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, то $\Gamma \vdash_{\mathrm{Int}_{\to}} A$. (Вместо $A \setminus B$ и $B \,/\, A$ подставляем $A \to B$.)

Соответствие Карри – Говарда для L

Если $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, то $\Gamma \vdash_{\mathrm{Int}_{\to}} A$. (Вместо $A \setminus B$ и $B \,/\, A$ подставляем $A \to B$.)

Если $\mathrm{L} \vdash B_1 \dots B_n \to A$, $x_i : B_i$, то существует λ-терм u, т. ч. $u : A$.

Соответствие Карри – Говарда для L

Если $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$, то $\Gamma \vdash_{\mathrm{Int}_{\to}} A$. (Вместо $A \setminus B$ и $B \,/\, A$ подставляем $A \to B$.)

Если $\mathrm{L} \vdash B_1 \ldots B_n \to A$, $x_i : B_i$, то существует λ-терм u, т. ч. $u : A$.

Обратное неверно (пример: $\lambda x.\lambda y.fxy$).

Семантическая разметка грамматики

Семантическая разметка: в категориальном словаре — тройки вида $\langle A, a, u \rangle$ ($a \in \Sigma$, $A \in \mathrm{Tp}$, $u : A$).

Семантическая разметка грамматики

Семантическая разметка: в категориальном словаре — тройки вида $\langle A, a, u \rangle$ ($a \in \Sigma$, $A \in \mathrm{Tp}$, $u : A$).

$w = a_1 a_2 \ldots a_n$

$\mathrm{L} \vdash B_1 B_2 \ldots B_n \to H$

Семантическая разметка грамматики

Семантическая разметка: в категориальном словаре — тройки вида $\langle A, a, u\rangle$ ($a \in \Sigma$, $A \in \mathrm{Tp}$, $u : A$).

$w = a_1 a_2 \dots a_n$

$\mathrm{L} \vdash B_1 B_2 \dots B_n \to H$

Пусть $x_i : B_i$. Получаем терм $u(x_1, \dots, x_n) : H$. Подставляем вместо x_i соответствующий u_i из категориального словаря. Получаем $u : H$ — это и есть искомая семантика.

Лингвистический пример

предложение:	Нарцисс	любит	себя
типы:	e	$e \setminus (e / t)$	$(e \setminus (e / t)) \setminus (e \setminus t)$
термы:	N	L	$\lambda y.\lambda x.y(x)(x)$

Лингвистический пример

предложение:	Нарцисс	любит	себя
типы:	e	$e \setminus (e \,/\, t)$	$(e \setminus (e \,/\, t)) \setminus (e \setminus t)$
термы:	N	L	$\lambda y.\lambda x.y(x)(x)$

$$\mathrm{L} \vdash e, e \setminus (e \,/\, t), (e \setminus (e \,/\, t)) \setminus (e \setminus t) \to t$$

$$u = (\lambda y.\lambda x.y(x)(x))(L)(N) \to_\beta (\lambda x.L(x)(x))(N) \to_\beta L(N)(N)$$

L-модели

Связки исчисления Ламбека естественным образом интерпретируются как операции над формальными языками ($M, N \subseteq \Sigma^+$):

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$

$$M \setminus N = \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in M)\, uv \in N\};$$

$$N \,/\, M = \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in M)\, vu \in N\}.$$

L-модели

Связки исчисления Ламбека естественным образом интерпретируются как операции над формальными языками ($M, N \subseteq \Sigma^+$):

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$
$$M \setminus N = \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in M)\, uv \in N\};$$
$$N \mathbin{/} M = \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in M)\, vu \in N\}.$$

Интерпретация: $w \colon \mathrm{Tp} \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$, $w(A \star B) = w(A) \star w(B)$ ($\star \in \{\cdot, /, \setminus\}$).

L-модели

Связки исчисления Ламбека естественным образом интерпретируются как операции над формальными языками ($M, N \subseteq \Sigma^+$):

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$

$$M \setminus N = \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in M)\, uv \in N\};$$

$$N \,/\, M = \{v \in \Sigma^+ \mid (\forall u \in M)\, vu \in N\}.$$

Интерпретация: $w \colon \mathrm{Tp} \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$, $w(A \star B) = w(A) \star w(B)$ ($\star \in \{\cdot, /, \setminus\}$).

Теорема (М. Р. Пентус '95)

$L \vdash A \to B$ тогда и только тогда, когда $w(A) \subseteq w(B)$ для всех w.

Теоремы о классах языков

Теорема (Х. Гайфман '60, М. Р. Пентус '92)

Класс языков, порождаемых грамматиками Ламбека, совпадает с классом контекстно-свободных языков без пустого слова.

Теоремы о классах языков

Теорема (Х. Гайфман '60, М. Р. Пентус '92)

Класс языков, порождаемых грамматиками Ламбека, совпадает с классом контекстно-свободных языков без пустого слова.

Теорема (Х. Гайфман '60, М. Р. Пентус '92, С. К. '12)

Класс языков, порождаемых грамматиками, основанными на исчислении Ламбека, допускающем пустые левые части секвенций, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.

Теоремы о классах языков

Теорема (Х. Гайфман '60, М. Р. Пентус '92)

Класс языков, порождаемых грамматиками Ламбека, совпадает с классом контекстно-свободных языков без пустого слова.

Теорема (Х. Гайфман '60, М. Р. Пентус '92, С. К. '12)

Класс языков, порождаемых грамматиками, основанными на исчислении Ламбека, допускающем пустые левые части секвенций, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.

Теорема (А. Н. Сафиуллин '06)

Всякий контекстно-свободный язык без пустого слова порождается грамматикой Ламбека с однозначным присвоением типов.

Сложность

Теорема (М. Р. Пентус '97)

Проблема выводимости в исчислении Ламбека NP-полна.

Сложность

Теорема (М. Р. Пентус '97)

Проблема выводимости в исчислении Ламбека NP-полна.

Теорема (М. Р. Пентус '11)

Проблема выводимости разрешима за полиномиальное время, если глубина типов ограничена константой.

Спасибо за внимание!