

Задачи к курсу «λ-исчисление», часть 1
осень 2022 г., лектор С. Л. Кузнецов

В этом списке задач используется простое типизованное λ-исчисление (λ_{\rightarrow}) по Чёрчу. Через **nat** обозначается тип $(\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau \rightarrow \tau$, где τ — фиксированная переменная по типам.

1. Постройте замкнутый терм P , имеющий тип $((((\tau \rightarrow \sigma) \rightarrow \tau) \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma$.
2. Постройте комбинаторный терм, имеющий тип $(\tau \rightarrow \sigma) \rightarrow (\sigma \rightarrow \nu) \rightarrow \tau \rightarrow \nu$.
3. Обозначим через M^* результат преобразования λ-терма M в комбинаторный терм. Пусть $M_1 \rightarrow_{\beta} M_2$. Обязательно ли $M_1^* \rightarrow_w M_2^*$?
4. Постройте такой комбинаторный терм K типа $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$, что $KFM \rightarrow_w F(FM)$ для любых комбинаторных термов F и M , имеющих типы $\alpha \rightarrow \alpha$ и α соответственно.
5. Докажите, что если N — замкнутый терм типа **nat** в нормальной форме, то N — нумерал Чёрча либо $N = \lambda y^{\tau \rightarrow \tau}.y$.
6. Представима ли в λ_{\rightarrow} термом типа **nat** \rightarrow **nat** функция «предшественник», определяемая следующим образом?

$$\text{Pred}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0; \\ x - 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

7. Расширим язык типов операциями \times (конъюнкция), \vee (дизъюнкция), \perp (константа «ложь») соответствующим образом расширим язык термов и β -редукции (см. лекцию 3). Докажите для расширенного таким образом исчисления теорему о слабой нормализуемости. Выведите отсюда невыводимость формулы $\tau \vee (\tau \rightarrow \perp)$ в интуиционистской логике высказываний.