

Задачи к курсу «λ-исчисление», часть 2
осень 2022 г., лектор С. Л. Кузнецов

8. Существуют ли такие замкнутые λ-термы M и N , что $M \rightarrow N$ и при этом **а)** N типизуем в системе λ_{\rightarrow} (по Карри), а M — нет? **б)** оба типа типизуемы, но при этом существует такой тип α , что $\vdash N : \alpha$ и $\not\vdash M : \alpha$? **в)** те же вопросы для системы λ_2 (системы F).

9. Напомним обозначение $\text{Nat} = \forall \tau. (\tau \rightarrow (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau)$. Докажите, что любой замкнутый λ_2 -терм (при типизации по Чёрчу) в нормальной форме, имеющий тип Nat , является нумералом Чёрча, т.е. имеет вид $\underline{n} = \Lambda \tau. \lambda x^\tau. \lambda f^{\tau \rightarrow \tau}. \underbrace{f(f(\dots f(f x)\dots))}_n$.

10. Для терма $\lambda x.(xx)$ приведите два различных замкнутых (т.е. не содержащих свободных переменных по типам) типа в системе λ_2 по Карри.

11. Существует ли сильно нормализуемый λ-терм, не типизуемый в системе λ_2 (по Карри) ни в каком контексте?

12. Докажите в системе естественного вывода для исчисления предикатов 2-го порядка схему аксиом свёртки:

$$\exists A \forall a (a \in A \leftrightarrow \varphi),$$

где формула φ не содержит свободной переменной 2-го порядка A (но при этом может содержать свободно переменную a , а также другие свободные переменные как 1-го, так и 2-го порядка).

13. Докажите, что в системе естественного вывода для исчисления предикатов 2-го порядка можно ограничиться правилом удаления константы «ложь»:

$$\frac{\vdots}{\varphi} \perp E$$

только для атомарных формул φ .

14. Докажите, что в HA_2 невозможно формализовать доказательство сильной нормализуемости для системы F . (Подсказка: иначе можно было бы доказать в HA_2 сильную нормализуемость для самой HA_2 , откуда можно прийти к противоречию со 2-й теоремой Гёделя.)