

Задачи к курсу «λ-исчисление», часть 3
осень 2022 г., лектор С. Л. Кузнецов

15. Определим на натуральных числах семейство функций f_0, f_1, f_2, \dots . Пусть $f_0(n) = n + 1$ и $f_{k+1}(n) = \underbrace{f_k(f_k(\dots(f_k(n))\dots))}_{n \text{ раз}}$. Положим $f_\infty(n) = f_n(n)$ для каждого натурального n .

Докажите, что функция f_∞ (это один из вариантов функции Аккермана) определима в гёделевской системе Т.

16. Бинарное отношение $R \subseteq W \times W$ на некотором (возможно бесконечном) множестве W обладает:

- *свойством D (ромба)*, если из xRy и xRz следует, что существует такой $w \in W$, что yRw и zRw ;
- *свойством CR (Чёрча – Россера)*, если отношение R^* , т.е. рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R , обладает свойством D;
- *свойством WCR (слабым свойством Чёрча – Россера)*, если из xRy и yRz следует, что существует такой $w \in W$, что yR^*w и zR^*w .

Докажите, что существует бинарное отношение, обладающее свойством WCR, но не CR.

17. *Лемма Ньюмена.* Бинарное отношение $R \subseteq W \times W$ обладает свойством SN (сильная нормализуемость), если не существует бесконечной последовательности $x_0Rx_1Rx_2R\dots$. Докажите, что любое отношение, обладающее свойствами WCR и SN, обладает свойством CR.

18. Докажите для системы Т свойство Чёрча – Россера: если $M_1 \rightarrow M_2$ и $M_1 \rightarrow M_3$, то существует такой терм M_4 , что $M_2 \rightarrow M_4$ и $M_3 \rightarrow M_4$.

19. Разрешима ли следующая алгоритмическая задача: даны термы M и K системы Т; существует ли такой терм N , что терм MN корректно типизирован и $MN \rightarrow K$?

20. Докажите, что если удалить из системы Т тип \mathbb{B} (булевы значения) и связанные с ним константы T, F и конструктор термов D , то класс определимых в системе Т функций не поменяется.