Задачи к спец. курсу «Категориальные грамматики Ламбека»
осень 2011 г.

Задача 1. Является ли язык $\mathscr{L} \leftrightharpoons \{\Gamma \to B \mid \mathrm{L} \vdash \Gamma \to B\} \subset \{\cdot, \backslash, /, p, \#,), (, \to\}^*$ контекстно-свободным (примитивный тип p_n кодируется как $p\underbrace{\#\#\ldots\#}_{n}$)?

Задача 2. Существуют ли такие два типа $A, B \in \mathrm{Tp}(\backslash)$, что $A \leftrightarrow_{\mathrm{L}^*(\backslash)} B$ и $A \neq B$?

Задача 3. Существуют ли такие типы $A \in \mathrm{Tp}(\backslash)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$, что $A \leftrightarrow_{\mathrm{L}} B$ и $A \neq B$?

Задача 4. Приведите пример замкнутого типового λ-терма u, для которого не существует такого $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /)$, что $\mathrm{L}^*(\backslash, /) \vdash \to u : A$.

Задача 5. Существует ли такой тип A, что **а)** $\mathrm{L}^* \vdash A \to A \cdot A$; **б)** $\mathrm{L} \vdash A \cdot A \to A$; **в)** $\mathrm{L} \vdash A \to A \cdot A$?

Задача 6. Секвенция $p \backslash (q \cdot r) \to (p \backslash q) \cdot r$ невыводима в исчислении L. Постройте L-модель, в которой эта секвенция ложна.

Задача 7. Секвенция $p \to q \cdot (q \backslash p)$ невыводима в исчислении L. Постройте L-модель, в которой эта секвенция ложна.

Задача 8. Полно ли исчисление L относительно класса L-моделей, в которых интерпретации всех примитивных типов суть конечные языки?

Задача 9. Существуют ли такие типы $A, B \in \mathrm{Tp}$, что $[\![A]\!] = [\![B]\!]$, но $\mathrm{L} \nvdash A \to B$ и $\mathrm{L} \nvdash B \to A$?

Задача 10. Исчисление LA получается из исчисления L добавлением двух новых двуместных связок $\cap$ и $\cup$ (называемых *аддитивными* конъюнкцией и дизъюнкцией соответственно) с правилами вывода

$$\frac{\Pi \to A \qquad \Pi \to B}{\Pi \to A \cap B} \qquad \frac{\Gamma\, A\, \Delta \to C}{\Gamma\, (A \cap B)\, \Delta \to C} \qquad \frac{\Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (A \cap B)\, \Delta \to C}$$

$$\frac{\Pi \to A}{\Pi \to A \cup B} \qquad \frac{\Pi \to B}{\Pi \to A \cup B} \qquad \frac{\Gamma\, A\, \Delta \to C \qquad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (A \cup B)\, \Delta \to C}$$

Существует ли LA-грамматика, задающая язык $\{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$?

Задача 11. Является ли L-полным исчисление $\mathrm{L}^*(\cdot, \mathbf{1})$ (фрагмент исчисления $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$, где в языке оставлены только примитивные типы, константа $\mathbf{1}$ и операция умножения)?

Задача 12. **а)** Рассмотрим свободную абелеву группу $\langle \mathbf{A}_n, + \rangle$ с n порождающими. Для $u = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{A}_n$ ($k_i \in \mathbb{Z}$) положим $|u| \leftrightharpoons |k_1| + \cdots + |k_n|$. Существует ли такие натуральные числа n, m и M и такие $u_1, \ldots, u_m \in \mathbf{A}_n$, что $|u_i| \leqslant M$ (для всех i от 1 до m), но для любых двух различных i и j имеет место $|u_i + u_j| > M$?

б) Исчисление LP получается из исчисления L добавлением правила перестановки

$$\frac{\Gamma\, A\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, B\, A\, \Delta \to C}.$$

Для этого исчисления выполняется интерполяционная лемма (доказательство точно такое же, как и для L). Для $A \in \mathrm{Tp}$ пусть $|A|$ есть количество вхождений примитивных типов в A. Существует ли такое натуральное M и такая выводимая в LP секвенция $A_1, \ldots, A_m \to B$, что $|B| \leqslant M$, $|A_i| \leqslant M$ (для всех i от 1 до m), но для интерполянта E любой нетривиальной (т.е. состоящей более, чем из одного, и менее, чем из m типов) части антецедента имеет место $|E| > M$?