Задачи к спецкурсу «Категориальные грамматики Ламбека»

Исчисления

Несеквенциальное исчисление Ламбека ($\mathrm{L_H}$)

Типы исчисления Ламбека строятся из переменных $(p, q, r, \ldots)$ с помощью связок $\cdot$, $\backslash$ и $/$. Множество всех типов обозначается Tp. *Формулы* исчисления $\mathrm{L_H}$ — это выражения вида $A \to B$, где A и B — типы.

Аксиомы: $A \to A$, $(A \cdot B) \cdot C \to A \cdot (B \cdot C)$, $A \cdot (B \cdot C) \to (A \cdot B) \cdot C$.

Правила вывода:

$$\frac{A \cdot C \to B}{C \to A \,\backslash\, B} \qquad \frac{C \cdot A \to B}{C \to B \,/\, A} \qquad \frac{C \to A \,\backslash\, B}{A \cdot C \to B} \qquad \frac{C \to B \,/\, A}{C \cdot A \to B} \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

Секвенциальное исчисление Ламбека (L)

Секвенции имеют вид $\Gamma \to A$, где Γ — непустая последовательность типов, A — тип.

Аксиомы: $p_i \to p_i$.

Правила вывода:

$$\frac{A\,\Pi \to B}{\Pi \to A \,\backslash\, B}\ (\to \backslash), \text{ где } \Pi \text{ непуста} \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, \Pi\, (A \,\backslash\, B)\, \Delta \to C}\ (\backslash \to), \text{ где } \Pi \text{ непуста}$$

$$\frac{\Pi\, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /) \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (B \,/\, A)\, \Pi\, \Delta \to C}\ (/ \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\, \Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot) \qquad \frac{\Gamma\, A\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (A \cdot B)\, \Delta \to C}\ (\cdot \to)$$

Интуиционистская логика высказываний (система естественного вывода, конъюнктивно-импликативный фрагмент — $\mathrm{Int}^{\mathrm{Nat}}_{\wedge,\to}$)

Формулы строятся из переменных с помощью связок $\to$ и $\wedge$. Секвенции имеют вид $\Gamma \vdash A$, где Γ — *множество* формул, A — формула (отметим, что, в отличие от L, порядок формул и количество их повторений в Γ несущественно; такое соглашение позволяет не формулировать в явном виде правила перестановки и сокращения).

Аксиомы: $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$.

Правила вывода:

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1 \quad \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash A_i}\ (i = 1, 2)$$

Разметка выводов в $\mathrm{Int}^{\mathrm{Nat}}_{\wedge,\to}$ λ-термами (соответствие Карри – Говарда)

Если $\Gamma = \{C_1, \ldots, C_n\}$, то через $\vec{y} : \Gamma$ обозначается $\{y_1 : C_1, \ldots, y_n : C_n\}$. Запись $u(\vec{y})$ означает, что все свободные переменные λ-терма u содержатся в множестве $\{y_1, \ldots, y_n\}$ (при этом не все y_i должны быть непременно использованы).

$$\vec{y} : \Gamma, x : A \vdash x : A$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u(x, \vec{y}) : B}{\vec{y} : \Gamma \vdash \lambda x.u(x, \vec{y}) : (A \to B)} \qquad \frac{\vec{y} : \Gamma \vdash u(\vec{y}) : (A \to B) \quad \vec{y} : \Gamma \vdash v(\vec{y}) : A}{\vec{y} : \Gamma \vdash u(\vec{y})v(\vec{y}) : B}$$

$$\frac{\vec{y} : \Gamma \vdash u_1(\vec{y}) : A_1 \quad \vec{y} : \Gamma \vdash u_2(\vec{y}) : A_2}{\vec{y} : \Gamma \vdash \langle u_1(\vec{y}), u_2(\vec{y}) \rangle : (A_1 \wedge A_2)} \qquad \frac{\vec{y} : \Gamma \vdash u(\vec{y}) : (A_1 \wedge A_2)}{\vec{y} : \Gamma \vdash \pi_i(u(\vec{y})) : A_i}\ (i = 1, 2)$$

Задачи

Задача 1. Определим *стандартный перевод* типов исчисления Ламбека в формулы интуиционистской логики следующим образом: $\widehat{p} = p$, $\widehat{A \cdot B} = (\widehat{A} \wedge \widehat{B})$, $\widehat{A \setminus B} = \widehat{B \,/\, A} = (\widehat{A} \to \widehat{B})$. Докажите, что если в исчислении Ламбека выводима секвенция $A \to B$, то в $\mathrm{Int}^{\mathrm{Nat}}_{\wedge,\to}$ выводима $\widehat{A} \vdash \widehat{B}$.

Задача 2. *Для знающих интуиционистскую логику в другом формате.* Докажите, что в исчислении $\mathrm{Int}^{\mathrm{Nat}}_{\wedge,\to}$ выводимы в точности все формулы, выводимые в интуиционистской логике высказываний и содержащие только связки $\wedge$ и $\to$.

Задача 3. Постройте выводы следующих формул в исчислении $\mathrm{L_H}$: **а)** $(p \,/\, q) \cdot q \to p$; **б)** $(p \,/\, q) \setminus p \to p \,/ (q \setminus p)$; **в)** $p \to (q \,/\, p) \setminus q$; **г)** $p \,/ (q \cdot r) \to (p \,/\, r) \,/\, q$.

Задача 4. Докажите, что в исчислении $\mathrm{L_H}$ допустимы *правила монотонности*: **а)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash A \cdot C \to B \cdot C$; **б)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash C \cdot A \to C \cdot B$; **в)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash A \,/\, C \to B \,/\, C$; **г)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash C \setminus A \to C \setminus B$; **д)** Если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash C \,/\, B \to C \,/\, A$; **е)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash B \setminus C \to A \setminus C$.

Задача 5. Докажите, что $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{L} \vdash A \to B$.

Определение. L-моделью (языковой моделью, моделью на подмножествах свободной полугруппы) называется структура $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$, где Σ — конечный или счётный алфавит, а $w\colon \mathrm{Tp} \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$ — отображение, сопостовляющее типам исчисления Ламбека языки над алфавитом Σ и удовлетворяющее следующим требованиям: $w(A \cdot B) = w(A) \cdot w(B)$, $w(A \setminus B) = w(A) \setminus w(B)$, $w(B \,/\, A) = w(B) \,/\, w(A)$. Формула $A \to B$ *истинна в модели* $\mathcal{M}$ (пишем: $\mathcal{M} \vDash A \to B$), если $w(A) \subseteq w(B)$.

Задача 6. Проверьте, что формулы из задачи 3 истинны во всех L-моделях.

Задача 7. Формула **а)** $p \to q \cdot (q \setminus p)$; **б)** $p \setminus (q \cdot r) \to (p \setminus q) \cdot r$; **в)** $(p \cdot q) \setminus r \to p \cdot (q \setminus r)$ невыводима в $\mathrm{L_H}$. Докажите это, построив L-модель, в которой она ложна.

Задача 8*. Полно ли исчисление $\mathrm{L_H}$ относительно класса L-моделей, в которых интерпретации всех переменных суть конечные языки? (Иначе говоря, существует ли формула, не выводимая в исчислении $\mathrm{L_H}$, но истинная во всех моделях, в которых $w(p)$ для любой переменной p является конечным языком?)

Задача 9*. Ограничимся типами, не содержащими связок $\cdot$ и $/$. Рассмотрим исчисление $\mathrm{L_H}(\setminus)$ (Сава-теев, 2004): аксиомы: $A \to A$ и $B \setminus C \to (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$, правила:

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C} \qquad \frac{A \to B \quad C \to D}{B \setminus C \to A \setminus D}$$

а) Докажите, что всякая формула, истинная во всех L-моделях, типы которой не содержат $\cdot$ и $/$, выводима в $\mathrm{L_H}(\setminus)$ (L-полноту исчисления $\mathrm{L_H}(\setminus)$).

б) Докажите, что всякая формула, выводимая в $\mathrm{L_H}$, типы которой не содержат $\cdot$ и $/$, выводима в $\mathrm{L_H}(\setminus)$ (консервативность $\mathrm{L_H}$ над $\mathrm{L_H}(\setminus)$).

Задача 10.** Сформулируйте исчисление $\mathrm{L_H}(\setminus, /)$ и докажите для него утверждения, аналогичные утверждениям предыдущей задачи, для случая типов, не содержащих связки $\cdot$ (умножения).

Задача 11. Постройте замкнутый λ-терм типа **а)** $\big((A \wedge B) \to C\big) \to \big(A \to (B \to C)\big)$; **б)** $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \wedge B) \to C\big)$; **в)** $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((B \to (A \to C)\big)$.

Задача 12. Даны λ-термы $u : (A \to B)$ и $v : (B \to C)$. Постройте терм типа $A \to C$.

Задача 13. **а)** Постройте замкнутые λ-термы типов $(A \wedge B) \to A$ и $(A \wedge B) \to B$. **б)** Пусть $u : (C \to A)$ и $v : (C \to B)$. Постройте λ-терм типа $C \to (A \wedge B)$.

Задача 14. **а)** Постройте замкнутый λ-терм типа $\big((B \to A) \wedge B\big) \to A$. **б)** Пусть $f : \big((Z \wedge B) \to A\big)$. Постройте λ-терм типа $Z \to (B \to A)$.

Пусть A — тип исчисления Ламбека, p — переменная. Определим счётчики положительных ($\#_p^+(A)$), отрицательных ($\#_p^-(A)$) и всех ($|A|_p$) вхождений p_i в A рекурсивно: $\#_p^+(p) \leftrightharpoons 1$, $\#_p^+(q) \leftrightharpoons 0$ при $q \neq p$, $\#_p^-(q) \leftrightharpoons 0$ для всех q; $\#_p^\pm(A \cdot B) \leftrightharpoons \#_p^\pm(A) + \#_p^\pm(B)$, $\#_p^\pm(A \setminus B) \leftrightharpoons \#_p^\pm(B \,/\, A) \leftrightharpoons \#_p^\mp(A) + \#_p^\pm(B)$; $|A|_p \leftrightharpoons \#_p^+(A) + \#_p^-(A)$. Положим $\mathrm{Var}(A) \leftrightharpoons \{p \mid |A|_p > 0\}$. Эти понятия легко продолжаются на последовательности формул.

Интерполяционная лемма Крейга. Пусть $\vdash \Phi\,\Theta\,\Psi \to C$, $\Theta \neq \Lambda$. Тогда существует такой тип E, что (1) $\vdash \Theta \to E$ и $\vdash \Phi\,E\,\Theta \to C$; (2) $\mathrm{Var}(E) \subseteq \mathrm{Var}(\Theta) \cap \mathrm{Var}(\Phi\,\Psi\,C)$.

Задача 15. Докажите интерполяционную лемму Крейга **а)** для исчисления Ламбека L; **б)** для варианта исчисления Ламбека, допускающего пустые левые части секвенций (L*); **в)** для классической логики высказываний.

Интерполяционная лемма Роорды (без учёта полярности). Пусть $\mathrm{L} \vdash \Phi\,\Theta\,\Psi \to C$, $\Theta \neq \Lambda$. Тогда существует такой тип E, что (1) $\mathrm{L} \vdash \Theta \to E$ и $\mathrm{L} \vdash \Phi\,E\,\Theta \to C$; (2) $|E|_p \leqslant \max\{|\Theta|_p, |\Phi|_p + |\Psi|_p + |C|_p\}$ для любой переменной p.

Задача 16. Верна ли интерполяционная лемма Роорды без учёта полярности **а)** для исчисления L*? **б)** для классической логики высказываний?

Интерполяционная лемма Роорды (с учётом полярности). Пусть $\mathrm{L}^* \vdash \Phi\,\Theta\,\Psi \to C$, $\Theta \neq \Lambda$. Тогда существует такой тип E, что (1) $\mathrm{L}^* \vdash \Theta \to E$ и $\mathrm{L}^* \vdash \Phi\,E\,\Theta \to C$; (2) $\#_p^+(E) \leqslant \max\{\#_p^+(\Theta), \#_p^-(\Phi) + \#_p^-(\Psi) + \#_p^+(C)\}$ для любой переменной p; (3) $\#_p^-(E) \leqslant \max\{\#_p^-(\Theta), \#_p^+(\Phi) + \#_p^+(\Psi) + \#_p^-(C)\}$ для любой переменной p;

Задача 17. Верна ли интерполяционная лемма Роорды с учётом полярности для исчисления L?