Задачи к спецкурсу «Полнота исчисления Ламбека»

(исправленная версия)

Определение. Пусть M и N — языки над алфавитом Σ без пустого слова ($M, N \subseteq \Sigma^+$). Тогда $M \cdot N \leftrightharpoons \{uv \mid u \in M, v \in N\}$, $M \setminus N \leftrightharpoons \{u \in \Sigma^+ \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\}$, $N \,/\, M \leftrightharpoons \{u \in \Sigma^+ \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}$.

Задача 1. Пусть $\Sigma = \{a, b, c\}$. Опишите следующие множества: **а)** $\{abcc, ccaccbc, cc, ccc\} \,/\, \{cc\}$; **б)** $\{ba, baa, baaa, baaaa, aaa, aaaa\} \,/\, \{aa, aaa\}$; **в)** $\{a^n b^m \mid 0 < n < m\} \,/\, \{b^k \mid k > 0\}$; **г)** $\varnothing \setminus \{a, ab, bcca\}$; **д)** $\Sigma^+ \,/\, \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

Задача 2. Существуют ли такие конечные множества $L, M \subseteq \{a, b, c\}^+$, что **а)** $|L \cdot M| > |L| \cdot |M|$? **б)** $|L \cdot M| < |L| \cdot |M|$? **в)** $|L \,/\, M| > |L|$?

Несеквенциальное исчисление Ламбека ($\mathrm{L_H}$)

Типы исчисления Ламбека строятся из переменных $(p, q, r, \ldots)$ с помощью связок $\cdot$, $\setminus$ и $/$. Множество всех типов обозначается Tp. *Формулы* исчисления $\mathrm{L_H}$ — это выражения вида $A \to B$, где A и B — типы.

Аксиомы: $A \to A$, $(A \cdot B) \cdot C \to A \cdot (B \cdot C)$, $A \cdot (B \cdot C) \to (A \cdot B) \cdot C$.

Правила вывода:

$$\frac{A \cdot C \to B}{C \to A \setminus B} \qquad \frac{C \cdot A \to B}{C \to B \,/\, A} \qquad \frac{C \to A \setminus B}{A \cdot C \to B} \qquad \frac{C \to B \,/\, A}{C \cdot A \to B} \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

Задача 3. Постройте выводы следующих формул в исчислении $\mathrm{L_H}$: **а)** $(p \,/\, q) \cdot q \to p$; **б)** $p \to (q \,/\, p) \setminus q$; **в)** $p \,/ (q \cdot r) \to (p \,/\, r) \,/\, q$.

Задача 4. Докажите, что в исчислении $\mathrm{L_H}$ допустимы *правила монотонности*: **а)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash A \cdot C \to B \cdot C$; **б)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash C \cdot A \to C \cdot B$; **в)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash A \,/\, C \to B \,/\, C$; **г)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash C \setminus A \to C \setminus B$; **д)** Если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash C \,/\, B \to C \,/\, A$; **е)** если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, то $\mathrm{L_H} \vdash B \setminus C \to A \setminus C$.

Определение. L-моделью (языковой моделью, моделью на подмножествах свободной полугруппы) называется структура $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$, где Σ — конечный или счётный алфавит, а $w \colon \mathrm{Tp} \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$ — отображение, сопоставляющее типам исчисления Ламбека языки над алфавитом Σ и удовлетворяющее следующим требованиям: $w(A \cdot B) = w(A) \cdot w(B)$, $w(A \setminus B) = w(A) \setminus w(B)$, $w(B \,/\, A) = w(B) \,/\, w(A)$. Формула $A \to B$ *истинна в модели* $\mathcal{M}$ (пишем: $\mathcal{M} \vDash A \to B$), если $w(A) \subseteq w(B)$.

Задача 5. Проверьте, что формулы из задачи 3 истинны во всех L-моделях.

Задача 6. Формула **а)** $p \to q \cdot (q \setminus p)$; **б)** $p \setminus (q \cdot r) \to (p \setminus q) \cdot r$; **в)** $(p \,/\, q) \setminus p \to p \,/ (q \setminus p)$ невыводима в $\mathrm{L_H}$. Докажите это, построив L-модель, в которой она ложна.

Задача 7*. Полно ли исчисление $\mathrm{L_H}$ относительно класса L-моделей, в которых интерпретации всех переменных суть конечные языки? (Иначе говоря, существует ли формула, не выводимая в исчислении $\mathrm{L_H}$, но истинная во всех моделях, в которых $w(p)$ для любой переменной p является конечным языком?)

Задача 8*. Ограничимся типами, не содержащими связок $\cdot$ и $/$. Рассмотрим исчисление $\mathrm{L_H}(\setminus)$ (Саватеев, 2004): аксиомы: $A \to A$ и $B \setminus C \to (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$, правила:

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C} \qquad \frac{A \to B \quad C \to D}{B \setminus C \to A \setminus D}$$

а) Докажите, что всякая формула, истинная во всех L-моделях, типы которой не содержат $\cdot$ и $/$, выводима в $\mathrm{L_H}(\setminus)$ (L-полноту исчисления $\mathrm{L_H}(\setminus)$).

б) Докажите, что всякая формула, выводимая в $\mathrm{L_H}$, типы которой не содержат $\cdot$ и $/$, выводима в $\mathrm{L_H}(\setminus)$ (консервативность $\mathrm{L_H}$ над $\mathrm{L_H}(\setminus)$).

Задача 9.** Сформулируйте исчисление $\mathrm{L_H}(\setminus, /)$ и докажите для него утверждения, аналогичные утверждениям предыдущей задачи, для случая типов, не содержащих связки $\cdot$ (умножения).