Задачи к спецкурсу «Полнота исчисления Ламбека»

Исчисление Ламбека в генценовском (секвенциальном) виде (исчисление L).
Аксиомы: $A \to A$.
Правила вывода:

$$\frac{A\Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ (\Pi \text{ непуста}) \qquad \frac{\Pi A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\Pi \text{ непуста}) \qquad \frac{\Gamma A B \Delta \to C}{\Gamma (A \cdot B) \Delta \to C}$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma \Pi (A \setminus B) \Delta \to C} \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma B \Delta \to C}{\Gamma (B \,/\, A) \Pi \Delta \to C} \qquad \frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma \Delta \to A \cdot B}$$

Правило сечения $\frac{\Pi \to A \quad \Gamma A \Delta \to C}{\Gamma \Pi \Delta \to C}$ допустимо в этом исчислении (его добавление не увеличивает множества выводимых формул). Исчисление L эквивалентно введённому ранее исчислению $\mathrm{L_H}$.

Задача 10. Существует ли такой тип A, что **а)** $\mathrm{L} \vdash AA \to A$? **б)** $\mathrm{L} \vdash A \to A \cdot A$? **в)** $\mathrm{L} \vdash AA \to A$, но $\mathrm{L} \nvdash AAA \to A$?

Задача 11. Существуют ли такие типы A и B, что **а)** $\mathrm{L} \vdash A \to A \cdot B$? **б)** $\mathrm{L} \vdash A \setminus B \to B$?

Определение. *Квазимоделью* называется структура $\langle \Sigma, w \rangle$, где Σ — алфавит, $w\colon \mathrm{Tp} \to \mathcal{P}(\Sigma^+)$ — интерпретирующая функция, удовлетворяющая следующим двум условиям:
1) $w(A \cdot B) \subseteq w(A) \cdot w(B)$ для любых двух типов A и B;
2) исчисление Ламбека корректно относительно интерпретации w, т.е. если $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to B$, то $w(\Gamma) \subseteq w(B)$.
(Если $\Gamma = A_1 \ldots A_n$, то $w(\Gamma) \leftrightharpoons w(A_1) \cdot \ldots \cdot w(A_n)$.)

Задача 12°. Докажите, что в любой квазимодели $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ для любых двух типов A и B выполняются соотношения $w(A \cdot B) = w(A) \cdot w(B)$, $w(A \setminus B) \subseteq w(A) \setminus w(B)$, $w(B \,/\, A) \subseteq w(B) \,/\, w(A)$.

Замечание. Таким образом, отличие квазимодели от модели состоит только в том, что в квазимодели для некоторых типов A и B не выполняется включение $w(A) \setminus w(B) \subseteq w(A \setminus B)$ или включение $w(B) \,/\, w(A) \subseteq w(B \,/\, A)$.

Задача 13. Докажите, что в любой квазимодели $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ для любых трёх типов A, B и C выполняется соотношение $w(A \setminus B) \subseteq w(B \setminus C) \setminus w(A \setminus C)$.

Определение. Квазимодель $\mathcal{M}_2 = \langle \Sigma_2, w_2 \rangle$ называется *консервативным расширением* квазимодели $\mathcal{M}_1 = \langle \Sigma_1, w_1 \rangle$ (обозначение: $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}_2$), если $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, и для любого типа A имеет место равенство $w_2(A) \cap \Sigma_1^+ = w_1(A)$.

Определение. Последовательность квазимоделей $(\mathcal{M}_i)_{i<\omega}$ называется *консервативной,* если $\mathcal{M}_i \preccurlyeq \mathcal{M}_{i+1}$ для всех i. Пусть $\mathcal{M}_i = \langle \Sigma_i, w_i \rangle$. *Пределом* этой последовательности называется структура $\mathcal{M}_\omega \leftrightharpoons \left\langle \bigcup\limits_{i<\omega} \Sigma_i, w_\omega \right\rangle$, где $w_\omega(A) \leftrightharpoons \bigcup\limits_{i<\omega} w_i(A)$.
Напомним, что ω — это множество натуральные чисел с естественным порядком (наименьший бесконечный ординал), т. е. запись «$i < \omega$» означает всего лишь «i пробегает по натуральным числам». Можно рассматривать понятие консервативной последовательности квазимоделей для произвольного ординала, но для наших целей достаточно ω.

Задача 14°. а) Докажите, что если $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_2 \preccurlyeq \mathcal{M}_3$, то $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}_3$.

б) Докажите, что предел консервативной последовательности квазимоделей является квазимоделью и консервативным расширением каждой из квазимоделей в последовательности.

Задача 15°. $\mathcal{M}_1 = \langle \Sigma_1, w_1 \rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \langle \Sigma_2, w_2 \rangle$ — две квазимодели, причём $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$. Всегда ли существует такая квазимодель $\mathcal{M}$, что $\mathcal{M} \succcurlyeq \mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M} \succcurlyeq \mathcal{M}_2$?

Задача 16.** Существует ли квазимодель, не имеющая консервативного расширения, являющегося L-моделью?