

Задачи и упражнения

Интуиционистская логика первого порядка

1. Для каждой из следующих формул установите, выводима ли она в FO-Int (постройте доказательство или опровергающую модель Крипке).

- | | |
|---|--|
| 1. $\neg\exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$ | 8. $\exists x \forall y Q(x, y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$ |
| 2. $\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg\exists x P(x)$ | 9. $\forall y \exists x Q(x, y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x, y)$ |
| 3. $\neg\neg\forall x P(x) \rightarrow \forall x \neg\neg P(x)$ | 10. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ |
| 4. $\neg\neg\exists x P(x) \rightarrow \exists x \neg\neg P(x)$ | 11. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ |
| 5. $\exists x \neg\neg P(x) \rightarrow \neg\neg\exists x P(x)$ | 12. $\neg\neg\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$ |
| 6. $\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$ | 13. $\forall x \neg\neg(P(x) \vee \neg P(x))$ |
| 7. $\exists x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$ | 14. $\neg(\forall x \neg\neg P(x) \wedge \neg\forall x P(x))$ |

2. Верна ли дизъюнктивная теорема Харропа для интуиционистской логики предикатов с постоянными областями (FO-Int + CD)?

3. Верно ли для FO-Int + CD дизъюнктивное свойство?

4. Выводима ли в FO-Int + CD «кабацкая формула» $\exists x (D(x) \rightarrow \forall y D(y))$?

5. Пусть ψ — негативная формула. Докажите, что FO-Int $\vdash \psi \leftrightarrow \neg\neg\psi$.

6. Постройте контрмодель для формулы $\neg\neg\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$. Существует ли такая конечная контрмодель?

7. Доказуем ли в FO-Int *принцип Маркова*:

$$(\forall x (P(x) \vee \neg P(x)) \wedge \neg\forall y \neg P(y)) \rightarrow \exists z P(z) ?$$

8. *Правило Маркова*. Пусть в FO-Int, для некоторой формулы φ с одной свободной переменной x , доказуемы $\forall x (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ и $\neg\neg\exists y \varphi(y)$. Обязательно ли будет доказуемо $\exists z \varphi(z)$?

9. Доказуемо ли в интуиционистской арифметике утверждение об иррациональности $\sqrt{2}$, т.е. формула $\neg\exists m, n (m^2 = 2n^2)$?

10. Докажите, что HA не эквивалентна PA.

11. Докажите, что принцип наименьшего числа,

$$(\exists x \varphi(x)) \rightarrow \exists x_0 (\varphi(x_0) \wedge \forall y < x_0 \neg\varphi(y)),$$

влечёт закон исключённого третьего для произвольных (замкнутых) формул θ . Таким образом, арифметика над FO-Int с принципом наименьшего числа эквивалентна PA, а не HA.

12. Докажите теоремы Харропа для теорий с разрешимым равенством и функциональными символами.