Спецкурс «Математическая логика», часть 2

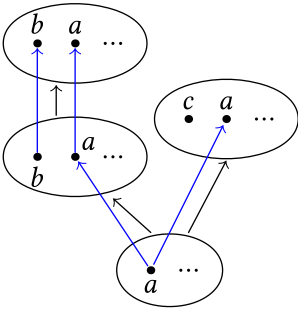
Лекция 10 (13.04.2020)

Интуиционистская логика первого порядка. Теоремы Харропа

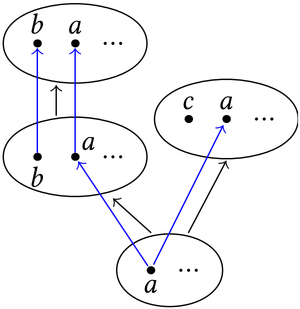
С. Л. Кузнецов

МГУ имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
весенний семестр 2019–2020 учебного года

Модели Крипке для FO-Int

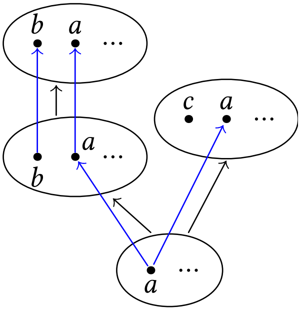


Модели Крипке для FO-Int



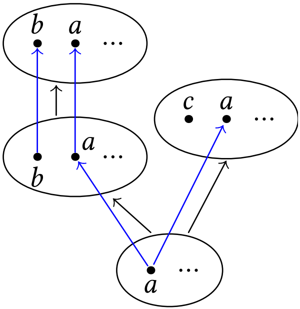
- Каждый «мир» модели Крипке — это интерпретация сигнатуры Ω (первопорядковая модель).

Модели Крипке для FO-Int



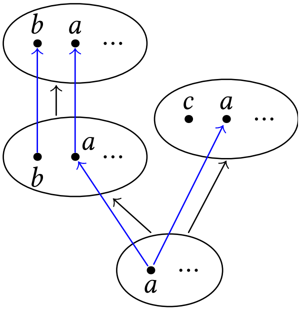
- Каждый «мир» модели Крипке — это интерпретация сигнатуры Ω (первопорядковая модель).
- Условия монотонности (вверх):
  - объекты не исчезают;
  - сохраняется истинность атомарных формул.

Модели Крипке для FO-Int



- Каждый «мир» модели Крипке — это интерпретация сигнатуры Ω (первопорядковая модель).
- Условия монотонности (вверх):
  - объекты не исчезают;
  - сохраняется истинность атомарных формул.
- Для сохранения монотонности истинность $\to$ и $\forall$ определяется нелокально:
  - $w \Vdash \varphi \to \psi \iff \forall u \in R(w)\,(u \nVdash \varphi$ или $u \Vdash \psi)$;
  - $w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \forall u \in R(w)\; u \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_u$ (включая те, которых не было в D_w).

Модели Крипке для FO-Int



- Каждый «мир» модели Крипке — это интерпретация сигнатуры Ω (первопорядковая модель).
- Условия монотонности (вверх):
  - объекты не исчезают;
  - сохраняется истинность атомарных формул.

- Для сохранения монотонности истинность $\longrightarrow$ и $\forall$ определяется нелокально:
  - $w \Vdash \varphi \longrightarrow \psi \iff \forall u \in R(w)\,(u \nVdash \varphi$ или $u \Vdash \psi)$;
  - $w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \forall u \in R(w)\; u \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_u$ (включая те, которых не было в D_w).
- Истинность остальных логических операций определяется «классически» (локально в каждом мире).

Модели Крипке для FO-Int

- Теорема о корректности и полноте: формула истинна во всех мирах всех моделей Крипке тогда и только тогда, когда она доказуема в исчислении FO-Int.

Модели Крипке для FO-Int

- Теорема о корректности и полноте: формула истинна во всех мирах всех моделей Крипке тогда и только тогда, когда она доказуема в исчислении FO-Int.
- Истинность формул с параметрами определяется универсальным образом: $w \Vdash \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $w \Vdash \varphi(c_1, \dots, c_n)$ для любых $c_1, \dots, c_n \in D_w$.

Модели Крипке для FO-Int

- Теорема о корректности и полноте: формула истинна во всех мирах всех моделей Крипке тогда и только тогда, когда она доказуема в исчислении FO-Int.
- Истинность формул с параметрами определяется универсальным образом: $w \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $w \Vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n)$ для любых $c_1, \ldots, c_n \in D_w$.
- Логику FO-Int можно *определять семантически:* формула φ принадлежит FO-Int, если она истинна во всех мирах всех моделей Крипке.

Модели Крипке для FO-Int

- Теорема о корректности и полноте: формула истинна во всех мирах всех моделей Крипке тогда и только тогда, когда она доказуема в исчислении FO-Int.
- Истинность формул с параметрами определяется универсальным образом: $w \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $w \Vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n)$ для любых $c_1, \ldots, c_n \in D_w$.
- Логику FO-Int можно *определять семантически:* формула φ принадлежит FO-Int, если она истинна во всех мирах всех моделей Крипке.
- Достаточно рассматривать *конические* модели, где $W = R(w)$ для «корневого» мира w, т.к. интерпретация формул в мире w зависит только от миров из $R(w)$.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- В моделях Крипке константы интерпретируются функциями $\alpha_u : \mathrm{Cnst}_\Omega \longrightarrow D_u$.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- В моделях Крипке константы интерпретируются функциями $\alpha_u : \mathrm{Cnst}_\Omega \longrightarrow D_u$.
- Удобно считать, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \subseteq D_u$ для каждого $u \in W$.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- В моделях Крипке константы интерпретируются функциями $\alpha_u : \mathrm{Cnst}_\Omega \longrightarrow D_u$.
- Удобно считать, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \subseteq D_u$ для каждого $u \in W$.
- Для этого нужно, чтобы интерпретации констант были различны: $\alpha_u(c) \neq \alpha_u(d)$ для $c \neq d$.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- В моделях Крипке константы интерпретируются функциями $\alpha_u : \mathrm{Cnst}_\Omega \longrightarrow D_u$.
- Удобно считать, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \subseteq D_u$ для каждого $u \in W$.
- Для этого нужно, чтобы интерпретации констант были различны: $\alpha_u(c) \neq \alpha_u(d)$ для $c \neq d$.
- Этого можно добиться, поскольку у нас нет отношения равенства, «расклеиванием» (дублированием) элементов модели.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- В моделях Крипке константы интерпретируются функциями $\alpha_u : \mathrm{Cnst}_\Omega \longrightarrow D_u$.
- Удобно считать, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \subseteq D_u$ для каждого $u \in W$.
- Для этого нужно, чтобы интерпретации констант были различны: $\alpha_u(c) \neq \alpha_u(d)$ для $c \neq d$.
- Этого можно добиться, поскольку у нас нет отношения равенства, «расклеиванием» (дублированием) элементов модели.
- Пусть w — корневой мир. Пусть $C = \alpha_w(\mathrm{Cnst}_\Omega) \subseteq D_w$ — интерпретации констант, $D'_w = D_w - C$ — остальные элементы.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- В моделях Крипке константы интерпретируются функциями $\alpha_u : \mathrm{Cnst}_\Omega \longrightarrow D_u$.
- Удобно считать, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \subseteq D_u$ для каждого $u \in W$.
- Для этого нужно, чтобы интерпретации констант были различны: $\alpha_u(c) \neq \alpha_u(d)$ для $c \neq d$.
- Этого можно добиться, поскольку у нас нет отношения равенства, «расклеиванием» (дублированием) элементов модели.
- Пусть w — корневой мир. Пусть $C = \alpha_w(\mathrm{Cnst}_\Omega) \subseteq D_w$ — интерпретации констант, $D'_w = D_w - C$ — остальные элементы.
- Тогда по монотонности для любого $u \in R(w)$ также $D_u = C \cup D'_u$ (новые элементы не могут быть интерпретациями констант).

Вложение Cnst_Ω в D_w

- Заменим: вместо D_u возьмём $\widetilde{D}_u = \mathrm{Cnst}_\Omega \cup D'_u$.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- Заменим: вместо D_u возьмём $\widetilde{D}_u = \mathrm{Cnst}_\Omega \cup D'_u$.
- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \cap D'_u = \varnothing$, иначе переобозначим.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- Заменим: вместо D_u возьмём $\widetilde{D}_u = \mathrm{Cnst}_\Omega \cup D'_u$.
- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \cap D'_u = \varnothing$, иначе переобозначим.
- При этом, если $\alpha_w(c_1) = \ldots = \alpha_w(c_k) = a$, то теперь вместо одного элемента a у нас k элементов $c_1, \ldots, c_k$.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- Заменим: вместо D_u возьмём $\widetilde{D}_u = \mathrm{Cnst}_\Omega \cup D'_u$.
- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \cap D'_u = \varnothing$, иначе переобозначим.
- При этом, если $\alpha_w(c_1) = \ldots = \alpha_w(c_k) = a$, то теперь вместо одного элемента a у нас k элементов $c_1, \ldots, c_k$.
- Определим интерпретацию атомарных формул для них одинаковым образом (как если бы вместо каждого из c_i был старый элемент a).

Вложение Cnst_Ω в D_w

- Заменим: вместо D_u возьмём $\widetilde{D}_u = \mathrm{Cnst}_\Omega \cup D'_u$.
- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \cap D'_u = \varnothing$, иначе переобозначим.
- При этом, если $\alpha_w(c_1) = \ldots = \alpha_w(c_k) = a$, то теперь вместо одного элемента a у нас k элементов $c_1, \ldots, c_k$.
- Определим интерпретацию атомарных формул для них одинаковым образом (как если бы вместо каждого из c_i был старый элемент a).
- При этом легко проверить по индукции, что истинность замкнутых формул от этого не поменяется.

Вложение Cnst_Ω в D_w

- Заменим: вместо D_u возьмём $\widetilde{D}_u = \mathrm{Cnst}_\Omega \cup D'_u$.
- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \cap D'_u = \varnothing$, иначе переобозначим.
- При этом, если $\alpha_w(c_1) = \ldots = \alpha_w(c_k) = a$, то теперь вместо одного элемента a у нас k элементов $c_1, \ldots, c_k$.
- Определим интерпретацию атомарных формул для них одинаковым образом (как если бы вместо каждого из c_i был старый элемент a).
- При этом легко проверить по индукции, что истинность замкнутых формул от этого не поменяется.
- С равенством так не получится: поскольку $a = a$, то должно быть $c_1 = c_2$, а это даст ненормальную модель.

Вложение Cnst_Ω в D_w

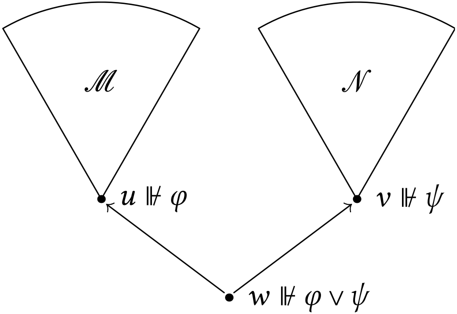
- Заменим: вместо D_u возьмём $\widetilde{D}_u = \mathrm{Cnst}_\Omega \cup D'_u$.
- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \cap D'_u = \varnothing$, иначе переобозначим.
- При этом, если $\alpha_w(c_1) = \ldots = \alpha_w(c_k) = a$, то теперь вместо одного элемента a у нас k элементов $c_1, \ldots, c_k$.
- Определим интерпретацию атомарных формул для них одинаковым образом (как если бы вместо каждого из c_i был старый элемент a).
- При этом легко проверить по индукции, что истинность замкнутых формул от этого не поменяется.
- С равенством так не получится: поскольку $a = a$, то должно быть $c_1 = c_2$, а это даст ненормальную модель.
- Наконец, будем всегда считать, что множество констант непусто (иначе добавим новую константу).

Дизъюнктивное свойство

- Если FO-Int $\vdash \varphi \vee \psi$, то FO-Int $\vdash \varphi$ или FO-Int $\vdash \psi$.

Дизъюнктивное свойство

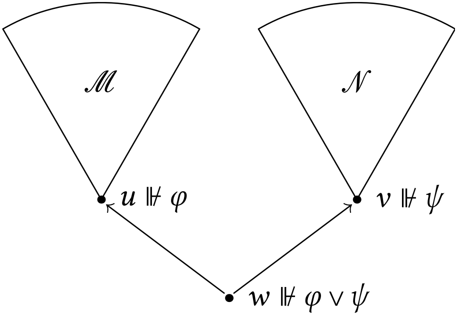
- Если FO-Int $\vdash \varphi \vee \psi$, то FO-Int $\vdash \varphi$ или FO-Int $\vdash \psi$.
- От противного: если $\nvdash \varphi$ и $\nvdash \psi$, то существуют конические контрмодели $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$. Склеим контрмодель для $\varphi \vee \psi$:



$D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega \qquad w \nVdash P(\vec{c})$

Дизъюнктивное свойство

- Если FO-Int $\vdash \varphi \vee \psi$, то FO-Int $\vdash \varphi$ или FO-Int $\vdash \psi$.
- От противного: если $\nvdash \varphi$ и $\nvdash \psi$, то существуют конические контрмодели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Склеим контрмодель для $\varphi \vee \psi$:

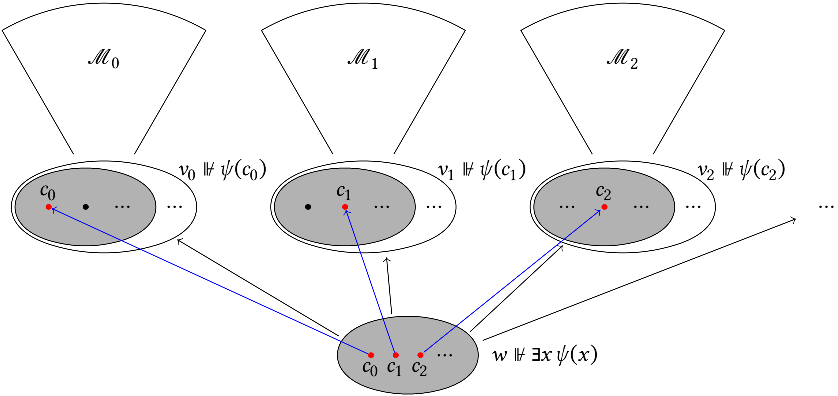


$D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega \qquad w \nVdash P(\vec{c})$

- Дизъюнктивное свойство верно и для формул со свободными переменными: FO-Int $\vdash \theta(\vec{x})$ тогда и только тогда, когда FO-Int $\vdash \theta(\vec{c})$ для свежих констант $\vec{c}$.

Экзистенциальное свойство

Пусть $\nvdash \psi(c_1)$, $\nvdash \psi(c_2)$, ... Построим контрмодель для $\exists x\, \psi(x)$.



Выводимость из теорий

- Пусть T — *теория* над FO-Int, т.е. множество (возможно, бесконечное) *замкнутых* формул.

Выводимость из теорий

- Пусть T — *теория* над FO-Int, т.е. множество (возможно, бесконечное) *замкнутых* формул.
- Вывод из теории: $T \vdash \varphi$, если существует последовательность формул, каждая из которых либо аксиома FO-Int, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens или усиления.

Выводимость из теорий

- Пусть T — *теория* над FO-Int, т.е. множество (возможно, бесконечное) *замкнутых* формул.
- Вывод из теории: $T \vdash \varphi$, если существует последовательность формул, каждая из которых либо аксиома FO-Int, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens или усиления.
- Замкнутость важна: иначе сможем вывести $\psi(x) \vdash \forall y\, \psi(y)$.

Выводимость из теорий

- Пусть T — *теория* над FO-Int, т.е. множество (возможно, бесконечное) *замкнутых* формул.
- Вывод из теории: $T \vdash \varphi$, если существует последовательность формул, каждая из которых либо аксиома FO-Int, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens или усиления.
- Замкнутость важна: иначе сможем вывести $\psi(x) \vdash \forall y\, \psi(y)$.
- **Теорема о сильной полноте:** $T \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда для любой конической модели $\mathcal{M}$ с корнем w, если $w \Vdash \xi$ для любой $\xi \in T$, то $w \Vdash \varphi$.

Выводимость из теорий

- Пусть T — *теория* над FO-Int, т.е. множество (возможно, бесконечное) *замкнутых* формул.
- Вывод из теории: $T \vdash \varphi$, если существует последовательность формул, каждая из которых либо аксиома FO-Int, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens или усиления.
- Замкнутость важна: иначе сможем вывести $\psi(x) \vdash \forall y\, \psi(y)$.
- **Теорема о сильной полноте:** $T \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда для любой конической модели $\mathcal{M}$ с корнем w, если $w \Vdash \xi$ для любой $\xi \in T$, то $w \Vdash \varphi$.
- Доказательство полноты:

Выводимость из теорий

- Пусть T — *теория* над FO-Int, т.е. множество (возможно, бесконечное) *замкнутых* формул.
- Вывод из теории: $T \vdash \varphi$, если существует последовательность формул, каждая из которых либо аксиома FO-Int, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens или усиления.
- Замкнутость важна: иначе сможем вывести $\psi(x) \vdash \forall y\, \psi(y)$.
- **Теорема о сильной полноте:** $T \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда для любой конической модели $\mathscr{M}$ с корнем w, если $w \Vdash \xi$ для любой $\xi \in T$, то $w \Vdash \varphi$.
- Доказательство полноты:
  - если $T \nvdash \varphi$, то би-теория $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, T, \{\varphi\} \rangle$ непротиворечива.

Выводимость из теорий

- Пусть T — *теория* над FO-Int, т.е. множество (возможно, бесконечное) *замкнутых* формул.
- Вывод из теории: $T \vdash \varphi$, если существует последовательность формул, каждая из которых либо аксиома FO-Int, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens или усиления.
- Замкнутость важна: иначе сможем вывести $\psi(x) \vdash \forall y\, \psi(y)$.
- **Теорема о сильной полноте:** $T \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда для любой конической модели $\mathscr{M}$ с корнем w, если $w \Vdash \xi$ для любой $\xi \in T$, то $w \Vdash \varphi$.
- Доказательство полноты:
  - если $T \nvdash \varphi$, то би-теория $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, T, \{\varphi\} \rangle$ непротиворечива.
  - Пополним её до $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ по лемме о насыщении.

Выводимость из теорий

- Пусть T — *теория* над FO-Int, т.е. множество (возможно, бесконечное) *замкнутых* формул.
- Вывод из теории: $T \vdash \varphi$, если существует последовательность формул, каждая из которых либо аксиома FO-Int, либо принадлежит T, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens или усиления.
- Замкнутость важна: иначе сможем вывести $\psi(x) \vdash \forall y\, \psi(y)$.
- **Теорема о сильной полноте:** $T \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда для любой конической модели $\mathcal{M}$ с корнем w, если $w \Vdash \xi$ для любой $\xi \in T$, то $w \Vdash \varphi$.
- Доказательство полноты:
  - если $T \nvdash \varphi$, то би-теория $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, T, \{\varphi\} \rangle$ непротиворечива.
  - Пополним её до $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ по лемме о насыщении.
  - $\mathcal{M}_C, \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi$ и $\mathcal{M}_C, \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \psi$ для любой $\psi \in T$ (т.к. $T \subseteq \Gamma$, $\varphi \in \Delta$).

Теоремы Харропа

- Выполняются ли для выводимости в FO-Int из теорий дизъюнктивное и экзистенциальное свойства?

Теоремы Харропа

- Выполняются ли для выводимости в FO-Int из теорий дизъюнктивное и экзистенциальное свойства?
- Очевидно, **нет:**
  - $P \vee Q \vdash P \vee Q$, но $P \vee Q \nvdash P$ и $P \vee Q \nvdash Q$;
  - $\exists x\, P(x) \vdash \exists x\, P(x)$, но $\exists x\, P(x) \nvdash P(c)$ (c — константа) и $\exists x\, P(x) \nvdash P(z)$.

Теоремы Харропа

- Выполняются ли для выводимости в FO-Int из теорий дизъюнктивное и экзистенциальное свойства?
- Очевидно, **нет:**
  - $P \vee Q \vdash P \vee Q$, но $P \vee Q \nvdash P$ и $P \vee Q \nvdash Q$;
  - $\exists x\, P(x) \vdash \exists x\, P(x)$, но $\exists x\, P(x) \nvdash P(c)$ (c — константа) и $\exists x\, P(x) \nvdash P(z)$.
- В частности, классическую логику предикатов (FO-CL) можно рассматривать как теорию над FO-Int: $T_{\mathrm{CL}} = \{(\varphi \vee \neg\neg\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{CFm}_\Omega\}$.

Теоремы Харропа

- Выполняются ли для выводимости в FO-Int из теорий дизъюнктивное и экзистенциальное свойства?
- Очевидно, **нет:**
  - $P \vee Q \vdash P \vee Q$, но $P \vee Q \nvdash P$ и $P \vee Q \nvdash Q$;
  - $\exists x\, P(x) \vdash \exists x\, P(x)$, но $\exists x\, P(x) \nvdash P(c)$ (c — константа) и $\exists x\, P(x) \nvdash P(z)$.
- В частности, классическую логику предикатов (FO-CL) можно рассматривать как теорию над FO-Int: $T_{\mathrm{CL}} = \{(\varphi \vee \neg\neg\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{CFm}_\Omega\}$.
- Для FO-CL дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются.

Теоремы Харропа

- Выполняются ли для выводимости в FO-Int из теорий дизъюнктивное и экзистенциальное свойства?
- Очевидно, **нет:**
  - $P \vee Q \vdash P \vee Q$, но $P \vee Q \nvdash P$ и $P \vee Q \nvdash Q$;
  - $\exists x\, P(x) \vdash \exists x\, P(x)$, но $\exists x\, P(x) \nvdash P(c)$ (c — константа) и $\exists x\, P(x) \nvdash P(z)$.
- В частности, классическую логику предикатов (FO-CL) можно рассматривать как теорию над FO-Int: $T_{\mathrm{CL}} = \{(\varphi \vee \neg\neg\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{CFm}_{\Omega}\}$.
- Для FO-CL дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются.
- Тем не менее, эти свойства восстанавливаются, если потребовать, чтобы все формулы из T не содержали *сильно позитивных вхождений* $\vee$ или $\exists$ **(теоремы Харропа).**

Теоремы Харропа

- Выполняются ли для выводимости в FO-Int из теорий дизъюнктивное и экзистенциальное свойства?
- Очевидно, **нет:**
  - $P \vee Q \vdash P \vee Q$, но $P \vee Q \nvdash P$ и $P \vee Q \nvdash Q$;
  - $\exists x\, P(x) \vdash \exists x\, P(x)$, но $\exists x\, P(x) \nvdash P(c)$ (c — константа) и $\exists x\, P(x) \nvdash P(z)$.
- В частности, классическую логику предикатов (FO-CL) можно рассматривать как теорию над FO-Int: $T_{\mathrm{CL}} = \{(\varphi \vee \neg\neg\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{CFm}_\Omega\}$.
- Для FO-CL дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются.
- Тем не менее, эти свойства восстанавливаются, если потребовать, чтобы все формулы из T не содержали *сильно позитивных вхождений* $\vee$ или $\exists$ **(теоремы Харропа).**
- Сильно позитивное вхождение — вхождение, не попадающее в посылку импликации.

Теоремы Харропа

Харроповы формулы:

- всякая атомарная формула харропова;
- $\perp$ харропова;
- если α и β харроповы, то $(\alpha \wedge \beta)$ харропова;
- если α харропова, то $(\forall x\, \alpha)$ харропова;
- если α харропова, ξ **произвольная,** то $(\xi \to \alpha)$ харропова.

Теоремы Харропа

Харроповы формулы:

- всякая атомарная формула харропова;
- $\perp$ харропова;
- если α и β харроповы, то $(\alpha \wedge \beta)$ харропова;
- если α харропова, то $(\forall x\, \alpha)$ харропова;
- если α харропова, ξ **произвольная,** то $(\xi \longrightarrow \alpha)$ харропова.

Теорема

Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \varphi \vee \psi$, то $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

Теоремы Харропа

Харроповы формулы:

- всякая атомарная формула харропова;
- $\perp$ харропова;
- если α и β харроповы, то $(\alpha \wedge \beta)$ харропова;
- если α харропова, то $(\forall x\, \alpha)$ харропова;
- если α харропова, ξ **произвольная,** то $(\xi \to \alpha)$ харропова.

Теорема

Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \varphi \vee \psi$, то $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

Теорема

Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \exists x\, \psi(x)$, то $T \vdash \psi(t)$, где t — константа или свежая переменная.

Дизъюнктивная теорема Харропа

Теорема

Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \varphi \vee \psi$, то $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

Дизъюнктивная теорема Харропа

Теорема

Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \varphi \vee \psi$, то $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

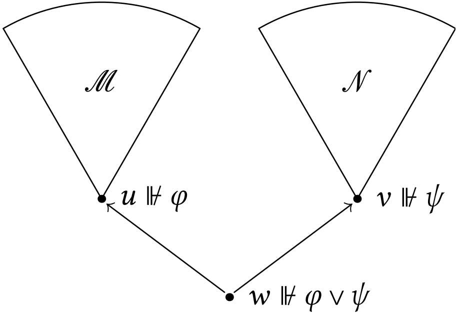
- Пусть $T \nvdash \varphi$ и $T \nvdash \psi$. Тогда по теореме о сильной полноте найдутся конические контрмодели $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$.

Дизъюнктивная теорема Харропа

Теорема

Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \varphi \vee \psi$, то $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

- Пусть $T \nvdash \varphi$ и $T \nvdash \psi$. Тогда по теореме о сильной полноте найдутся конические контрмодели $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$.
- Склеим контрмодель для $\varphi \vee \psi$:

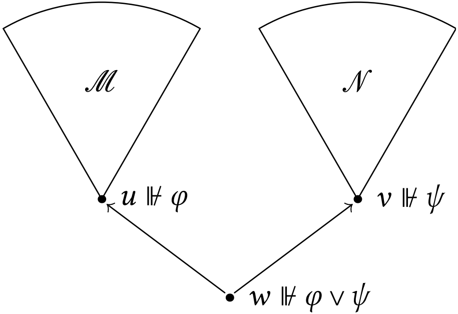


Дизъюнктивная теорема Харропа

Теорема

Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \varphi \vee \psi$, то $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

- Пусть $T \nvdash \varphi$ и $T \nvdash \psi$. Тогда по теореме о сильной полноте найдутся конические контрмодели $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$.
- Склеим контрмодель для $\varphi \vee \psi$:



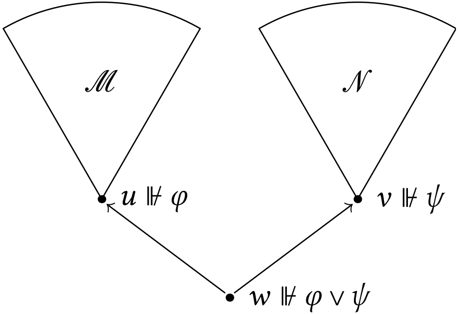
- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$.

Дизъюнктивная теорема Харропа

Теорема

Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \varphi \vee \psi$, то $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

- Пусть $T \nvdash \varphi$ и $T \nvdash \psi$. Тогда по теореме о сильной полноте найдутся конические контрмодели $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$.
- Склеим контрмодель для $\varphi \vee \psi$:



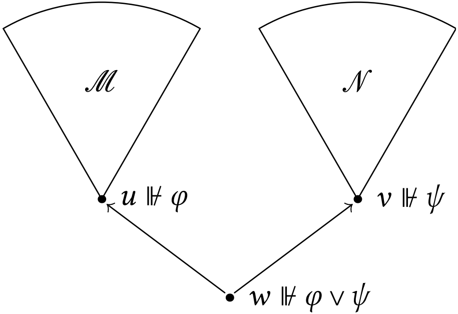
- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$.
- Атомарные формулы интерпретируем аккуратнее: $w \Vdash P(\vec{c}) \iff (u \Vdash P(\vec{c})$ и $v \Vdash P(\vec{c}))$.

Дизъюнктивная теорема Харропа

Теорема

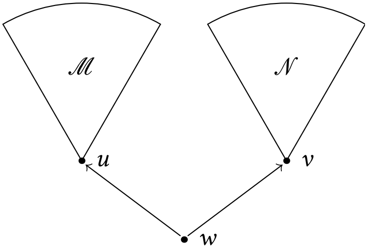
Если теория T состоит из замкнутых харроповых формул и $T \vdash \varphi \vee \psi$, то $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \psi$.

- Пусть $T \nvdash \varphi$ и $T \nvdash \psi$. Тогда по теореме о сильной полноте найдутся конические контрмодели $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$.
- Склеим контрмодель для $\varphi \vee \psi$:



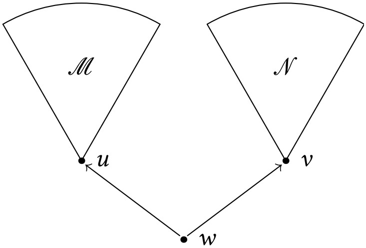
- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$.
- Атомарные формулы интерпретируем аккуратнее: $w \Vdash P(\vec{c}) \iff \big(u \Vdash P(\vec{c})$ и $v \Vdash P(\vec{c})\big)$.
- Это нужно для сохранения T.

Дизъюнктивная теорема Харропа



- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$
- $w \Vdash P(\vec{c}) \iff$
  $\big(u \Vdash P(\vec{c})$ и $v \Vdash P(\vec{c})\big)$.

Дизъюнктивная теорема Харропа

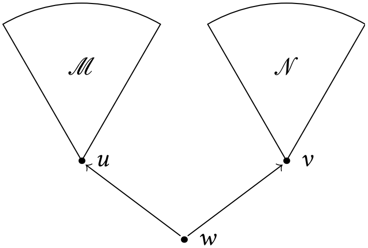


- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$
- $w \Vdash P(\vec{c}) \iff$ $\big(u \Vdash P(\vec{c})$ и $v \Vdash P(\vec{c})\big)$.

Лемма

Если α — замкнутая харропова формула, $u \Vdash \alpha$ и $v \Vdash \alpha$, то $w \Vdash \alpha$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



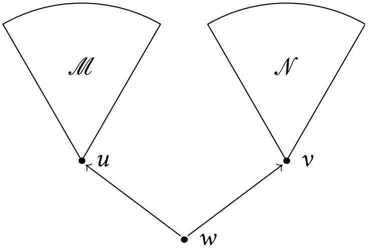
- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$
- $w \Vdash P(\vec{c}) \iff$
  $\big(u \Vdash P(\vec{c})$ и $v \Vdash P(\vec{c})\big)$.

Лемма

Если α — замкнутая харропова формула, $u \Vdash \alpha$ и $v \Vdash \alpha$, то $w \Vdash \alpha$.

- Для атомарных — по определению.

Дизъюнктивная теорема Харропа



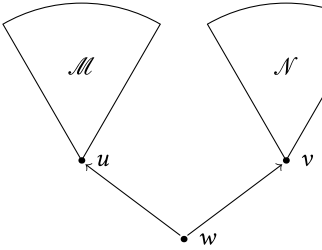
- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$
- $w \Vdash P(\vec{c}) \iff$
  $\big(u \Vdash P(\vec{c})$ и $v \Vdash P(\vec{c})\big)$.

Лемма

Если α — замкнутая харропова формула, $u \Vdash \alpha$ и $v \Vdash \alpha$, то $w \Vdash \alpha$.

- Для атомарных — по определению.
- $u, v \Vdash \alpha \wedge \beta \Longrightarrow u, v \Vdash \alpha, \beta \Longrightarrow w \Vdash \alpha, \beta \Longrightarrow w \Vdash \alpha \wedge \beta$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



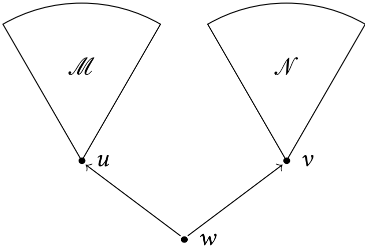
- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$
- $w \Vdash P(\vec{c}) \iff$ $\big(u \Vdash P(\vec{c})$ и $v \Vdash P(\vec{c})\big)$.

Лемма

Если α — замкнутая харропова формула, $u \Vdash \alpha$ и $v \Vdash \alpha$, то $w \Vdash \alpha$.

- Для атомарных — по определению.
- $u, v \Vdash \alpha \wedge \beta \Longrightarrow u, v \Vdash \alpha, \beta \Longrightarrow w \Vdash \alpha, \beta \Longrightarrow w \Vdash \alpha \wedge \beta$.
- $u, v \nVdash \bot$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



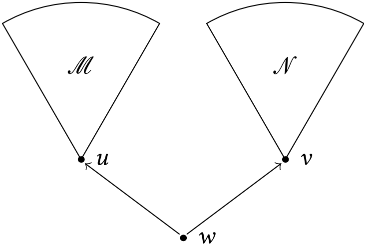
- $D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$
- $w \Vdash P(\vec{c}) \iff$ $\big(u \Vdash P(\vec{c})$ и $v \Vdash P(\vec{c})\big)$.

Лемма

Если α — замкнутая харропова формула, $u \Vdash \alpha$ и $v \Vdash \alpha$, то $w \Vdash \alpha$.

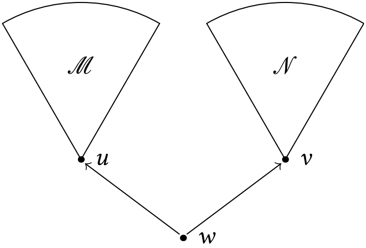
- Для атомарных — по определению.
- $u, v \Vdash \alpha \wedge \beta \Longrightarrow u, v \Vdash \alpha, \beta \Longrightarrow w \Vdash \alpha, \beta \Longrightarrow w \Vdash \alpha \wedge \beta$.
- $u, v \nVdash \bot$.
- Если $u, v \Vdash \forall x\, \alpha(x)$, то, в частности, $u, v \Vdash \alpha(c)$ для любой $c \in D_w$ (т.к. $D_w \subseteq D_u$ и $D_w \subseteq D_v$). Отсюда $w \Vdash \forall x\, \alpha(x)$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



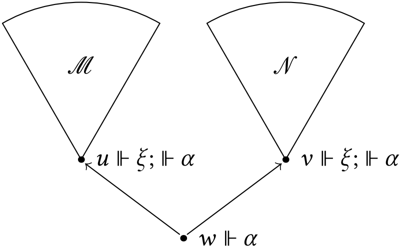
- Интересный случай: $\xi \longrightarrow \alpha$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



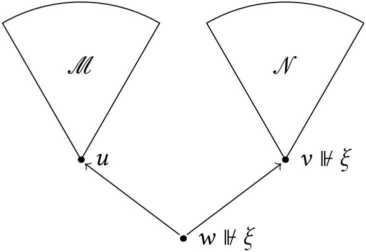
- Интересный случай: $\xi \longrightarrow \alpha$.
- Достаточно проверить в w ($w \nVdash \xi$ или $w \Vdash \alpha$); истинность внутри $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ гарантирована: $u, v \Vdash (\xi \longrightarrow \alpha)$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



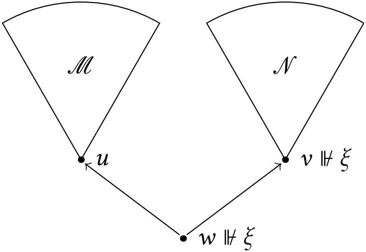
- Интересный случай: $\xi \longrightarrow \alpha$.
- Достаточно проверить в w ($w \nVdash \xi$ или $w \Vdash \alpha$); истинность внутри $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ гарантирована: $u, v \Vdash (\xi \longrightarrow \alpha)$.
- Если $u \Vdash \xi$ и $v \Vdash \xi$, то $u, v \Vdash \alpha$, значит $w \Vdash \alpha$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



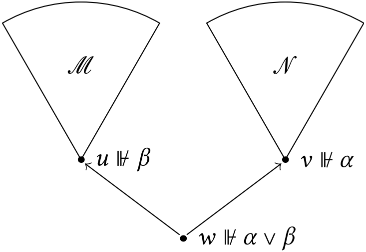
- Интересный случай: $\xi \longrightarrow \alpha$.
- Достаточно проверить в w ($w \nVdash \xi$ или $w \Vdash \alpha$); истинность внутри $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ гарантирована: $u, v \Vdash (\xi \longrightarrow \alpha)$.
- Если $u \Vdash \xi$ и $v \Vdash \xi$, то $u, v \Vdash \alpha$, значит $w \Vdash \alpha$.
- Если $u \nVdash \xi$ или $v \nVdash \xi$, то $w \nVdash \xi$ по монотонности.

Дизъюнктивная теорема Харропа



- Интересный случай: $\xi \longrightarrow \alpha$.
- Достаточно проверить в w ($w \nVdash \xi$ или $w \Vdash \alpha$); истинность внутри $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ гарантирована: $u, v \Vdash (\xi \longrightarrow \alpha)$.
- Если $u \Vdash \xi$ и $v \Vdash \xi$, то $u, v \Vdash \alpha$, значит $w \Vdash \alpha$.
- Если $u \nVdash \xi$ или $v \nVdash \xi$, то $w \nVdash \xi$ по монотонности.
- Вид формулы ξ здесь не важен.

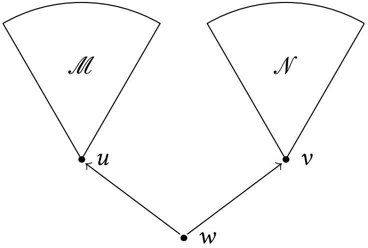
Дизъюнктивная теорема Харропа



- Интересный случай: $\xi \longrightarrow \alpha$.
- Достаточно проверить в w ($w \nVdash \xi$ или $w \Vdash \alpha$); истинность внутри $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ гарантирована: $u, v \Vdash (\xi \longrightarrow \alpha)$.
- Если $u \Vdash \xi$ и $v \Vdash \xi$, то $u, v \Vdash \alpha$, значит $w \Vdash \alpha$.
- Если $u \nVdash \xi$ или $v \nVdash \xi$, то $w \nVdash \xi$ по монотонности.
- Вид формулы ξ здесь не важен.

- С $\alpha \vee \beta$ не получится: может быть $u \Vdash \alpha$, $v \Vdash \beta$.

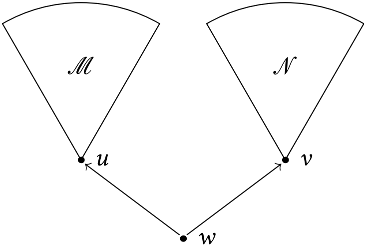
Дизъюнктивная теорема Харропа



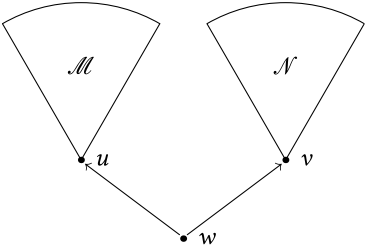
- Интересный случай: $\xi \longrightarrow \alpha$.
- Достаточно проверить в w ($w \nVdash \xi$ или $w \Vdash \alpha$); истинность внутри $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ гарантирована: $u, v \Vdash (\xi \longrightarrow \alpha)$.
- Если $u \Vdash \xi$ и $v \Vdash \xi$, то $u, v \Vdash \alpha$, значит $w \Vdash \alpha$.
- Если $u \nVdash \xi$ или $v \nVdash \xi$, то $w \nVdash \xi$ по монотонности.
- Вид формулы ξ здесь не важен.

- С $\alpha \vee \beta$ не получится: может быть $u \Vdash \alpha$, $v \Vdash \beta$.
- То же для $\exists x\, \alpha(x)$: может быть $u \Vdash \alpha(a)$, $v \Vdash \alpha(b)$.

Дизъюнктивная теорема Харропа

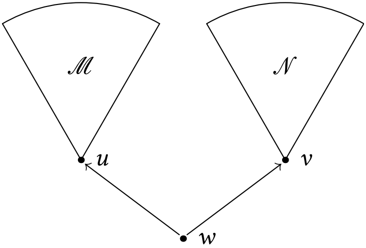


Дизъюнктивная теорема Харропа



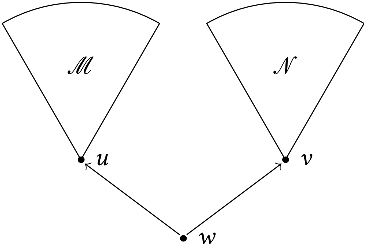
- $u, v \Vdash T$

Дизъюнктивная теорема Харропа



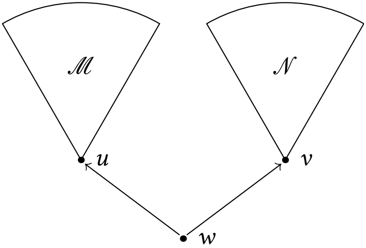
- $u, v \Vdash T$
- $w \Vdash T$, поскольку все формулы из T харроповы.

Дизъюнктивная теорема Харропа



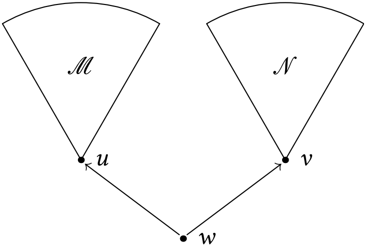
- $u, v \Vdash T$
- $w \Vdash T$, поскольку все формулы из T харроповы.
- $u, v \nVdash \varphi \vee \psi$, поскольку $u \nVdash \varphi$ и $v \nVdash \psi$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



- $u, v \Vdash T$
- $w \Vdash T$, поскольку все формулы из T харроповы.
- $u, v \nVdash \varphi \vee \psi$, поскольку $u \nVdash \varphi$ и $v \nVdash \psi$.
- $T \nvdash \varphi \vee \psi$.

Дизъюнктивная теорема Харропа



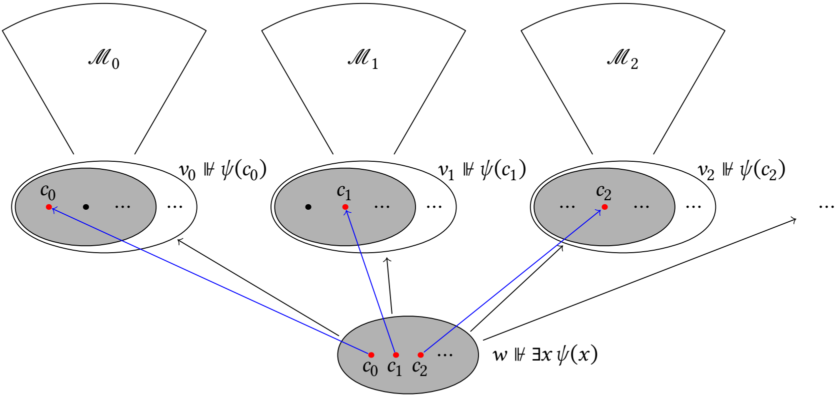
- $u, v \Vdash T$
- $w \Vdash T$, поскольку все формулы из T харроповы.
- $u, v \nVdash \varphi \vee \psi$, поскольку $u \nVdash \varphi$ и $v \nVdash \psi$.
- $T \nvdash \varphi \vee \psi$.
- Для незамкнутых формул φ и ψ — тот же приём замены переменных свежими константами.

Экзистенциальная теорема Харропа

Пусть $T \nvdash \psi(c_1)$, $T \nvdash \psi(c_2)$, ... Построим контрмодель для $\exists x\, \psi(x)$.

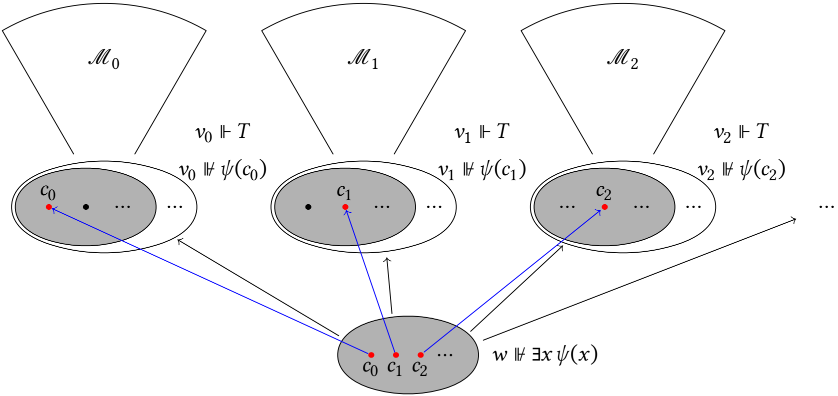
Экзистенциальная теорема Харропа

Пусть $T \nvdash \psi(c_1)$, $T \nvdash \psi(c_2)$, ... Построим контрмодель для $\exists x\, \psi(x)$.



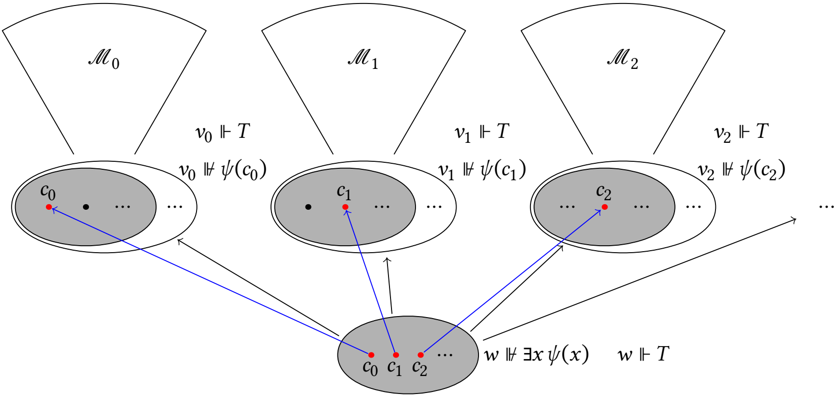
Экзистенциальная теорема Харропа

Пусть $T \nvdash \psi(c_1)$, $T \nvdash \psi(c_2)$, …. Построим контрмодель для $\exists x\, \psi(x)$.



Экзистенциальная теорема Харропа

Пусть $T \nvdash \psi(c_1)$, $T \nvdash \psi(c_2)$, …. Построим контрмодель для $\exists x\, \psi(x)$.



Теорема Эрбрана

- В классической логике предикатов (FO-CL) дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются:

Теорема Эрбрана

- В классической логике предикатов (FO-CL) дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются:
  - FO-CL $\vdash P \vee \neg P$, но FO-CL $\nvdash P$ и FO-CL $\nvdash \neg P$.

Теорема Эрбрана

- В классической логике предикатов (FO-CL) дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются:
  - FO-CL $\vdash P \vee \neg P$, но FO-CL $\nvdash P$ и FO-CL $\nvdash \neg P$.
  - FO-CL $\vdash \exists x \left(P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(x)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(x))\right)$, но FO-CL $\nvdash P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(t)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(t))$ ни для $t = a$, ни для $t = b$, ни для $t = z$.

Теорема Эрбрана

- В классической логике предикатов (FO-CL) дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются:
  - FO-CL $\vdash P \vee \neg P$, но FO-CL $\nvdash P$ и FO-CL $\nvdash \neg P$.
  - FO-CL $\vdash \exists x \left(P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(x)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(x))\right)$, но FO-CL $\nvdash P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(t)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(t))$ ни для $t = a$, ни для $t = b$, ни для $t = z$.
- С дизъюнктивным свойством уже ничего не сделаешь, а вот экзистенциальное всё-таки имеет место в слабой форме.

Теорема Эрбрана

- В классической логике предикатов (FO-CL) дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются:
  - $\text{FO-CL} \vdash P \vee \neg P$, но $\text{FO-CL} \nvdash P$ и $\text{FO-CL} \nvdash \neg P$.
  - $\text{FO-CL} \vdash \exists x \left(P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(x)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(x))\right)$, но $\text{FO-CL} \nvdash P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(t)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(t))$ ни для $t = a$, ни для $t = b$, ни для $t = z$.
- С дизъюнктивным свойством уже ничего не сделаешь, а вот экзистенциальное всё-таки имеет место в слабой форме.

Теорема Эрбрана

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\text{FO-CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$. *Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \ldots, t_n$, *что* $\text{FO-CL} \vdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$.

Теорема Эрбрана

- В классической логике предикатов (FO-CL) дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются:
  - FO-CL $\vdash P \vee \neg P$, но FO-CL $\nvdash P$ и FO-CL $\nvdash \neg P$.
  - FO-CL $\vdash \exists x \left(P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(x)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(x))\right)$, но FO-CL $\nvdash P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(t)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(t))$ ни для $t = a$, ни для $t = b$, ни для $t = z$.
- С дизъюнктивным свойством уже ничего не сделаешь, а вот экзистенциальное всё-таки имеет место в слабой форме.

Теорема Эрбрана

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* FO-CL $\vdash \exists x\, \psi(x)$. *Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \ldots, t_n$, *что* FO-CL $\vdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$.

- В нашем примере $t_1 = a$, $t_2 = b$.

Теорема Эрбрана

- В классической логике предикатов (FO-CL) дизъюнктивное и экзистенциальное свойство не выполняются:
  - FO-CL $\vdash P \vee \neg P$, но FO-CL $\nvdash P$ и FO-CL $\nvdash \neg P$.
  - FO-CL $\vdash \exists x \left(P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(x)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(x))\right)$, но FO-CL $\nvdash P(a) \wedge \neg P(b) \longrightarrow (Q \wedge P(t)) \vee (\neg Q \wedge \neg P(t))$ ни для $t = a$, ни для $t = b$, ни для $t = z$.
- С дизъюнктивным свойством уже ничего не сделаешь, а вот экзистенциальное всё-таки имеет место в слабой форме.

Теорема Эрбрана

Пусть $\psi(x)$ — бескванторная формула с одной свободной переменной x и пусть FO-CL $\vdash \exists x\, \psi(x)$. *Тогда существует такой конечный набор термов $t_1, \ldots, t_n$, что* FO-CL $\vdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$.

- В нашем примере $t_1 = a$, $t_2 = b$.
- В сигнатуре могут быть функциональные символы.

Теорема Эрбрана

Теорема

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\text{FO-CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$. *Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \dots, t_n$, *что* $\text{FO-CL} \vdash \psi(t_1) \vee \dots \vee \psi(t_n)$.

Теорема Эрбрана

Теорема

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$. *Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \dots, t_n$, *что* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \psi(t_1) \vee \dots \vee \psi(t_n)$.

- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \neq \varnothing$. Тогда t_1, ..., t_n можно считать замкнутыми (вместо переменных подставим константы).

Теорема Эрбрана

Теорема

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$*. Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \dots, t_n$*, что* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \psi(t_1) \vee \dots \vee \psi(t_n)$*.*

- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \neq \varnothing$. Тогда $t_1, \dots, t_n$ можно считать замкнутыми (вместо переменных подставим константы).
- Рассуждаем от противного. Пусть $\mathrm{FO\text{-}CL} \nvdash \psi(t_1) \vee \dots \vee \psi(t_n)$ для любых замкнутых термов $t_1, \dots, t_n$.

Теорема Эрбрана

Теорема

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$*. Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \ldots, t_n$*, что* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$*.*

- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \neq \varnothing$. Тогда t_1, ..., t_n можно считать замкнутыми (вместо переменных подставим константы).
- Рассуждаем от противного. Пусть $\mathrm{FO\text{-}CL} \nvdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$ для любых замкнутых термов t_1, ..., t_n.
- Теория $T = \{\neg\, \psi(t) \mid t$ — замкнутый терм$\}$ непротиворечива.

Теорема Эрбрана

Теорема

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$. *Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \ldots, t_n$, *что* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$.

- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \neq \varnothing$. Тогда $t_1, \ldots, t_n$ можно считать замкнутыми (вместо переменных подставим константы).
- Рассуждаем от противного. Пусть $\mathrm{FO\text{-}CL} \nvdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$ для любых замкнутых термов $t_1, \ldots, t_n$.
- Теория $T = \{\neg \psi(t) \mid t \text{ — замкнутый терм}\}$ непротиворечива.
- По теореме Гёделя о полноте существует модель $\mathscr{M} \models T$.

Теорема Эрбрана

Теорема

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$*. Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \ldots, t_n$*, что* $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$*.*

- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \neq \varnothing$. Тогда t_1, …, t_n можно считать замкнутыми (вместо переменных подставим константы).
- Рассуждаем от противного. Пусть $\mathrm{FO\text{-}CL} \nvdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$ для любых замкнутых термов t_1, …, t_n.
- Теория $T = \{\neg\, \psi(t) \mid t \text{ — замкнутый терм}\}$ непротиворечива.
- По теореме Гёделя о полноте существует модель $\mathcal{M} \models T$.
- Уберём из носителя $\mathcal{M}$ все элементы, кроме интерпретаций замкнутых термов (получим модель $\mathcal{M}'$).

Теорема Эрбрана

Теорема

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\text{FO-CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$. *Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \ldots, t_n$, *что* $\text{FO-CL} \vdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$.

- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \neq \varnothing$. Тогда t_1, …, t_n можно считать замкнутыми (вместо переменных подставим константы).
- Рассуждаем от противного. Пусть $\text{FO-CL} \nvdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$ для любых замкнутых термов t_1, …, t_n.
- Теория $T = \{\neg\psi(t) \mid t$ — замкнутый терм$\}$ непротиворечива.
- По теореме Гёделя о полноте существует модель $\mathcal{M} \vDash T$.
- Уберём из носителя $\mathcal{M}$ все элементы, кроме интерпретаций замкнутых термов (получим модель $\mathcal{M}'$).
- **Поскольку ψ бескванторная, истинность формул вида $\psi(t)$ от этого не поменяется.**

Теорема Эрбрана

Теорема

Пусть $\psi(x)$ *— бескванторная формула с одной свободной переменной* x *и пусть* $\text{FO-CL} \vdash \exists x\, \psi(x)$. *Тогда существует такой конечный набор термов* $t_1, \ldots, t_n$, *что* $\text{FO-CL} \vdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$.

- Считаем, что $\mathrm{Cnst}_\Omega \neq \varnothing$. Тогда t_1, …, t_n можно считать замкнутыми (вместо переменных подставим константы).
- Рассуждаем от противного. Пусть $\text{FO-CL} \nvdash \psi(t_1) \vee \ldots \vee \psi(t_n)$ для любых замкнутых термов t_1, …, t_n.
- Теория $T = \{\neg \psi(t) \mid t$ — замкнутый терм$\}$ непротиворечива.
- По теореме Гёделя о полноте существует модель $\mathcal{M} \models T$.
- Уберём из носителя $\mathcal{M}$ все элементы, кроме интерпретаций замкнутых термов (получим модель $\mathcal{M}'$).
- **Поскольку ψ бескванторная, истинность формул вида $\psi(t)$ от этого не поменяется.**
- $\mathcal{M}' \models T$; $\mathcal{M}' \models \neg \exists x\, \psi(x)$; $\text{FO-CL} \nvdash \exists x\, \psi(x)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Можно обобщить теорему Эрбрана на случай нескольких кванторов: если FO-CL $\vdash \exists x_1 \dots \exists x_k\, \psi(x_1, \dots, x_k)$, то существуют такие термы $t_{1,1}$, ..., $t_{k,n}$, что FO-CL $\vdash \psi(t_{1,1}, \dots, t_{k,1}) \vee \dots \vee \psi(t_{1,n}, \dots, t_{k,n})$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Можно обобщить теорему Эрбрана на случай нескольких кванторов: если $\text{FO-CL} \vdash \exists x_1 \ \dots \ \exists x_k \, \psi(x_1, \dots, x_k)$, то существуют такие термы $t_{1,1}$, ..., $t_{k,n}$, что $\text{FO-CL} \vdash \psi(t_{1,1}, \dots, t_{k,1}) \vee \dots \vee \psi(t_{1,n}, \dots, t_{k,n})$.
- Доказательство такое же.

Усиления теоремы Эрбрана

- Можно обобщить теорему Эрбрана на случай нескольких кванторов: если $\text{FO-CL} \vdash \exists x_1 \ \ldots \ \exists x_k \, \psi(x_1, \ldots, x_k)$, то существуют такие термы $t_{1,1}$, ..., $t_{k,n}$, что $\text{FO-CL} \vdash \psi(t_{1,1}, \ldots, t_{k,1}) \vee \ldots \vee \psi(t_{1,n}, \ldots, t_{k,n})$.
- Доказательство такое же.
- Внутри ψ можно также допустить *положительные* (+) вхождения квантора $\exists$ и *отрицательные* (−) вхождения квантора $\forall$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Можно обобщить теорему Эрбрана на случай нескольких кванторов: если $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \exists x_1 \ \ldots \ \exists x_k \, \psi(x_1, \ldots, x_k)$, то существуют такие термы $t_{1,1}$, ..., $t_{k,n}$, что $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \psi(t_{1,1}, \ldots, t_{k,1}) \vee \ldots \vee \psi(t_{1,n}, \ldots, t_{k,n})$.
- Доказательство такое же.
- Внутри ψ можно также допустить *положительные* (+) вхождения квантора $\exists$ и *отрицательные* (−) вхождения квантора $\forall$.
  - Полярность (+ / −) вхождения определяется рекурсивно: она сохраняется при применении $\vee$, $\wedge$ и кванторов; для формулы вида $\alpha \to \beta$ полярность сохраняется для вхождений в β и меняется для вхождений в α.

Усиления теоремы Эрбрана

- Пусть в ψ нет отрицательных вхождений $\exists$ и нет положительных вхождений $\forall$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Пусть в ψ нет отрицательных вхождений $\exists$ и нет положительных вхождений $\forall$.
- Вынесем все кванторы наружу (приведём ψ к предварённой нормальной форме).

Усиления теоремы Эрбрана

- Пусть в ψ нет отрицательных вхождений $\exists$ и нет положительных вхождений $\forall$.
- Вынесем все кванторы наружу (приведём ψ к предварённой нормальной форме).
- За счёт полярности все кванторы будут вида $\exists$: $\psi(x_1, \dots, x_k) = \exists y_1 \ \dots, y_m \, \xi(\vec{x}, \vec{y})$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Пусть в ψ нет отрицательных вхождений $\exists$ и нет положительных вхождений $\forall$.
- Вынесем все кванторы наружу (приведём ψ к предварённой нормальной форме).
- За счёт полярности все кванторы будут вида $\exists$: $\psi(x_1, \dots, x_k) = \exists y_1 \ \dots, y_m \, \xi(\vec{x}, \vec{y})$.
- FO-CL $\vdash \exists \vec{x} \, \exists \vec{y} \, \xi(\vec{x}, \vec{y})$, ξ бескванторная.

Усиления теоремы Эрбрана

- Пусть в ψ нет отрицательных вхождений $\exists$ и нет положительных вхождений $\forall$.
- Вынесем все кванторы наружу (приведём ψ к предварённой нормальной форме).
- За счёт полярности все кванторы будут вида $\exists$: $\psi(x_1, \dots, x_k) = \exists y_1 \ \dots, y_m \, \xi(\vec{x}, \vec{y})$.
- FO-CL $\vdash \exists \vec{x} \, \exists \vec{y} \, \xi(\vec{x}, \vec{y})$, ξ бескванторная.
- По теореме Эрбрана FO-CL $\vdash \xi(\vec{t}_1, \vec{s}_1) \vee \dots \vee \xi(\vec{t}_n, \vec{s}_n)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Пусть в ψ нет отрицательных вхождений $\exists$ и нет положительных вхождений $\forall$.
- Вынесем все кванторы наружу (приведём ψ к предварённой нормальной форме).
- За счёт полярности все кванторы будут вида $\exists$: $\psi(x_1, \dots, x_k) = \exists y_1 \ \dots, y_m \, \xi(\vec{x}, \vec{y})$.
- FO-CL $\vdash \exists \vec{x} \, \exists \vec{y} \, \xi(\vec{x}, \vec{y})$, ξ бескванторная.
- По теореме Эрбрана FO-CL $\vdash \xi(\vec{t}_1, \vec{s}_1) \vee \dots \vee \xi(\vec{t}_n, \vec{s}_n)$.
- FO-CL $\vdash \big(\exists \vec{y} \, \xi(\vec{t}_1, \vec{y})\big) \vee \dots \vee \big(\exists \vec{y} \, \xi(\vec{t}_n, \vec{y})\big)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Теорема

Пусть в ψ *нет* $(-)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(+)$*- вхождений* $\forall$*, а во всех формулах теории* T *нет* $(+)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(-)$*-вхождений* $\forall$*. Тогда если* $T \vdash \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$*, то* $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$ *для некоторых* $t_{i,j}$*.*

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Теорема

Пусть в ψ *нет* $(-)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(+)$*- вхождений* $\forall$*, а во всех формулах теории* T *нет* $(+)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(-)$*-вхождений* $\forall$*. Тогда если* $T \vdash \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$*, то* $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$ *для некоторых* $t_{i,j}$*.*

- Вывод конечен, значит, можно выбрать конечную подтеорию $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$; пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\ell$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Теорема

Пусть в ψ *нет* $(-)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(+)$*- вхождений* $\forall$*, а во всех формулах теории* T *нет* $(+)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(-)$*-вхождений* $\forall$*. Тогда если* $T \vdash \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$*, то* $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$ *для некоторых* $t_{i,j}$*.*

- Вывод конечен, значит, можно выбрать конечную подтеорию $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$; пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\ell$.
- По теореме о дедукции FO-CL $\vdash \varphi \longrightarrow \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Теорема

Пусть в ψ *нет* $(-)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(+)$*- вхождений* $\forall$*, а во всех формулах теории* T *нет* $(+)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(-)$*-вхождений* $\forall$*. Тогда если* $T \vdash \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$*, то* $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$ *для некоторых* $t_{i,j}$*.*

- Вывод конечен, значит, можно выбрать конечную подтеорию $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$; пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\ell$.
- По теореме о дедукции FO-CL $\vdash \varphi \longrightarrow \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$.
- FO-CL $\vdash \exists x \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{x})\right)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Теорема

Пусть в ψ нет $(-)$-вхождений $\exists$ и нет $(+)$- вхождений $\forall$, а во всех формулах теории T нет $(+)$-вхождений $\exists$ и нет $(-)$-вхождений $\forall$. Тогда если $T \vdash \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$, то $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$ для некоторых $t_{i,j}$.

- Вывод конечен, значит, можно выбрать конечную подтеорию $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$; пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\ell$.
- По теореме о дедукции FO-CL $\vdash \varphi \to \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$.
- FO-CL $\vdash \exists x \left(\varphi \to \psi(\vec{x})\right)$.
- В $\left(\varphi \to \psi(\vec{x})\right)$ нет $(-)$-вхождений $\exists$ и нет $(+)$-вхождений $\forall$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Теорема

Пусть в ψ нет $(-)$-вхождений $\exists$ и нет $(+)$- вхождений $\forall$, а во всех формулах теории T нет $(+)$-вхождений $\exists$ и нет $(-)$-вхождений $\forall$. Тогда если $T \vdash \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$, то $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$ для некоторых $t_{i,j}$.

- Вывод конечен, значит, можно выбрать конечную подтеорию $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$; пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\ell$.
- По теореме о дедукции FO-CL $\vdash \varphi \longrightarrow \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$.
- FO-CL $\vdash \exists x \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{x})\right)$.
- В $\left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{x})\right)$ нет $(-)$-вхождений $\exists$ и нет $(+)$-вхождений $\forall$.
- FO-CL $\vdash \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{t}_1)\right) \vee \ldots \vee \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{t}_n)\right)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Теорема

Пусть в ψ нет $(-)$-вхождений $\exists$ и нет $(+)$- вхождений $\forall$, а во всех формулах теории T нет $(+)$-вхождений $\exists$ и нет $(-)$-вхождений $\forall$. Тогда если $T \vdash \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$, то $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$ для некоторых $t_{i,j}$.

- Вывод конечен, значит, можно выбрать конечную подтеорию $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$; пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\ell$.
- По теореме о дедукции FO-CL $\vdash \varphi \longrightarrow \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$.
- FO-CL $\vdash \exists x \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{x})\right)$.
- В $\left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{x})\right)$ нет $(-)$-вхождений $\exists$ и нет $(+)$-вхождений $\forall$.
- FO-CL $\vdash \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{t}_1)\right) \vee \ldots \vee \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{t}_n)\right)$.
- FO-CL $\vdash \varphi \longrightarrow \left(\psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)\right)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Также можно допустить гипотезы (теорию) специального вида, как в теоремах Харропа.

Теорема

Пусть в ψ *нет* $(-)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(+)$*- вхождений* $\forall$*, а во всех формулах теории* T *нет* $(+)$*-вхождений* $\exists$ *и нет* $(-)$*-вхождений* $\forall$*. Тогда если* $T \vdash \exists\vec{x}\,\psi(\vec{x})$*, то* $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$ *для некоторых* $t_{i,j}$*.*

- Вывод конечен, значит, можно выбрать конечную подтеорию $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell\}$; пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\ell$.
- По теореме о дедукции FO-CL $\vdash \varphi \longrightarrow \exists\vec{x}\,\psi(\vec{x})$.
- FO-CL $\vdash \exists x\left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{x})\right)$.
- В $\left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{x})\right)$ нет $(-)$-вхождений $\exists$ и нет $(+)$-вхождений $\forall$.
- FO-CL $\vdash \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{t}_1)\right) \vee \ldots \vee \left(\varphi \longrightarrow \psi(\vec{t}_n)\right)$.
- FO-CL $\vdash \varphi \longrightarrow \left(\psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)\right)$.
- $T \vdash \psi(\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \psi(\vec{t}_n)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Условия теоремы Эрбрана (для выводимости из теорий) намного более суровые, чем условия 2-й теоремы Харропа.

Усиления теоремы Эрбрана

- Условия теоремы Эрбрана (для выводимости из теорий) намного более суровые, чем условия 2-й теоремы Харропа.
- В теореме Харропа требования не распространяются на посылки импликаций и их подформулы («строго положительные вхождения»).

Усиления теоремы Эрбрана

- Условия теоремы Эрбрана (для выводимости из теорий) намного более суровые, чем условия 2-й теоремы Харропа.
- В теореме Харропа требования не распространяются на посылки импликаций и их подформулы («строго положительные вхождения»).
  - Пример: в формулу $(\theta \to \xi) \to \zeta$ подформула θ входит положительно, но не строго положительно.

Усиления теоремы Эрбрана

- Условия теоремы Эрбрана (для выводимости из теорий) намного более суровые, чем условия 2-й теоремы Харропа.
- В теореме Харропа требования не распространяются на посылки импликаций и их подформулы («строго положительные вхождения»).
  - Пример: в формулу $(\theta \to \xi) \to \zeta$ подформула θ входит положительно, но не строго положительно.
- Также в теореме Харропа нет ограничений на ψ.

Усиления теоремы Эрбрана

- Условия теоремы Эрбрана (для выводимости из теорий) намного более суровые, чем условия 2-й теоремы Харропа.
- В теореме Харропа требования не распространяются на посылки импликаций и их подформулы («строго положительные вхождения»).
  - Пример: в формулу $(\theta \to \xi) \to \zeta$ подформула θ входит положительно, но не строго положительно.
- Также в теореме Харропа нет ограничений на ψ.
- Можно ли ослабить условия теоремы Эрбрана?

Усиления теоремы Эрбрана

- Условия теоремы Эрбрана (для выводимости из теорий) намного более суровые, чем условия 2-й теоремы Харропа.
- В теореме Харропа требования не распространяются на посылки импликаций и их подформулы («строго положительные вхождения»).
  - Пример: в формулу $(\theta \to \xi) \to \zeta$ подформула θ входит положительно, но не строго положительно.
- Также в теореме Харропа нет ограничений на ψ.
- Можно ли ослабить условия теоремы Эрбрана?
- **Нет.** Пример — «кабацкая формула» $\exists x \, \big(D(x) \to \forall y \, D(y)\big)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Условия теоремы Эрбрана (для выводимости из теорий) намного более суровые, чем условия 2-й теоремы Харропа.
- В теореме Харропа требования не распространяются на посылки импликаций и их подформулы («строго положительные вхождения»).
  - Пример: в формулу $(\theta \to \xi) \to \zeta$ подформула θ входит положительно, но не строго положительно.
- Также в теореме Харропа нет ограничений на ψ.
- Можно ли ослабить условия теоремы Эрбрана?
- **Нет.** Пример — «кабацкая формула» $\exists x \left(D(x) \to \forall y\, D(y)\right)$.
- Эта формула выводима, но $\nvdash D(c) \to \forall y\, D(y)$.

Усиления теоремы Эрбрана

- Условия теоремы Эрбрана (для выводимости из теорий) намного более суровые, чем условия 2-й теоремы Харропа.
- В теореме Харропа требования не распространяются на посылки импликаций и их подформулы («строго положительные вхождения»).
  - Пример: в формулу $(\theta \to \xi) \to \zeta$ подформула θ входит положительно, но не строго положительно.
- Также в теореме Харропа нет ограничений на ψ.
- Можно ли ослабить условия теоремы Эрбрана?
- **Нет.** Пример — «кабацкая формула» $\exists x \left(D(x) \to \forall y\, D(y)\right)$.
- Эта формула выводима, но $\nvdash D(c) \to \forall y\, D(y)$.
- В этом примере ψ содержит положительное вхождение квантора $\forall$.